保角变换 FDTD 算法的数值稳定性与数值色散 [1]

周晓军 喻志远* 林为干*

(电子科技大学光电子技术系 成都 610054)
*(电子科技大学应用物理研究所 成都 610054)

摘 要 本文提出了新的保角变换 FDTD 算法，推导了保角变换 FDTD 算法的时间稳定性和数值色散方程。此外，本文以圆波导为例计算了不同网格下 TE 模数值波长的相对误差，分析了不同传播常数和对极点不同半径的半圆电壁近似下数值波长的相对误差。通过适当地选择网格数，可得到高精度。

关键词 保角变换，FDTD 算法，数值稳定性，数值色散
中图号 O441

1 引 言

最近发展起来的时域有限差分法 (FDTD) 是计算各种复杂电磁问题的有力工具. 标准的 FDTD 算法是在笛卡尔直角坐标中建立的. 计算弯曲边界的特殊截面的波导色散特性时，弯曲的边界只能用 "阶梯近似". 由于计算机存储量和计算时间的限制，计算网格不可能无限小，因此 "阶梯近似" 给数值解带来极大的误差. 众所周知，保角变换可将一个复杂边界的区域变换为一个简单的区域，并已在静电学中得到大量应用，解决了许多复杂的边值问题 [1−2] . 我们将保角变换应用到 FDTD 算法中，先用保角变换将波导横截面上弯曲的区域变为直边界的矩形区域，再用 FDTD 算法进行计算.

最近在计算波导的色散特性时，一些作者用了紧凑格式的 2D/FDTD 算法 [3−4] ，这种方法设场沿 Z 轴的变化为 $\exp(-j\beta z)$ ，(β 是传播常数)，在差分方程中对 Z 的导数用 $-j\beta$ 代替，在计算波导的色散特性时，预先设置一个 β 代入差分公式，经过一段时间计算后，随时间变化的场量经傅里叶变换，可得到各种传播模的频率，这些频率在频谱图上相应于峰值点的频率. 如果设置 $\beta = 0$ ，则这些峰值点频率是波导各个传播模的截止频率.

本文研究保角变换应用于紧凑格式 2D/FDTD 方法求解波导传输特性时的数值稳定性和数值色散.

2 保角变换 FDTD 算法

2.1 基本算法

设在 Z 平面与 W 平面上存在一个一一对应的保角映射 $w = f(z) = u + iv$ ， $f(z)$ 是解析函数， $z = x + iy$ ， $u = u(x, y)$ ， $v = v(x, y)$ ，在 Z 平面和 W 平面上，微小长度元 dl 可分别表示为

[1] 1998-10-08 收到， 1999-05-26 定稿
东南大学毫米波国家重点实验室与教委博士点基金资助课题

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = h_1^2 du^2 + h_2^2 dv^2, \tag{1}$$

$$dx^2 = (\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv)^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 du^2 + \left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 dv^2 + 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}dudv, \tag{2}$$

$$dy^2 = \left[\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right]^2 = \left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]^2 du^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial v}\right]^2 dv^2 + 2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}dudv. \tag{3}$$

h_1 ， h_2 ， h_3 是度量系数 (Lame 系数) . 解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部满足柯西－黎曼条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

代入 (1) 式得到

$$h_1^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]^2, \qquad h_2^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial v}\right]^2. \tag{5}$$

解析函数 $f(z)$ 在某点的导数与趋近于该点的方向无关，因此可得到以下关系：

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2, \tag{6}$$

$$h_1 = h_2 = \left|\frac{dw}{dz}\right|^{-1} = h, \quad h_3 = 1. \tag{7}$$

式中 h 是 u 和 v 的函数，与 z 无关. 按照正交坐标系中矢量旋度展开 Maxwell 方程 [5] ，得到电磁场的六个分量方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial E_u}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{h}\frac{\partial H_z}{\partial v} - \frac{\partial H_v}{\partial z}\right], && \frac{\partial E_v}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial H_u}{\partial z} - \frac{1}{h}\frac{\partial H_z}{\partial u}\right],\\
&\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon h^2}\left[\frac{\partial (hH_v)}{\partial u} - \frac{\partial (hH_u)}{\partial v}\right], && \frac{\partial H_u}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial E_v}{\partial z} - \frac{1}{h}\frac{\partial E_z}{\partial v}\right],\\
&\frac{\partial H_v}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{h}\frac{\partial E_z}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial z}\right], && \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu h^2}\left[\frac{\partial (hE_u)}{\partial v} - \frac{\partial (hE_v)}{\partial u}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

设

$$[\tilde{\boldsymbol{E}}; \tilde{\boldsymbol{H}}] = [hE_u(u,v), hE_v(u,v), E_z(u,v); hH_u(u,v), hH_v(u,v), H_z(u,v)], \tag{9}$$

得到一组新的 Maxwell 方程分量式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{E}_u}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial v}-\frac{\partial \tilde{H}_v}{\partial z}\right], && \frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial \tilde{H}_u}{\partial z}-\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial u}\right],\\
&\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon h^2}\left[\frac{\partial \tilde{H}_v}{\partial u}-\frac{\partial \tilde{H}_u}{\partial v}\right], && \frac{\partial \tilde{H}_u}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial z}-\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial v}\right],\\
&\frac{\partial \tilde{H}_v}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial u}-\frac{\partial \tilde{E}_u}{\partial z}\right], && \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial t}=\frac{1}{\mu h^2}\left[\frac{\partial \tilde{E}_u}{\partial v}-\frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial u}\right].\\
&\frac{\partial(\varepsilon \tilde{E}_u)}{\partial u}+\frac{\partial(\varepsilon \tilde{E}_v)}{\partial v}+\frac{\partial(h^2\varepsilon \tilde{E}_z)}{\partial z}=0, && \frac{\partial(\mu \tilde{H}_u)}{\partial u}+\frac{\partial(\mu \tilde{H}_v)}{\partial v}+\frac{\partial(h^2\mu \tilde{H}_z)}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(10) 式写成矢量形式可发现，在 $u\ v\ z$ 坐标系下的电磁场满足各向异性媒质中的麦氏方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}}=-\varepsilon[\Lambda]\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}, \quad \nabla\cdot\varepsilon[\Lambda]\tilde{\boldsymbol{E}}=0;\\
&\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}}=\mu[\Lambda]\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}, \quad \nabla\cdot\mu[\Lambda]\tilde{\boldsymbol{H}}=0;
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$[\Lambda]=\operatorname{diag}\{1,1,h^2\}. \tag{12}$$

2.2 u, v, z 空间的波矢量

根据电磁场理论，均匀平面波解也是各向异性媒质中麦氏方程的本征解，因此设电磁场的解为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(r,t)=\tilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{-j(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \quad \tilde{\boldsymbol{H}}(r,t)=\tilde{\boldsymbol{H}}_0 e^{-j(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{13}$$

式中

$$\boldsymbol{k}=k_u\hat{u}+k_v\hat{v}+k_z\hat{z}, \qquad \boldsymbol{r}=u\hat{u}+v\hat{v}+z\hat{z}. \tag{14}$$

将 (13),(14) 式代入 (11) 式，矢量 $\boldsymbol{k}$, $\tilde{\boldsymbol{E}}_0$, $\tilde{\boldsymbol{H}}_0$ 相互不正交. 为了求出 $u\ v\ z$ 空间的波矢量，设

$$\boldsymbol{E}'_0=[\Lambda]^{1/2}\tilde{\boldsymbol{E}}_0, \quad \boldsymbol{H}'_0=[\Lambda]^{1/2}\tilde{\boldsymbol{H}}_0, \quad \boldsymbol{k}'_0=\frac{1}{h}[\Lambda]^{1/2}\tilde{\boldsymbol{k}}, \tag{15}$$

$\boldsymbol{k}'$, $\boldsymbol{E}'_0$, $\boldsymbol{H}'_0$ 三个矢量两两相互正交，

$$\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}'_0=(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{E}'_0)\boldsymbol{k}'-(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k}')\boldsymbol{E}'_0=-|\boldsymbol{k}'|^2\boldsymbol{E}'_0=-\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}'_0, \tag{16}$$

得到 u, v, z 空间的波矢量：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{k_u^2}{h^2}+\frac{k_v^2}{h^2}+k_z^2=k_0^2,\\
&k_u=k_0 h\sin\theta\cos\varphi,\\
&k_v=k_0 h\sin\theta\sin\varphi,\\
&k_z=k_0\cos\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

3 数值稳定性

我们用规约化磁场强度 $\tilde{H}\sqrt{\mu_o/\varepsilon_0}\to\tilde{H}$，并且设 $\overline{V}=\tilde{H}+j\tilde{E}$，则麦氏方程的两个旋度方程可用统一公式表示：

$$jc(\nabla\times\boldsymbol{V})=[\Lambda]\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}. \tag{18}$$

由 (18) 式的右端和左端的中心差分构成时间和空间本征值方程 [6]：

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{\text{ numerical}}\boldsymbol{V}=\frac{\boldsymbol{V}^{n+1/2}-\boldsymbol{V}^{n-1/2}}{\Delta t}=\lambda\boldsymbol{V}, \tag{19}$$

$$jc\cdot(\nabla_{\text{ numerical}}\times\boldsymbol{V})=\lambda\boldsymbol{V}. \tag{20}$$

时间稳定条件要求 V 随时间的增长因子 $q=\frac{V^{n+1/2}}{V^n}=\frac{V^n}{V^{n-1/2}}\le 1$, 代入 (19) 式可解出

$$\mathrm{Re}(\lambda)=0,\qquad |\mathrm{Im}(\lambda)|\le\frac{2}{\Delta t}. \tag{21}$$

(20) 式的本征解是由数值空间平面波模：

$$\boldsymbol{V}(l,m,n)=\boldsymbol{V}_0\exp[-j(k_u l\Delta u+k_v m\Delta v+k_z n\Delta z)] \tag{22}$$

组成的，式中 k_u,k_v, k_z 分别为 u, v 和 z 方向的数值波数，l, m, n 是整数. 将 (22) 式代入 (20) 式得到

$$-2c\left[\frac{\sin(k_u\Delta u/2)}{\Delta u}\hat{u}+\frac{\sin(k_v\Delta v/2)}{\Delta v}\hat{v}+\frac{\sin(k_z\Delta z/2)}{\Delta z}\hat{z}\right]\times\boldsymbol{V}=\lambda[\Lambda]\boldsymbol{V}. \tag{23}$$

展开矢量叉乘运算，得到一个关于 $\boldsymbol{V}$的三个分量 V_u, V_v, V_z 的齐次线性方程组. 这个方程组有解的充要条件是系数行列式为零，由此解得

$$\lambda^2=-4c^2\left[\frac{\sin^2(k_u\Delta u/2)}{h^2\Delta u^2}+\frac{\sin^2(k_v\Delta v/2)}{h^2\Delta v^2}+\frac{\sin^2(k_z\Delta z/2)}{\Delta z^2}\right]. \tag{24}$$

正弦函数的最大幅度不超过 1, 由 (21),(24) 式得出保角变换 FDTD 的稳定性条件：

$$\Delta t\le\min\left\{\frac{h}{c}\left[\frac{1}{\Delta u^2}+\frac{1}{\Delta v^2}+(\frac{h}{\Delta z^2})^2\right]^{-1/2}\right\}. \tag{25}$$

对于紧凑格式保角变换 2D/FDTD，$\Delta z\to 0$，$k_z=\beta$, 由 (24) 式稳定性条件为

$$\Delta t\le\min\left\{\frac{h}{c}\left[\frac{1}{\Delta u^2}+\frac{1}{\Delta v^2}+(\frac{\beta h}{2})^2\right]^{-1/2}\right\}. \tag{26}$$

$\beta=0$ 时，稳定性条件为

$$\Delta t \leq \frac{h_{\min}}{c}\left[\frac{1}{\Delta u^2}+\frac{1}{\Delta v^2}\right]^{-1/2}, \tag{27}$$

式中 $h_{\min}$ 是 $h(u,v)$ 的最小值.

4 数值色散方程

设方程 (20) 式的解为数值平面波:

$$\boldsymbol{V}(l,m,n,q)=\boldsymbol{V}_0\exp[-j(k_u l\Delta u+k_v m\Delta v+k_z n\Delta z-\omega q\Delta t)]. \tag{28}$$

ω 是数值平面波的角频率, l, m, n 和 q 是整数. 将 (28) 式代入 (18) 式同样可得到一 V_u, V_v, V_z 的齐次线性方程组, 用求解时间稳定性条件类似的方法解此方程组可得到保角变换 FDTD 的数值色散方程:

$$\sin^2(\omega\Delta t/2)=\left[\frac{c\Delta t}{h\Delta u}\right]^2\sin^2(\frac{k_u\Delta u}{2})+\left[\frac{c\Delta t}{h\Delta v}\right]^2\sin^2(\frac{k_v\Delta v}{2})+\left[\frac{c\Delta t}{\Delta z}\right]^2\sin^2(\frac{k_z\Delta z}{2}). \tag{29}$$

紧凑格式保角变换 2D/FDTD 算法, 取 $\Delta z\to 0$, $k_z=\beta$, 数值色散方程为

$$\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})=\left[\frac{c\Delta t}{h\Delta u}\right]^2\sin^2(\frac{k_u\Delta u}{2})+\left[\frac{c\Delta t}{h\Delta v}\right]^2\sin^2(\frac{k_v\Delta v}{2})+\left[\frac{c\beta\Delta t}{2}\right]^2. \tag{30}$$

5 讨 论

类似于直角坐标系, 我们定义一个 Courant 数 [4]:

$$S=\frac{C\Delta t}{h_{\min}\Delta l}. \tag{31}$$

为方便起见, 考虑 $\Delta u=\Delta v=\Delta l$ 的情况. 如果 $\beta h_{\min}\Delta l>>1$ ($h_{\min}\Delta l$ 是沿 u 或 v 方向的最小线元), 由 (26) 式得到

$$\frac{c\Delta t}{h_{\min}\Delta l}\leq\frac{2}{\beta h_{\min}\Delta l}. \tag{32}$$

Courant 数非常小, 对于 $\beta h_{\min}\Delta l<<1$,

$$\frac{c\Delta t}{h_{\min}\Delta l}\leq\left[2+(\frac{\beta h_{\min}\Delta l}{2})^2\right]^{-1/2} \tag{33}$$

对 $\beta=0$, Courant 数的上限是 $1/\sqrt{2}$. 当最小线元 $h_{\min}\Delta l$ 比导波波长 $\lambda_g=2\pi/\beta$ 小得多时, Courant 数小于 $1/\sqrt{2}$, 但是仍很接近于 $1/\sqrt{2}$.

为了估计紧凑格式保角变换 2D/FDTD 的精度, 我们用对数变换 z=ln$w$ 分析半径为 a 的圆波导的色散特性. 由于在横截面上波导结构是对称的, 仅考虑半个波导截面区域. 为了

避开极点处的奇点，以极点为中心，作一个半径为 b 的很小的半圆．对数变换把 Z 平面上的挖去奇点的两个半圆之间的区域：$b \le r \le a, 0 \le \phi \le \pi$ 变为 W 平面上的矩形区域：$\ln b \le u \le \ln a, 0 \le v \le \pi$．对于 TE 模，矩形区域的边界均为完善导电壁，应满足

$$k_u(\ln(a/b)) = n\pi, \quad k_v = m\pi, \tag{34}$$

式中 n 和 m 是整数．代入

$$a = \exp(u_{\max} = h_{\max}. \tag{35}$$

由数值色散方程 (30) 式得到

$$\frac{\hat{\lambda}_{nm}}{a} = \frac{\pi c\Delta t}{a\sin^{-1}\left\{\frac{c\Delta t}{a}\left[\frac{1}{\Delta u^2}\sin^2[\frac{\hat{k}_u\Delta u}{2}] + \frac{1}{\Delta v^2}\sin^2[\frac{\hat{k}_v\Delta v}{2}] + [\frac{\beta a}{2}]^2\right]^{1/2}\right\}}, \tag{36}$$

式中 $\hat{\lambda}_{nm}$ 在传播常数 β 下的数值波长．此外，当 $\Delta u \to 0$ 时，$\Delta v \to 0$，由 (30) 式可推出 $\hat{\lambda}_{nm}$ 是趋近于 β 下精确传播波长 λ_{nm} 的，即

$$\frac{\lambda_{nm}}{a} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_l^2 + (\beta a)^2}}, \tag{37}$$

式中 $k_l^2 = k_u^2 + k_v^2 = \rho'_{nm}$．$\rho'_{nm}$ 是 n 阶贝塞尔函数 J_n 的导函数的第 m 个根．

为了说明网格数对计算本征频率的影响，我们用 (36) 式计算了半径为 5.35cm 的圆波导的数值波长，极点处半圆的半径为 $b = 0.01$cm．计算中保持 Courant 数取上限值．定义数值波长相对误差为

$$\text{相对误差} = (\hat{\lambda}_{nm} - \lambda_{nm})\lambda_{nm}^{-1} \times 100\%. \tag{38}$$

图 1 给出了四种 TE 模在传播常数 $\beta = 1000m^{-1}$ 时网格数 N_u 与数值波长相对误差的关系．计算中取矩形网格 $\Delta l = \ln(a/b)/N_u = \pi/N_v$，圆波导 a=5.35cm，$b = 1.866 \times 10^{-7}$cm．图中曲线表明，当 $N_u > 50$ 时，几个 TE 模相对误差小于 0.2%．

图 2 给出了 $N_u = 20$ 时不同的传播常数 β 下数值波长的相对误差．当 $\beta h_{\min}\Delta l << 1$ 时，相对误差随增加 β 而减小．$\beta h_{\min}\Delta l >> 1$ 时，相对误差随增加 β 而增加．$\beta h_{\min}\Delta l = 1$ 时，相对误差最小．

图 3 给出了极点处半圆形边界半径 b 对数值波长相对误差的影响．当 $b \le 10^{-6}$(m) 时，半径 b 的变化对数值波长相对误差没有任何影响．

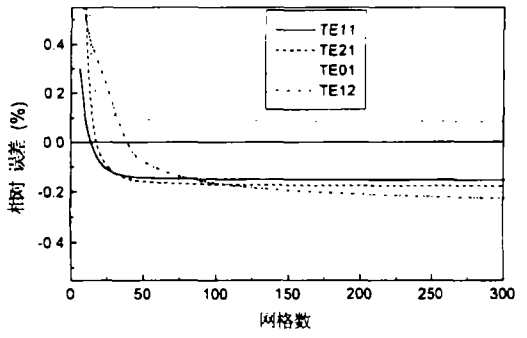

图 1 网格数与 TE 模数值波长相对误差的关系

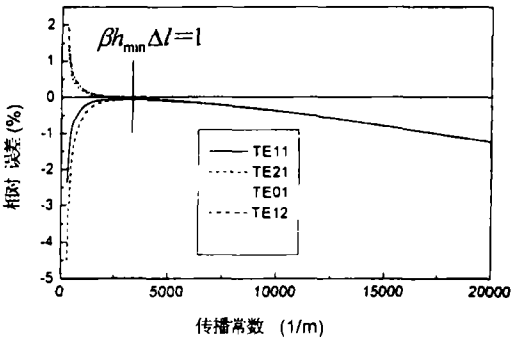

图 2 传播常数 β 对数值波长相对误差的影响

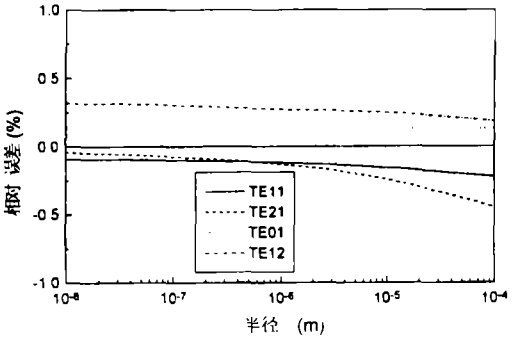

图 3 极点处半径 b 对数值波长相对误差的影响

6 结 束 语

时间稳定性和数值色散是评估一种算法优劣程度的重要标准.本文推导了保角变换 FDTD 算法的数值稳定性不等式和数值色散方程. 以圆波导为例, 研究了紧凑格式保角变换 FDTD 算法的时间稳定性和数值色散. 计算了不同网格下数值波长的相对误差, 分析了不同传播常数和对极点不同半径近似下数值波长的相对误差. 研究表明, 通过适当地选择网格数, 使之满足 $\beta h_{\min}\Delta l = 1$, 紧凑格式保角变换 FDTD 算法分析色散特性可得到较高的精度.

参 考 文 献

[1] 林为干, 符果行, 邬琳若, 刘仁厚. 电磁场理论. 北京: 人民邮电出版社, 1996 年 2 月, 569–656.

[2] 张克潜, 李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论. 北京: 电子工业出版社, 1994 年 11 月, 112–133.

[3] Kim I S, Hoefer W J R. Numerical dispersion characteristics and stability factor for the FD-TD method. Electron. Lett., 1993, 26(7): 485–486.

[4] Cangellaris A C. Numerical stability and numerical dispersion of a compact 2-D/FDTD method used for the dispersion analysis of waveguides. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1993, 13(1): 3–5.

[5] Stratton J A. Electromagnetic Theory. New York: McGraw-Hill, 1941, 50–51.

[6] Taflove A. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. London: Artech House Boston, 1995, 82–87.

NUMERICAL STABILITY AND NUMERICAL DISPERSION OF CONFORMAL MAPPING FDTD ALGORITHM

Zhou Xiaojun　Yu Zhiyuan*　Lin Weigan*

(*Dept. of Opto-electron. Tech., Univ. of Electron. Sci. and Tech. of China, Chengdu* 610054)

*(*Institute of Applied Physics, Univ. of Electron. Sci. and Tech. of China, Chengdu*, 610054)

Abstract This paper proposes a new algorithm based on conformal mapping and FDTD method, and derives the numerical stability and numerical dispersion equations of conformal mapping FDTD algorithm. As an example, the relative errors of numerical wavelengths for TE modes in a circular waveguide in different cell number are calculated. The errors for different propagation constants and for different radius semicircle electric wall approaches to singularity at origin are analyzed. By selecting cell number appropriately, high accuracy can be obtained.

Key words Conformal mapping, FDTD algorithm, Numerical stability, Numerical dispersion

周晓军：女，1955 年生，副教授，在职博士生，主要研究兴趣：电磁场数值计算，微波技术与光波技术，光纤传感器等.

喻志远：男，1946 年生，教授，主要研究兴趣：电磁场数值计算，微波与光电子学，微波电路 CAD 等.

林为干：男，1919 年生，教授，博士生导师，中科院院士，电子学会理事，微波学会主任，美国 MIT 电磁科学院院士，美国《电磁波与应用杂志》、《微波与光技术快报》编委. 主要研究兴趣：电磁场理论，微波技术与光导波技术.