

基于距离差信息的多基地雷达的布局 and 定位精度分析¹

尹成友 徐善驾 王东进

(中国科学技术大学电子工程与信息科学系 合肥 230027)

摘 要 本文首先给出了基于距离差定位的误差概率分布; 然后根据误差协方差矩阵和两种常用的定位精度度量准则关系, 利用最小误差椭球准则, 给出了在对称地面上对空中目标进行定位的最优布局方法; 最后给出了一些计算结果。

关键词 多基地雷达, 数据融合, 无线电定位

中图分类号 TN95

1 引 言

近年来, 随着电子对抗环境复杂性的增加, 双多基地雷达重新获得人们的重视, 特别是现代通信技术和数据融合技术的发展, 给多基地雷达的发展提供契机。双多基地雷达与普通雷达相比, 它改善了探测空间和时间的覆盖范围, 提高了对目标的测量和跟踪精度。以距离差信息实现对目标的精确定位一直受到人们的关注^[1-3], 但绝大多数的分析都是针对二维空间, 而且只分析定位精度, 很少涉及布局问题。文献 [4] 以几何扩散因子 (GDOP) 作为度量准则, 对无约束情况和对称平面上的布局进行了分析, 但给出的布站数很难得到一整数解, 因而极不便于操作。本文利用最小误差椭球准则, 给出了在对称平面上的最优布局方法, 结果简炼明了, 具有一定的实用价值。

2 理论分析

依靠电磁波到达时间差的定位系统, 一种是借助目标自身的电磁辐射; 另一种是安装一协作的照射源, 后一种即是我们讨论的一发多收 (TRⁿ) 的多基地雷达系统。从某种意义上, 它是 GPS 定位的逆问题。

2.1 估计误差的概率分布

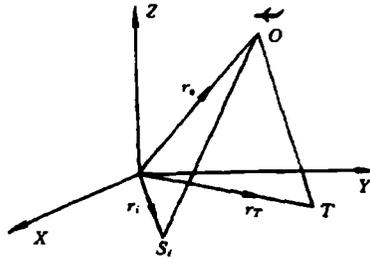
如图 1 所示, r_i 是第 i 个收站的位置矢量, r_T 是发射站的位置矢量, r_0 是目标的位置矢量。则各收站的测量方程为

$$r_{iT} = |r_0 - r_i| + |r_T - r_0| + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

其中 r_{iT} 是从第 i 个收站经过目标到发射站的距离, ε_i 是第 i 个收站的测量误差。这里我们假定 ε_i 服从均值为 0, 方差为 σ_i^2 的正态分布。因为 r_T 一般是未知的, 消去 $|r_T - r_0|$ 项我们得到

$$r_{iT} - r_{1T} = |r_0 - r_i| - |r_0 - r_1| + \varepsilon_i - \varepsilon_1, \quad i = 2, \dots, N. \quad (2)$$

¹ 1996-05-28 收到, 1997-02-04 定稿

图 1 TR^n 系统的几何结构

这是一非线性方程组, 对其在一参考点 r_0^* 作线性化处理, 则有

$$r_{iT} - r_{1T} = |r_0^* - r_i| - |r_0^* - r_1| + \left(\frac{\partial |r_0 - r_i|}{\partial r_0} - \frac{\partial |r_0 - r_1|}{\partial r_0} \right)^T \Bigg|_{r_0=r_0^*} \times (r_0 - r_0^*) + \varepsilon_i - \varepsilon_1, \quad i = 2, \dots, N. \quad (3)$$

把 (3) 式写成矩阵形式有

$$Hr = HD + HFR + H\varepsilon, \quad (4)$$

其中 $R = r_0 - r_0^*$, $r = (r_{1T}, r_{2T}, \dots, r_{NT})^T$,

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}_{(N-1) \times N}, \quad F = \begin{pmatrix} e_{x1} & e_{y1} & e_{z1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{xN} & e_{yN} & e_{zN} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} |r_0^* - r_1| \\ |r_0^* - r_2| \\ \vdots \\ |r_0^* - r_N| \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}.$$

F 中的第 i 行是由第 i 个收站指向参考点的单位矢量。

因为 $H\varepsilon$ 是一服从正态分布的随机向量, 协方差矩阵为 HP_eH^T , 则 r 的似然概率为

$$p(r|R) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(HP_eH^T)} \exp \left[-\frac{1}{2} (Hr - HD - HFR)^T \times (HP_eH^T)^{-1} (Hr - HD - HFR) \right]. \quad (5)$$

因此 R 的最大似然估计为

$$\hat{R} = (F^T H^T (HP_eH^T)^{-1} HF)^{-1} F^T H^T (HP_eH^T)^{-1} (Hr - HD) \\ = R + (F^T H^T (HP_eH^T)^{-1} HF)^{-1} F^T H^T (HP_eH^T)^{-1} H\varepsilon, \quad (6)$$

则 $E(\hat{R} - R) = 0$, \hat{R} 是一无偏估计, 其协方差矩阵为

$$P = E[(\hat{R} - R)(\hat{R} - R)^T] = (F^T H^T (HP_eH^T)^{-1} HF)^{-1}. \quad (7)$$

这里 E 表示数学期望。假定各收站测距的方差是一致的, $(\sigma_i^2 = \sigma^2, i = 1, \dots, N)$, 则将 H , F 代入 (7) 式得

$$P^{-1} = \frac{N}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \overline{e_x^2} - \overline{e_x}^2 & \overline{e_x e_y} - \overline{e_x} \cdot \overline{e_y} & \overline{e_x e_z} - \overline{e_x} \cdot \overline{e_z} \\ \overline{e_x e_y} - \overline{e_x} \cdot \overline{e_y} & \overline{e_y^2} - \overline{e_y}^2 & \overline{e_y e_z} - \overline{e_y} \cdot \overline{e_z} \\ \overline{e_x e_z} - \overline{e_x} \cdot \overline{e_z} & \overline{e_y e_z} - \overline{e_y} \cdot \overline{e_z} & \overline{e_z^2} - \overline{e_z}^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\overline{e_x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_{xi}^2$, $\overline{e_x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_{xi}$, $\overline{e_x e_y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_{xi} e_{yi}$, 其它类推, 因为 $e_{xi}^2 + e_{yi}^2 + e_{zi}^2 = 1$, $i = 1, \dots, N$, 所以有

$$\overline{e_x^2} + \overline{e_y^2} + \overline{e_z^2} = 1. \quad (9)$$

因为 ε 是正态分布, 所以 $\hat{R} - R$ 是一个零均值, 方差为 P 的正态分布。

2.2 定位精度的度量准则及其关系

有了测量误差的概率分布, 我们就可以根据它来度量其定位精度。常见的方法是用 GDOP 大小来度量。其定义为

$$\text{GDOP}^2 = E[(\hat{x} - x)^2 + (\hat{y} - y)^2 + (\hat{z} - z)^2] / \sigma^2 = \text{tr}(P) / \sigma^2. \quad (10)$$

这种度量准则是基于在 x, y, z 方向误差方差与测量方差之比, 给人一种非常直观的感觉, 但它不能建立与定位的置信度的直接关系。另一种度量准则是建立在等概率椭球面上。由上面的分析知, 定位误差矢量是一均值为零, 方差为 P 的正态分布, 因此其等概率面为 $\xi^T P^{-1} \xi = K$, 而目标落在这个面所围成的椭球内的概率为^[1] $p_e(K) = \text{erf}(\sqrt{K}/2) - (\sqrt{2K}/\pi) \exp(-K/2)$, 它只是 K 的函数。因此对于一给定的置信度 $p_e(K)$, 就可以得到一对应的 K 值; 而 P 一定的情况下, 给定 K 值就确定了误差椭球, 这误差椭球的体积就是我们衡量定位精度的另一种准则:

$$V = \frac{4}{3} \pi \sqrt{K^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{4}{3} \pi K^{3/2} |P|^{1/2}, \quad (11)$$

其中 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ 是 P 的特征值。 V 中与布局有关的只是 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, 因此我们在优化雷达站布局时, 就只要考虑如何使 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ 最小。因为 $\text{tr}(P) = \sum \lambda_i$, 所以 GDOP 准则是建立在特征值和的基础上, 这正是两种度量准则区别和联系之处。本文的分析都是以使误差椭球最小为基础来进行的。

3 圆形平面上的最优布局

由于通信距离和发射机功率的限制, 布站通常只能在围绕重点防御设施的有限区域内, 并且希望目标接近防御点时, 有更高的定位精度。这时的情景就如图 2 所示,

假设目标位于雷达站所能布置的圆形区域的正上方, 最远边界与 Z 轴夹角为 φ 。由 (11) 式知, 要使 V 达最小, 亦即使 $|P|$ 达最小或使 $|P^{-1}|$ 达最大。由 (8) 式可得

$$|P^{-1}| \leq \left(\frac{N}{\sigma^2}\right)^3 (\overline{e_x^2} - \overline{e_x}^2)(\overline{e_y^2} - \overline{e_y}^2)(\overline{e_z^2} - \overline{e_z}^2) \leq \left(\frac{N}{\sigma^2}\right)^3 (\overline{e_x^2})(\overline{e_y^2})(\overline{e_z^2} - \overline{e_z}^2). \quad (12)$$

因为 $|P^{-1}|$ 是一正定矩阵, 由哈达玛不等式, 第一不等式是成立的, 并且等式成立的充要条件为

$$\overline{e_x e_y} - \overline{e_x} \cdot \overline{e_y} = \overline{e_x e_z} - \overline{e_x} \cdot \overline{e_z} = \overline{e_y e_z} - \overline{e_y} \cdot \overline{e_z} = 0. \quad (13)$$

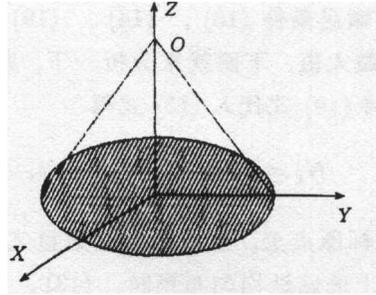


图2 圆形平面上的优化布局

第二个不等式中等式成立的充要条件为

$$\bar{e}_x = \bar{e}_y = 0. \quad (14)$$

另外从图2中可以看出 $\cos(\varphi) \leq e_{zi} \leq 1$, 显然当 \bar{e}_z 一定, e_{zi} 取两端点值时, 其均方差 $\bar{e}_z^2 - \bar{e}_z^2$ 取最大值. 设取为 1 是有 N_1 个收站, 取值为 $\cos(\varphi)$ 有 $N - N_1$ 个收站, 则有

$$N_1 + (N - N_1) \cos(\varphi) = e_z N, \quad N_1 = N(\bar{e}_z - \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)^{-1}. \quad (15)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \bar{e}_z^2 - \bar{e}_z^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (e_{zi} - \bar{e}_z)^2 \leq \max \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (e_{zi} - \bar{e}_z)^2 \right] \\ &= \frac{N_1}{N} (1 - \bar{e}_z)^2 + \frac{N - N_1}{N} (\bar{e}_z - \cos \varphi)^2 = (1 - \bar{e}_z)(\bar{e}_z - \cos \varphi). \end{aligned} \quad (16)$$

因此存在一 φ' , ($0 \leq \varphi' \leq \varphi$) 满足

$$\bar{e}_z^2 - \bar{e}_z^2 = (1 - \bar{e}_z)(\bar{e}_z - \cos \varphi'). \quad (17)$$

由(9)式和(17)式, (12)式可写为

$$\begin{aligned} |P^{-1}| &= \left(\frac{N}{\sigma^2} \right)^3 (\bar{e}_x^2) (\bar{e}_y^2) (\bar{e}_z^2 - \bar{e}_z^2) = \left(\frac{N}{\sigma^2} \right)^3 \left[(1 + \cos \varphi')(1 - \bar{e}_z) - \bar{e}_y^2 \right] \bar{e}_y^2 (1 - \bar{e}_z) (\bar{e}_z - \cos \varphi') \\ &\leq \max_{\substack{\cos \varphi' \leq \bar{e}_z \leq 1 \\ 0 \leq \bar{e}_y^2 \leq (1 + \cos \varphi')(1 - \bar{e}_z)}} \left\{ \left(\frac{N}{\sigma^2} \right)^3 \left[(1 + \cos \varphi')(1 - \bar{e}_z) - \bar{e}_y^2 \right] \bar{e}_y^2 (1 - \bar{e}_z) (\bar{e}_z - \cos \varphi') \right\} \\ &= (N/\sigma^2)^3 (27/256) \sin^4(\varphi') \sin^4(\varphi'/2) \leq \max_{0 \leq \varphi' \leq \varphi} (N/\sigma^2)^3 (27/256) \sin^4(\varphi') \sin^4(\varphi'/2) \\ &= \begin{cases} (N/\sigma^2)^3 (27/256) \sin^4(\varphi) \sin^4(\varphi/2), & \varphi < \cos^{-1}(-1/3); \\ (N/\sigma^2)^3 (1/27), & \varphi \geq \cos^{-1}(-1/3). \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

(18)式中后两个不等式等号成立的条件为

$$\bar{e}_z = 0.25 + 0.75 \cos \varphi, \quad (19)$$

$$\bar{e}_y^2 = 0.5(1 + \cos \varphi)(1 - \bar{e}_z) = (3/8)(1 - \cos^2 \varphi). \quad (20)$$

从上面的讨论可以看出, 只要满足条件 (13), (14), (19), (20) 式, 不等式 (18) 式中的等号均成立, 即 $|P^{-1}|$ 可达到其最大值. 下面就来分析一下, 收站如何布局才能满足条件 (13), (14), (19) 和 (20) 式, 首先将 (19) 式代入 (15) 式得

$$N_1 = N/4, \quad N_2 = 3N/4, \quad (21)$$

即当收站全部布置在边界和坐标原点上, 且他们的站数目之比为 3:1 时, (16), (19) 式均得到满足. 此外不难验证当边界上的站址均匀布局时, (13), (14) 式条件一定成立, 均匀布局是个充分条件而不是必要条件, 因为当两个相同边界条件的最优子布局合并时, 边界上两个子布局之间站的相对位置可以任意确定, 一样满足全局最优. 有了满足 (13), (14), (21) 式的前提, (20) 式也易证一定成立. 因此由上面的分析, 我们得到以下几点平面布局的基本准则.

(1) 当 $\varphi < \cos^{-1}(-1/3)$ 时, 收站除中心点外, 均落在边界上.

(2) 边界上站的数目与中心的站数之比应为 3:1, 而且与 φ , 即边界大小无关, 这一点不同于文献 [3] 的结论, 极大地方便了布局.

(3) 边界上站址均匀布置时, 一定能满足最优条件, 但不唯一.

4 计算结果和分析

根据上面的分析, 我们分别以 4 站 (图 3), 8 站 (图 4) 为例作最优布局. 图中横坐标为目标水平距离 R , 纵坐标是误差椭球的体积 V , 计算的条件为站域半径为 10km, 目标定位信度为 95%, 各站测距方差 $\sigma^2 = 0.5\text{m}^2$, 目标以 25° 和 75° 攻击角沿 X 轴从高空向原点被攻击目标逼近. 其中图 3, 图 4 中虚线是攻击角 75° 的计算结果, 实线是 25° 计算结果.

由图 3 可以看出, 当站数为 4, R 为 5km 时, 25° 攻击角下定位误差椭球体积近似等于半径为 2.7m 的球的体积; 75° 时, 当 R 为 2km 时, 定位误差椭球体积近似等于半径为 2.7m 的球的体积. 当站数为 8, R 为 5km 时, 25° 攻击角下定位误差椭球体积近似等于半径为 2m 的球的体积. 由此可见站数越多精度越高. 此外我们还发现近距离时, 75° 攻击角下定位精度高于 25° 攻击角, 而远距离则相反. 这是因为近距离时, 两者高度相差不大, 而 75° 的情况下其 $\overline{e_x^2} - \overline{e_z^2}$ 大于 25° 时的值, 而当距离较远时, 对于 75° 攻击角情况由于目标迅速升高, 其等效 φ 角变小, 所以误差增大.

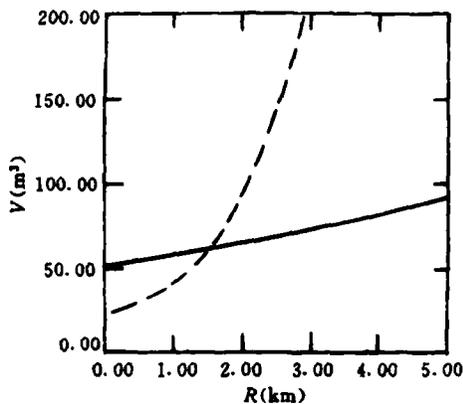


图 3

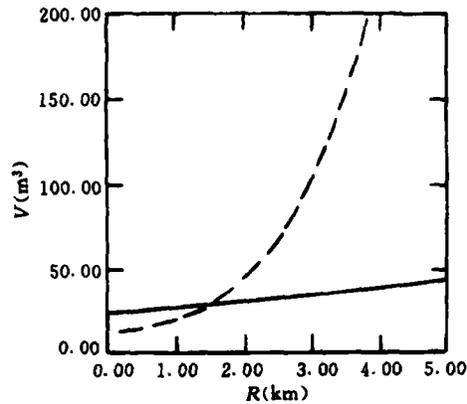


图 4

从上面的分析和计算结果可以看出, 依靠距离差来定位在最优布局下可以得到较高的定位精度。以上的分析是针对单次测量而言的, 对于多次测量, 或运动目标, 只要机动不是很大, 那么运用卡尔曼滤波还可以进一步提高定位精度。因此该分析结果对近程防御系统多传感器的布局有一定的参考价值。

参 考 文 献

- [1] Torrieri D J. Statistic theory of passive location system. *IEEE Trans. on AES*, 1983, 20(2): 183-198.
- [2] Lee H B. A novel procedure for assessing the accuracy of hyperbolic multilateration systems. *IEEE Trans. on AES*, 1975, 11(1): 2-15.
- [3] Becker K. An efficient method of passive emitter location. *IEEE Trans. on AES*, 1992, 28(4): 1091-1014.
- [4] Lee H B. Accuracy limitations of hyperbolic multilateration systems. *IEEE Trans. on AES*, 1975, 11(1): 16-29.

CONSTELLATION AND LOCATION ACCURACY ANALYSIS OF MULTISTATIC RADARS BASED ON RANGE DIFFERENCES

Yin Chengyou Xu Shanjia Wang Dongjin

(*University of Science and Technology of China, Hefei 230027*)

Abstract The probability distribution of the location error based on range differences is presented first. After having the relationship between two common criteria for measuring location accuracy and the error covariance matrix, the optimal constellation is obtained for the case in which the radars are constrained in a symmmetic area to locate a target in space by use of the minimum error ellipsoid criterion. Finally, some calculation results are given.

Key words Multistatic radar, Data fusion, Radio positioning

尹成友: 男, 1964年生, 讲师, 博士生, 现从事雷达系统和微波技术专业的科研工作.

徐善驾: 男, 1939年生, 教授, 博士生导师, 现从事电磁场与微波技术专业的教学和科研工作.

王东进: 男, 1955年生, 付教授, 现从事电磁场与微波技术专业的教学和科研工作.