

色噪声背景下正弦参量估计 的互谱矩和 SVD 方法*

石要武 戴逸松 官文斌

(吉林工业大学电子系 长春 130022)

摘要 互谱估计方法是用于色噪声背景下正弦信号参量估计的一个十分有效的方法。但以往互谱估计都是采用 FFT 方法和互周期图法。本文首次将现代谱估计方法引入到互谱估计中,从理论上建立了互相关函数的 Yule-Walker 方程,并在此基础上进而提出了互谱估计的矩估计法和 SVD 方法。给出了仿真实例结果。

关键词 信号处理,色噪声,互谱估计

1 引言

色噪声背景下正弦参量估计是谱估计领域里的核心问题之一。对于这个问题,目前已有多种解决方法。其中性能较优良的有非线性最小二乘法^[1],高阶自相关法^[2],及广义 AR 模型法^[3]等。这些方法的共同缺点是对色噪声的模型形式加了较严格的限制,因此有很大的局限性。文献[4,5]提出的高阶谱估计方法虽然可以克服这一缺点,但它仅适用于非高斯信号中混有高斯噪声情况。

文献[6]提出的互谱估计方法可以较好地解决上述问题。文献[6]认为,当被测信号很弱时,测量系统中所必需的前置放大器的噪声是影响谱估计精度的主要问题。但当两个放大器在电气上完全相互隔离时,这两个放大器的噪声则是互不相关的。因此,在假定噪声均值为零的条件下,通过用这两个放大器对信号平行放大,然后再进行互谱估计的方法就可以更有效地排除放大器噪声。该方法的主要优点是不需要色噪声的任何先验信息,并且能在很低信噪比条件下工作。用这种方法,文献[6]成功地测出了 1nV 正弦信号的频率和幅值。类似的工作,国外也有报道^[7,8]。

但文献[6—8]在互谱估计时采用的是传统的互谱周期图法。文献[9]指出,互谱周期图法是非一致估计,并且其估计方差甚至比自谱周期图法的估计方差更大,从而严重地影响了它的谱估计性能。

1993-04-13 收到, 1993-10-29 定稿

* 1992 年国家教委博士生基金资助项目

石要武 男, 1954 年生, 讲师, 博士研究生, 现从事弱信号检测, 信号处理的研究工作。

戴逸松 男, 1936 年生, 教授, 博士生导师, 现从事弱信号检测, 电路噪声理论, 神经网络, 信号处理等领域的教学和科研工作。

官文斌 男, 1956 年生, 讲师, 硕士, 现从事弱信号检测, 自动控制等领域的研究工作。

由自谱估计的理论和实践,解决这一问题的最好方法是将自谱的现代谱估计的理论和方法引入到互谱估计中。为此,本文首先从理论上证明了互相关函数的 Yule-Walker 方程,并在此基础上提出了互谱参数谱估计的矩估计方法。针对正弦加色噪声情况,文中又进而提出了互谱估计的 SVD 方法。仿真结果表明,即使是对于模型为 ARMA 形式的色噪声和在很低信噪比(-5dB)情况下,本文方法仍具有很高的谱估计精度和谱估计的稳定性。

2 互相关函数的 Yule-Walker 方程和互谱矩估计方法

设时间序列 $x(k), y(k)$ 均为带有附加色噪声的零均值、平稳、可逆的实 AR 过程,即

$$x(k) = \frac{e_x(k)}{A(z^{-1})} + \omega_x(k), \quad (1)$$

$$y(k) = \frac{e_y(k)}{B(z^{-1})} + \omega_y(k), \quad (2)$$

式中 $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}$, $a_p \neq 0$,

$B(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}$, $b_q \neq 0$,

$e_x(k), e_y(k)$ 均为零均值白噪声序列,且 $E[e_x(k)e_y(k+\tau)] = \sigma_{xy}\delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ 为 Kronecker Delta 函数; $\omega_x(k)$ 和 $\omega_y(k)$ 为谱密度未知的互不相关的零均值色噪声; z 为 Z 变换算子。

$$\text{定义} \quad r_{xy}(\tau) = E[x(k)y(k+\tau)], \quad (3)$$

$$r_{yx}(\tau) = E[y(k)x(k+\tau)], \quad (4)$$

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{xy}(k) e^{-i\omega k} \right], \quad \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (5)$$

可以证明

$$S_{xy}(\omega) = \frac{\sigma_{xy}}{A(\alpha)B(\alpha^{-1})} \Big|_{\alpha=e^{j\omega}} \quad (6)$$

定理(互相关函数的 Yule-Walker 方程) 设时间序列 $x(k), y(k)$ 如(1),(2)式所示,则其对应的互相关函数序列 $r_{xy}(k), r_{yx}(k), (k=0, 1, \dots)$ 满足下列 Yule-Walker 方程

$$\begin{bmatrix} r_{xy}(0) & r_{yx}(1) & \cdots & r_{yx}(q) \\ r_{xy}(1) & r_{xy}(0) & \cdots & r_{yx}(q-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xy}(q) & r_{yx}(q-1) & \cdots & r_{xy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} r_{yx}(0) & r_{xy}(1) & \cdots & r_{xy}(p) \\ r_{yx}(1) & r_{yx}(0) & \cdots & r_{xy}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yx}(p) & r_{xy}(p-1) & \cdots & r_{yx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

证明

$$\begin{aligned} r_{xy}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xy}(\omega) e^{j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \sigma_{xy} f(z) z^{k-1} dz, \end{aligned} \quad (9)$$

式中

$$f(z) = \frac{1}{A(z)B(z^{-1})}.$$

当 $k \geq 1$ 时, (9) 式中只有 $B(z^{-1})$ 的零点在单位圆内, 设其零点分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, 则

$$r_{xy}(k) = \sigma_{xy} \sum_{i=1}^q c_i \alpha_i^{k+q-1}, \quad k+q-1 \geq 0, \quad (10)$$

式中

$$c_i = \lim_{z \rightarrow \alpha_i} (z - \alpha_i) f(z), \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

因为 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, q)$ 是 $B(z^{-1})$ 的零点, 所以

$$1 + b_1 \alpha_i^{-1} + \dots + b_q \alpha_i^{-q} = 0. \quad (11)$$

将(11)式两端同乘 $c_i \alpha_i^{k+q-1}$, 得

$$c_i \alpha_i^{k+q-1} + b_1 c_i \alpha_i^{k+q-2} + \dots + b_q c_i \alpha_i^{k-1} = 0. \quad (12)$$

令 $i = 1, 2, \dots, q$, 再将所得诸式相加, 得

$$\sum_{i=1}^q c_i \alpha_i^{k+q-1} + b_1 \sum_{i=1}^q c_i \alpha_i^{k+q-2} + \dots + b_q \sum_{i=1}^q c_i \alpha_i^{k-1} = 0. \quad (13)$$

将(10)式代入(13)式, 得

$$r_{xy}(k) + b_1 r_{xy}(k-1) + \dots + b_q r_{xy}(k-q) = 0. \quad (14)$$

在(14)式的左端中令 $k = 0$, 则

$$\begin{aligned} & r_{xy}(0) + b_1 r_{xy}(-1) + \dots + b_q r_{xy}(-q) \\ &= \frac{\sigma_{xy}}{2\pi j} \left\{ \oint_{|z|=1} z^{-1} f(z) dz + b_1 \oint_{|z|=1} z^{-2} f(z) dz + \dots + b_q \oint_{|z|=1} z^{-q-1} f(z) dz \right\} \\ &= \frac{\sigma_{xy}}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{z^{-1}}{A(z)} dz = \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (15)$$

综合(14), (15)式, 令 $k = 0, 1, \dots, q$, 可得 $q+1$ 个方程, 写成矩阵形式, 并利用 $r_{xy}(-k) = r_{yx}(k)$ 的性质, 即得(7)式。

同理可证(8)式。

证毕

由(7), (8)式, 若以 $\hat{f}(\cdot)$ 表示 $r(\cdot)$ 的估值, 在对应的互相关函数矩阵可逆的条件下, 可以得到互谱 AR 模型参数的矩估计算法:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{xy}(0) & \hat{f}_{yx}(1) & \cdots & \hat{f}_{yx}(q-1) \\ \hat{f}_{xy}(1) & \hat{f}_{xy}(0) & \cdots & \hat{f}_{yx}(q-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{f}_{xy}(q-1) & \hat{f}_{xy}(q-2) & \cdots & \hat{f}_{xy}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{f}_{xy}(1) \\ \hat{f}_{xy}(2) \\ \vdots \\ \hat{f}_{xy}(q) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2 \\ \vdots \\ \hat{d}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_{yx}(0) & \hat{r}_{xy}(1) & \cdots & \hat{r}_{xy}(p-1) \\ \hat{r}_{yx}(1) & \hat{r}_{yx}(0) & \cdots & \hat{r}_{xy}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{yx}(p-1) & \hat{r}_{yx}(p-2) & \cdots & \hat{r}_{yx}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{r}_{yx}(1) \\ \hat{r}_{yx}(2) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yx}(p) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

3 正弦参量估计的互谱 SVD 方法

互谱估计一般需要两组互相相关的测量序列。但对正弦信号而言, 仅用一组测量序列即可。互谱估计所需的另一组相关的测量序列, 可用从原测量序列中延时抽样的方法得到。这样做不仅简化了测量系统的设计, 而且还克服了文献[6]方法中存在的仅能抑制放大器噪声问题。

设时间序列 $x(n)$ 为一带有附加色噪声的正弦过程, 即

$$x(n) = \sum_{i=1}^{p/2} A_i \sin(2\pi f_i n + \varphi_i) + \omega(n), \quad (18)$$

式中 φ_i 为在区间 $(-\pi, \pi)$ 中均匀分布的独立随机变量; f_i 为归一化数字频率; $\omega(n)$ 为谱密度未知的零均值色噪声, 它的相关时间为 T (相关时间 T 的定义及估计可参见文献[10])。令

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n+m) \\ &= \sum_{i=1}^{p/2} A_i \sin[2\pi f_i(n+m) + \varphi_i] + \omega(n+m), \end{aligned} \quad (19)$$

将(18),(19)式写成差分方程形式, 有

$$x(n) + a_1 x(n-1) + \cdots + a_p x(n-p) = \omega(n), \quad (20)$$

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_p y(n-p) = \omega(n+m). \quad (21)$$

取 $mT_s \geq T + pT_s$ (T_s 为采样间隔时间), 则 $\omega(n)$ 与 $\omega(n+m)$ 互不相关, 而正弦信号却是周期相关的, 所以由上节所述定理, (20),(21)式的互相关函数 Yule-Walker 方程为

$$\begin{bmatrix} r_{xy}(0) & r_{yx}(1) & \cdots & r_{yx}(p) \\ r_{xy}(1) & r_{xy}(0) & \cdots & r_{yx}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xy}(p) & r_{xy}(p-1) & \cdots & r_{xy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

(22)式可简写为

$$R_{xy} A = 0. \quad (23)$$

实际上, 我们只能得到矩阵 R_{xy} 的估计 \hat{R}_{xy} 。实践证明, 将 \hat{R}_{xy} 的阶数取得高些, 可以有效地改善谱估计的性能^[11], 即实际上可取

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{xy}(0) & \hat{r}_{yx}(1) & \cdots & \hat{r}_{yx}(q) \\ \hat{r}_{xy}(1) & \hat{r}_{xy}(0) & \cdots & \hat{r}_{yx}(q-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{xy}(h) & \hat{r}_{xy}(h-1) & \cdots & \hat{r}_{yx}(h-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{d}_1 \\ \vdots \\ \hat{d}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

式中 $h > q > p$.

将(24)式简记为

$$\tilde{R}_{xy}\tilde{A} = 0. \quad (25)$$

为了充分减少矩阵 \tilde{R}_{xy} 的估计误差对模型参数估计的影响,我们取(25)式的最小二乘解作为参数向量 \tilde{A} 的最优估计,即取

$$\tilde{A}^T\tilde{A} = \min, \quad \tilde{A}(0) = 1 \quad (26)$$

设 \tilde{R}_{xy} 的奇异值分解 (SVD) 式为

$$\tilde{R}_{xy} = \sum_{i=1}^q \sigma_i u_i v_i^T, \quad (27)$$

式中 $u_i, v_i, i = 1, \dots, q$, 分别为矩阵 \tilde{R}_{xy} 的左、右奇异矢量; $\sigma_i, i = 1, \dots, q$, 为 \tilde{R}_{xy} 的奇异值,且 σ_i 以递减次序排列(即 $\sigma_{i+1} \leq \sigma_i$).

用与文献[12]相类似的方法可求得

$$\tilde{A} = \frac{\sum_{i=p+1}^q u_i(1)u_i}{\sum_{i=p+1}^q |u_i(1)|^2}, \quad (28)$$

式中 $u_i(1)$ 为奇异矢量 u_i 的第一个元素值.

4 数字仿真结果

为说明互谱矩估计法和互谱 SVD 方法的谱估计性能,我们使用以下数字仿真模型:

$$x(n) = A_1 \sin(2\pi f_1 n + \pi/4) + A_2 \sin(2\pi f_2 n) + \omega(n), \quad (29)$$

式中 $f_1 = 0.17\text{Hz}$, $f_2 = 0.19\text{Hz}$; $\omega(n)$ 为由方差为 1 的白噪声通过一个四阶带通滤波器产生的. 该滤波器的传递函数为

$$H(z) = \frac{0.0201(1 - 2z^{-2} + z^{-4})}{1 - 1.637z^{-1} + 2.237z^{-2} - 1.307z^{-3} + 0.641z^{-4}}, \quad (30)$$

该滤波器的上限截止频率为 0.2Hz, 下限截止频率为 0.15Hz (均为归一化数字频率). 该滤波器(即色噪声 $\omega(n)$) 的归一化功率谱密度曲线如图 1 所示.

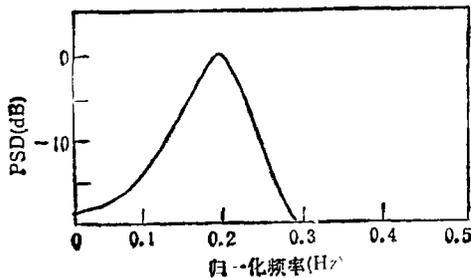


图 1 色噪声 $\omega(n)$ 的功率谱

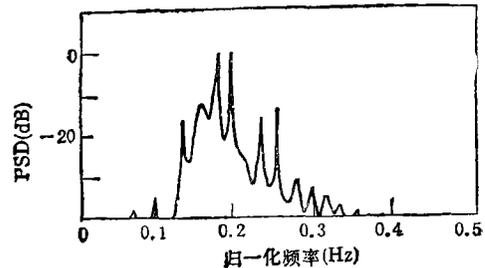


图 2 互谱矩估计法

$N = 256, f_1 = 0.17, f_2 = 0.19, \text{SNR} = -5\text{dB}$

因此,时间序列 $x(n)$ 完全类似于带有噪声的正弦信号通过一带通滤波器情况。

可以算出色噪声 $\omega(n)$ 的相关时间 $T = 50T_s$ 。

取时间序列 $x(n)$ 中的两个正弦分量的信噪比均为 -5dB (以 $\text{SNR}_i = 10\lg(A_i^2/2\sigma_w^2)$ 计算)。取延迟时间 $m = 100$, 即取

$$y(n) = x(n + 100) \quad (31)$$

$x(n)$, $y(n)$ 的数据长度均为 256。使用互谱矩估计法和互谱 SVD 方法得到的 $x(n)$ 的功率谱估计分别示于图 2 和图 3。

为了便于比较,我们仍使用序列 $x(n)$ 的数学模型,但数据长度增至 1024,使用 Cadzow 的 SVD 方法^[12]得到的谱估计如图 4 所示。

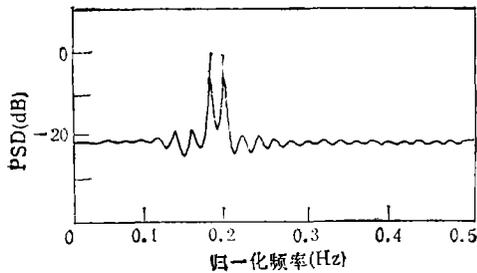


图 3 互谱 SVD 方法

$N = 256, f_1 = 0.17, f_2 = 0.19, \text{SNR} = -5\text{dB}$

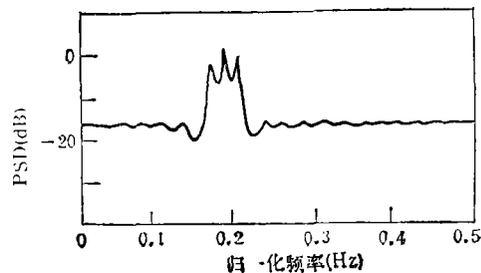


图 4 Cadzow 的 SVD 方法

$N = 1024, f_1 = 0.17, f_2 = 0.19, \text{SNR} = -5\text{dB}$

利用(29), (31)式连续产生 30 段数据,每段数据长度均为 256,分别使用互谱矩估计法和互谱 SVD 方法连续做 30 次试验,得到频率 f_1, f_2 的估计均值和估计方差示于表 1。

表 1 两种方法统计性能比较

估计方法	矩估计法		SVD 方法	
	$f_1 = 0.17$	$f_2 = 0.19$	$f_1 = 0.17$	$f_2 = 0.19$
估计均值	0.168033	0.191933	0.169621	0.190754
估计方差	6.87×10^{-3}	5.89×10^{-3}	5.42×10^{-3}	4.31×10^{-3}

类似地,我们使用 Cadzow 的 SVD 方法连续做 30 次试验,每次试验的数据长度均为 1024,由于严重的频率偏移和虚假峰值的存在,所以无法给出统计结果。

比较以上的实验结果,可以看出,本文方法对于色噪声背景下正弦信号谱估计的性能改善是十分明显的。另外,互谱 SVD 方法的谱估计性能明显地优于互谱矩估计法。

5 结 束 语

互谱估计方法是抑制测量色噪声的一个十分有效的方法。本文提出的互谱现代谱估

计方法是对传统互谱估计方法的一个重大改进。仿真结果表明,即使是对于噪声能量主要集中于正弦信号频率周围的窄带噪声和很低信噪比情况,本文方法仍具有很高的谱分辨率和谱估计的稳定性。

参 考 文 献

- [1] Sakar H. Estimation of Frequencies of Sinusoids in Colored Noise, Proc. ICASSP-86 Tokyo, Japan, 1986, 177—180.
- [2] Sherman P J, *et al.* High Resolution Spectral Estimation of Sinusoids in Colored Noise Using A Modified Pisarenko Decomposition, Proc. ICASSP-86 Tokyo, Japan, 1986, 181—184.
- [3] Chatterjee C, *et al.* IEEE Trans. on ASSP, 1987, ASSP-35(3): 328—337.
- [4] Padopoulos C K, *et al.* IEEE Trans. on ASSP, 1990 ASSP-38(8): 1424—1436.
- [5] Ferrari A, *et al.* Estimation of the Frequencies of A Complex Sinusoidal Noisy Signal Using Fourth Order Statistics, Proc. ICASSP Toronto, Canada: 1991, 3457—3460.
- [6] Dai Yisong. Int. J. Electron., 1991, 71(1): 45—53.
- [7] Ono T, *et al.* Journal of the Acoustical Society of Japan, 1988, 44(2): 91—95.
- [8] Lee Y, *et al.* A Cross-Power Spectral Method for Improved Measurement of Film Noise Power Spectra, Proceedings of the SPIE-The Int. Soc. for Optical Engineering, Vol. 767, pt. 1, pp. 250—258.
- [9] 戴逸松,石要武. 电工技术学报,1992,(2): 38—42.
- [10] 周荫清,随机信号处理,北京:北京航空学院出版社,1987:pp.125.
- [11] 黄登山. 电子学报,1993,21(4): 101—104.
- [12] Cadzow J A, *et al.* IEE Proc.-F, 1983, 130(8): 202—210.

CROSS-SPECTRAL MOMENT AND SVD METHODS ESTIMATING THE PARAMETERS OF CLOSE SINUSOIDS IN COLORED NOISE

Shi Yaowu Dai Yisong Gong Wenbin
(Jilin University of Technology, Changchun 130022)

Abstract The Cross-spectral estimation methods are efficient in estimating the parameters of sinusoidal signals embedded in colored noise. But up to now there are only FFT and Cross-periodogram methods used in cross-spectral estimation. This paper introduces the modern auto-spectral estimation methods into cross-spectral estimation. The cross-correlation based Yule-Walker equation is proposed theoretically and the Moment and SVD algorithms for cross-spectral estimation are developed on the base. Finally a numerical example is given for comparing the presented methods with the well known Cadzow's SVD method.

Key words Signal processing, Cross-spectral estimation, Colored noise