

具有紧支撑对偶的内插子波¹

水鹏朗 保 锋

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 本文构造了具有紧支撑对偶的内插子波。与已有的内插子波相比,它可以通过 FIR 滤波器组进行快速分解和重构,并且设计上具有更大的灵活性。最后,实验结果表明它还具有良好的去噪性能。

关键词 内插子波,内插滤波器,双正交性,对偶

中图分类号 TN911.7

引 言

把内插理论与子波、多分辨分析相结合, G.Deslauriers, S. Dubuc^[1,2], D.L.Donoho^[3], W.Sweldens^[4], A.Harten^[5] 建立了内插子波的基本框架。内插子波可分为两大类:内插样条子波和 Donoho^[3,4] 型内插子波。前者是非紧支撑的,目前研究主要集中于后一类。

在细分方法的研究中(subdivision scheme), Deslauriers 和 Dubuc 构造了一类应用极为广泛的基本内插函数。它们是对称的紧支撑内插尺度函数,满足:

$$\varphi_D(x) = \varphi_D(2x) + \sum_{k=-(D-1)/2}^{(D+1)/2} h_D(k)\varphi_D(2x - 2k + 1), \quad (1)$$

$D = 1, 3, 5, \dots$, h_D 是 $D + 1$ 阶 Deslauriers-Dubuc 对称内插滤波器。

$$h_D(k) = \prod_{l=-(D-1)/2, l \neq k}^{(D+1)/2} \frac{2l-1}{2(l-k)}, \quad k = -(D-1)/2, -(D-1)/2 + 1, \dots, (D+1)/2. \quad (2)$$

(1) 式的尺度函数具有 $D + 1$ 阶可和性^[6] 并且满足^[7]:

$$x^d = \sum_k k^d \varphi_D(x - k), \quad d = 0, 1, \dots, D. \quad (3)$$

以 $\psi_D(x) = \varphi_D(2x - 1)$ 作为子波函数, Donoho 构造了 Donoho 子波,实质上,这仅是一个内插多分辨分析,因为子波函数不具有一阶消失矩。在此基础上,通过提升方法 Sweldens 构造了改进的 Donoho 子波,这些都称为 Donoho 型子波。利用 Daubechies 正交子波的自相关函数, N.Saito 和 G.Beylkin^[8] 构造了适用于非下采样的内插子波,相应的子波为 Daubechies 正交子波的自相关函数

$$\psi_D(x) = 2\varphi_D(2x) - \varphi_D(x) = 2\varphi_D(2x) - \sum_n h_D(n)\varphi_D(2x - 2n + 1), \quad (4)$$

¹ 1998-02-24 收到, 1998-11-26 定稿

它具有 $D+1$ 阶消失矩和非紧支撑对偶。

针对现有内插子波的不足, 本文构造设计上具有更大灵活性的新型内插子波, 一般内插子波, 它是具有紧支撑对偶的双正交内插子波系统。

2 一般内插子波

一般内插子波是 Donoho 型子波的推广, 可以描述如下:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(2x) + \sum_m h(m)\varphi(2x - 2m + 1), \\ \psi(x) &= 2\varphi(2x - 1) - \sum_m g(m)\varphi(x - m),\end{aligned}\quad (5)$$

h 和 g 是一对内插滤波器。该子波系统的尺度函数, 子波函数及对偶完全由 h, g 决定。 $g = 0$ 时, (5) 式表示 Donoho 内插子波。

子波函数的消失矩和尺度函数的多项式表示阶数是一个子波系统的重要性能指标, 等价于要求内插滤波器 h, g 满足一些线性约束。有下面结论成立:

定理 1 (5) 式的子波函数具有 $D+1$ 阶消失矩和内插尺度函数 $D+1$ 阶可和的充要条件为

$$\sum_m m^d h(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^d, \quad \sum_m m^d g(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^d, \quad d = 0, 1, 2, \dots, D. \quad (6)$$

证明见附录。

一般内插子波 ($h = g = h_D$) 与文献 [8] 的内插子波相比, 时域局部化特性有一些下降 (见表 1)。一般内插子波时频局部性虽有一些下降, 但它的对偶是紧支撑的, 并且设计上具有更大的灵活性。下面研究它的对偶及其性质。

表 1 文献 [6] 的内插子波与一般内插子波时宽带宽积的比较

消失矩阶数	4	6	8	10
文献 [6] 的子波	1.1204	1.0785	1.0759	1.0808
一般内插子波	1.2525	1.2326	1.2467	1.2671

3 对偶及其性质

一般内插子波的对偶尺度和子波函数都是紧支撑的, 并且当 (5) 式是线性相位时, 对偶亦然。

定理 2 (5) 式的一般内插子波的对偶是紧支撑的, 并且满足双尺度方程:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) &= 2\tilde{\varphi}(2x) + \sum_m \tilde{g}(-m)\tilde{\psi}(x - m), \\ \tilde{\psi}(x) &= \tilde{\varphi}(2x - 1) - \sum_m \tilde{h}(1 - m)\tilde{\varphi}(2x - 2m),\end{aligned}\quad (8)$$

这里 \bar{h}, \bar{g} 分别表示 h, g 的复共轭.

由 (5) 式和 (8) 式, 它们的尺度函数的两尺度符号以及子波的“符号”分别为

$$\begin{aligned} P(z) &= (1/2)(1 + z^{-1}A(z^2)), & Q(z) &= z - (1/2)B(z)P(z), \\ \tilde{Q}(z) &= (1/2)z(1 - z\bar{A}(z^{-2})), & \tilde{P}(z) &= 1 + (1/2)z\bar{B}(z^{-1})\tilde{Q}(z), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $A(z) = \sum_m h(m)z^m$, $B(z) = \sum_m g(m)z^m$.

容易得到:

$$\begin{aligned} P(z)\overline{\tilde{P}(z)} + P(-z)\overline{\tilde{P}(-z)} &= 1, & |z| &= 1, \\ Q(z) &= z\overline{\tilde{P}(-z)}K(z^2), \\ \overline{\tilde{Q}(z)} &= z^{-1}P(-z). \end{aligned} \quad (10)$$

由文献 [9] 的定理 5.19, (5) 式和 (8) 式构成了双正交子波系统并且 (8) 式具有紧支撑. 其中 $\overline{A(z)} = \bar{A}(1/z)$, \bar{A} 表示对多项式系数取复共轭.

定理 3 如果 (5) 式中的尺度函数 $D+1$ 阶可和且子波具有 $D+1$ 阶消失矩, 则它的对偶尺度函数 $D+1$ 阶可和且对偶子波具有 $D+1$ 阶消失矩.

证明 由于 (5) 式的内插尺度函数 $D+1$ 阶可和, 即 $P(z) = [(1+z)/2]^{D+1}R(z)$, $R(1) = 1$ 所以, $\tilde{Q}(z) = \overline{z^{-1}P(z)} = [(1-z)/2]^{D+1}z^{-D}\bar{R}(-1/z)$, $\tilde{Q}(z)$ 包含因子 $[(1-z)/2]^{D+1}$, 对偶子波具有 $D+1$ 阶消失矩. 用类似方法可以证明对偶尺度函数 $D+1$ 阶可和.

可以看出, 内插尺度函数的可和性阶数等于对偶子波的消失矩阶数; 而对偶尺度函数的可和性阶数等于子波的消失矩阶数. 例如, Donoho 子波的对偶尺度函数是 $\delta(x)$, 满足 $\tilde{\varphi}(x) = 2\tilde{\varphi}(x)$; 对应的滤波器为下 2 采样、频域局部性极差.

4 分解和综合算法

与紧支撑正交子波相类似, 对偶具有紧支撑的内插子波的分解和综合算法可以通过 FIR 滤波器和塔型算法有效实现. 设

$$\begin{cases} \varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^jx - k) \\ \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k) \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} \tilde{\varphi}_{j,k}(x) = 2^{j/2}\tilde{\varphi}(2^jx - k), \\ \tilde{\psi}_{j,k}(x) = 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^jx - k), \end{cases}$$

$V_j \equiv \text{Close}_{L^2R}\{\varphi_{j,k} : k \in Z\}$, $W_j \equiv \text{Close}_{L^2R}\{\psi_{j,k} : k \in Z\}$ 表示综合尺度与子波空间序列, $\forall f(x) \in L^2(R)$, 它在综合尺度和子波空间的投影系数, 也就是分解算法的低通和高通输出, 即

$$c_k^j(f) = 2^{j/2} \int f(x)\tilde{\varphi}(2^jx - k)dx, \quad d_k^j(f) = 2^{j/2} \int f(x)\tilde{\psi}(2^jx - k)dx. \quad (11)$$

分解和综合算法如下:

(1) 初始化 对于非内插尺度函数, 直接用采样值代替投影系数往往产生较大 Mallat 误差. 为此, 多种降低 Mallat 误差的预滤波方法被提出. 而内插尺度函数的优点在于: 直接用采样值进行初始化, 仅有逼近误差而不存在 Mallat 误差, 即若 $f(x) \in V_j$ 时,

$$c_k^j(f) = 2^{-j/2} f(k/2^j). \quad (12)$$

(2) 分解算法 对 $j < J$

$$\left. \begin{aligned} d_k^{j-1}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_{2k+1}^j(f) - \sum_m \bar{h}(1-m)c_{2k+2m}^j(f)], \\ c_k^{j-1}(f) &= \sqrt{2}c_{2k}^j(f) + \sum_m \bar{g}(-m)d_{k+m}^{j-1}(f). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(3) 综合算法 对 $j \leq J$

$$\left. \begin{aligned} c_{2k}^j(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_k^{j-1}(f) - \sum_m \bar{g}(-m)d_{k+m}^{j-1}(f)], \\ c_{2k+1}^j(f) &= \sqrt{2}d_k^{j-1}(f) + \sum_m \bar{h}(1-m)c_{2k+2m}^j(f), \\ f(x) &= 2^{J/2} \sum_k c_k^J(f)\varphi(2^J x - k). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

5 去噪性能比较

子波去噪是最近子波应用的一个热点^[10]. 该方法通过子波系数域的阈值处理实现保留信号的主分量, 剔除杂散的噪声分量. 门限设置是处理的关键之一, 现有的方式有硬门限, 软门限以及各种混合门限方法. 有时, 也采用了 Donoho 内插子波模式^[11]. 传统方法中多采用正交子波系统, 一般内插子波用于信号去噪可以说是一个新的尝试. 由于分解等效滤波器组的 2-范数不等于 1, 门限的设置变成了问题的关键. 为此, 我们先计算各等效滤波器组的 2-范数, 对各层系数进行归一化处理, 然后进行统一门限进行阈值处理. 以硬门限方法为例, 去噪过程可描述如下:

信号分解 对信号进行分解得到分解系数 $\{d_k^j, J_0 \leq j < J, c_k^{J_0}\}$.

系数归一化处理 按照文献 [11] 的定义, 计算各层高通等效滤波器 eh^j 的 2-范数, 然后, 子波系数归一化,

$$\bar{d}_k^j(f) = (\|eh^j\|_2)^{-1} d_k^j(f). \quad (15)$$

类似可以对逼近系数 $c_k^{J_0}(f)$ 进行归一化.

阈值处理

$$\bar{d}_k^j(f) = \begin{cases} \|eh^j\|_2 \bar{d}_k^j, & |\bar{d}_k^j(f)| \geq T, \\ 0, & |\bar{d}_k^j(f)| < T. \end{cases} \quad (16)$$

在高斯白噪声背景下, 可以通过第一层子波系数的中值估计获得噪声的标准差, 然后由标准差设置门限 T , 细节参见文献 [12].

信号重构 从阈值处理过的系数重构信号 \bar{f} .

比较系统 1: 具有 $h = g = [-1/16, 9/16, 9/16, -1/16]$ 的一般内插子波; 系统 2: Donoho 子波 ($h = [-1/16, 9/16, 9/16, -1/16], g = 0$); 系统 3: 4 阶正交的 Daubechies 子波的去噪性能. 测试信号为“Doppler”信号(来自 Wavelab5.0).

图 1(b) 中, ‘o’, ‘x’ 和 ‘*’ 分别表示一般内插子波, Donoho 内插子波和 4 阶 Daubechies 子波去噪的输入输出信噪比. 可以看出一般内插子波和相同消失矩的正交子波相当. 一般内插子波不需要预滤波和后滤波处理, 计算复杂度低. 并且由于内插尺度函数比 Daubechies 尺度函数具有更高的正则度, 因而重构信号更为光滑. 而 Donoho 内插子波由于对偶尺度函数频域特性很差, 几乎不能用于信号去噪. 另一个潜在的优势是一般内插小波设计上具有更大的灵活性, 滤波器 h, g 的优化选择将会进一步改善去噪性能.

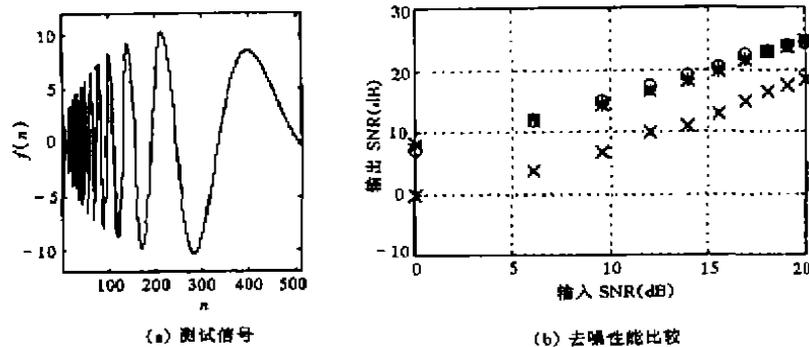


图 1 去噪性能的比较

6 结果和讨论

子波分解算法的初始化中, 怎样有效地消除 Mallat 误差一直是倍受关注的研究热点. 内插子波的设计是一个有效的途径, 它能够完全消除 Mallat 误差, 但目前的研究对子波以及其对偶性质讨论甚少. 本文构造的一般的内插子波系统, 由两个内插滤波器确定, 设计上具有很大的灵活性.

这对一般内插子波系统的优化设计是极其有用的. 例如, 正则度(本身及对偶的)、冗余度的优化设计, 信号自适应双正交递归内插子波系统^[13]的构造都打下了一个良好的基础.

附 录

定理 1 的证明 由 $\sum_m m^d h(m) = (\frac{1}{2})^d, d = 0, 1, 2, \dots, D$, 容易得到

$$\sum_m h(m) = 1, \quad \sum_m (-1)^{2m+1} (2m-1)^d h(m) = 0, \quad d = 1, \dots, D.$$

根据可和性的充分条件^[6]得: (6) 式尺度函数的整数平移能够表示 n 次代数多项式, 即 $\sum k^d \varphi(x-k)$ 为一个 d 次多项式. 由 φ 的内插性, 即 $\varphi(k) = \delta(k)$, $\sum k^d \varphi(x-k) = x^d, d = 0, 1, \dots, D$. 并且

$$P(\omega) = (1/2)(1 + \sum_m h(m) \exp(j(2m-1)\omega)) = 1 + \omega^{D+1}Q(\omega),$$

其中 $Q(\omega)$ 连续且 $Q(0) \neq 0$ 。

从而 $\hat{\varphi}(\omega) = a \prod_{l=1}^{\infty} P(\omega/2^l)$ 满足 $\frac{d^d \hat{\varphi}(\omega)}{d\omega^d} |_{\omega=0} = 0, \quad d = 1, 2, \dots, D$ 。于是 $\int \varphi(x) dx = c \neq 0, \quad \int x^d \varphi(x) dx = 0, \quad d = 1, 2, \dots, D$,

$$\begin{aligned} \int x^d \psi(x) dx &= 2 \int x^d \varphi(2x-1) dx - \sum_m g(m) \int x^d \varphi(x-m) dx \\ &= c(1/2)^d - c \sum_m m^d g(m) = 0, \quad d = 0, 1, 2, \dots, D, \end{aligned}$$

定理 1 的充分性得证。

内插尺度函数能够表示 d 次多项式时, 则 $\sum k^d \varphi(x-k) = x^d, \quad d = 0, 1, \dots, D$, 并且满足自激双尺度方程:

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \sum_m \varphi(m+1/2) \varphi(2x-2m+1),$$

$$\begin{aligned} \sum m^d h(m) &= \sum m^d \varphi(m-1/2) = (-1)^d \sum_m m^d \varphi(-1/2-m) \\ &= (-1)^d (-1/2)^d = (1/2)^d, \quad d = 0, \dots, D. \end{aligned}$$

因此, 由于子波函数具有 $D+1$ 阶消失矩,

$$\begin{aligned} \int x^p \psi(x) dx &= 2 \int x^p \varphi(2x-1) dx - \sum_m g(m) \int x^p \varphi(x-m) dx \\ &= c(0.5)^p - c \sum_m m^p g(m) = 0. \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] Dubuc S. Interpolation through an iterative scheme. *J. of Math. Anal. and Appl.*, 1986, 114: 185-204.
- [2] Deslauriers G, Dubuc S. Symmetric iterative interpolation processes. *Constr. Approx.*, 5: 49-68.
- [3] Donoho L D. Interpolating wavelet transform. Preprint, Department of Statistics, Stanford University, 1992.10.
- [4] Sweldens W. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1996, 3(2): 186-200.
- [5] Harten A. Multiresolution representation of data: a general framework. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1996, 33(3): 1205-1256
- [6] Krantz G S. (editor), *Wavelet: Mathematics and Applications*. Florida, U.S.A: CRC Press, 1994, Chapter4: 185-186.
- [7] Sweldens W, Schroder P. Building your own wavelets at home. Technical Report 1995. 5, Department of Math. Univ. of Carolina.

- [8] Saito N, Beylkin G. Multiresolution representations using the autocorrelation functions of compactly supported wavelets. *IEEE Trans. on SP*, 1993, SP-41(12): 3584–3590.
- [9] 崔锦泰 (著), 程正兴 (译), 小波分析导论. 西安: 西安交通大学出版社, 1994, 189–206
- [10] Donoho L D. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. on. IT*, 1995, IT-41(3): 613–627.
- [11] 石卓尔. 子波信号检测与区间内插子波: [博士论文]. 西安: 西安电子科技大学, 1997.2.
- [12] Johnstone M I, Silverman W B. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise. Technical report, Dept. of Statistics Stanford Univ., 1996.8.
- [13] Shui Penglang, Bao Zheng. Signal-adapted biorthogonal interpolating recursive wavelet. *Electron. Lett.*, 1998.10, 34(20): 1920–1921.

INTERPOLATING WAVELETS WITH COMPACTLY SUPPORTED DUALS

Shui Penglang Bao Zheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract This paper constructs a family of compactly supported interpolating wavelets with compactly supported duals. Comparing with the existed interpolating wavelets, the new wavelets are greater flexible in design and the decomposition and synthesis algorithms can be realized completely by using FIR filter banks. Finally, the test results show that they perform well in denoising.

Key words Interpolating wavelet, Interpolating filter, Biorthogonality, Duals

水鹏朗: 男, 1967年生, 讲师, 博士生, 研究兴趣为: 子波变换及其应用, 宽带超宽带雷达信号处理, 分形理论及其应用.

保铮: 男, 1927年生, 教授, 中国科学院院士, 中国电子学会会士, 主要研究领域: 雷达信号处理.