

双环网 $D(N, h)$ 的最短路径选择算法¹

刘焕平 朱延功* 杨义先

(北京邮电大学信息安全中心 北京 100876)

*(哈尔滨工业大学机器人研究所 哈尔滨 150006)

摘 要 双环网是分布式系统常用的一种拓扑结构。它的寻径问题是人们关心的主要问题之一。本文给出了一个求双环网中任意两个节点间的最短路径算法, 此算法所需时间为 $O(\Delta)$, 其中 Δ 是该网络的直径。

关键词 双环网络, 最短路径, 算法

中图号 TN913.2

1 引 言

双环网是分布式系统常用的一种网络, 它的最优寻径问题仍未很好地解决。一个规模为 N , 跨度为 $h(2 \leq h \leq N-1)$ 的双环网络可以这样描述: 它是一个具有 N 节点 $0, 1, \dots, N-1$ 的有向图, 从每个节点 i 出发有两条边: $i \rightarrow i+1(\text{mod } N)$ 和 $i \rightarrow i+h(\text{mod } N)$, 其中 $0 \leq i \leq N-1$ 。为方便起见, 我们把这个网络简记为: $DL(N, h)$, 同时简记边 $i \rightarrow i+1(\text{mod } N)$ 为 $[+1]$ -边, 边 $i \rightarrow i+h(\text{mod } N)$ 为 $[+h]$ -边。显然, 图 1 是一个 $DL(8, 3)$ 。

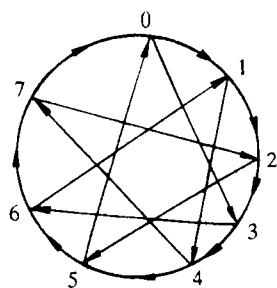


图 1 $DL(8, 3)$

关于双环网络, 文献 [1,2] 分别讨论了 $DL(N, N-1)$ 和 $DL(N, N-2)$ 的直径和可靠性; 文献 [3,4] 对 $DL(N, N-[N])$ 的拓扑性质和寻径控制作了详细的分析; 文献 [5] 对 $2 \leq h \leq \sqrt{N}+1$ 的双环网络 $DL(N, h)$ 给出了一个求任意节点对间的最短路径的好算法; 对一般的 $DL(N, h)$, 文献 [6] 给出了一个时间为 $O(\Delta)$ 的最短路径算法, 但经分析该算法所依赖的一个主要定理 (文献 [6] 中的定理 2) 可能是错误的, 因此该算法是不可靠的。本文针对一般的双环网络 $DL(N, h)$ (此处 h 无特别限制), 给出了一个新的时间为 $O(\Delta)$ 的最短路径算法, 其中 Δ 为该网络的直径。该算法经过严格推导, 是可靠的。

2 最短路径算法

在网络通信中通常都要求通信时间越短越好。把网络视为一个图, 并假定两个相邻节点间的通信时间相同, 则最短通信时间问题在图论中就归结为任意两个节点间的最短路径问题。下面就来讨论双环网络 $DL(N, h)$ 的最短路径问题。注意到双环网络在拓扑结构上的对称性, 我们只须考察从节点 0 到其它节点的最短路径。文献 [5] 给出了下述引理。

¹ 1997-09-05 收到, 1998-03-27 定稿
国家自然科学基金资助课题

引理 1^[5] 从节点 0 出发, 无论以什么顺序经过 x 条 $[+h]$ -边 和 y 条 $[+1]$ -边 都到达同一终点 v , 并且 $v = xh + y(\text{mod } N)$ 。

易见引理的逆命题也成立, 即对节点 v , 若有 $v = xh + y(\text{mod } N)$, 则必有从节点 0 到节点 v 的路径, 其中含有 x 条 $[+h]$ -边 和 y 条 $[+1]$ -边。

在双环网 $DL(N, h)$ 中, 我们记从节点 0 到节点 v 的含有 x 条 $[+h]$ -边 和 y 条 $[+1]$ -边的路径为 $x[+h] + y[+1]$ 。由上述讨论可知: 节点 0 到节点 v 的最短路径的长度 $d(0, v) = \min\{x + y : v = xh + y(\text{mod } N), x, y \geq 0\}$ 。

引理 2 设 $v = kh + r$, $0 \leq r < h$ 。如 $x[+h] + y[+1]$ 是节点 0 到节点 r 的一条最短路径, 则 $(x + k)[+h] + y[+1]$ 是节点 0 到节点 v 的一条最短路径。

证明 设 $x_0[+h] + y_0[+1]$ 是 0 到 v 的一条最短路径, 则必有 $y_0 < h$ (否则 $(x_0 + 1)[+h] + (y_0 - h)[+1]$ 为 0 到 v 的更短的路径, 这与 $x_0[+h] + y_0[+1]$ 是最短路径矛盾!), 进而必有 $x_0 \geq k$ (否则, 由 $x_0 < k$ 和 $y_0 < h$ 可得 $0 \leq x_0h + y_0 \leq (k - 1)h + y_0 < kh \leq v$, 故有 $x_0h + y_0(\text{mod } N) \neq v$, 这与 $x_0[+h] + y_0[+1]$ 是 0 到 v 的一条路径矛盾!)。

由 $x[+h] + y[+1]$ 是 0 到 r 的一条最短路径可知: $xh + y \equiv r(\text{mod } N)$, 进而 $v = (x + k)h + y(\text{mod } N)$, 即 $(x + k)[+h] + y[+1]$ 是 0 到 v 的一条路径。由于 $x_0[+h] + y_0[+1]$ 是 0 到 v 的一条最短路径, 故有

$$(x + h) + y \geq x_0 + y_0. \quad (1)$$

另一方面, 由 $x_0 + y_0 \equiv v(\text{mod } N)$ 和 $v = kh + r$ 可得

$$(x_0 - k)h + y_0(\text{mod } N) = r. \quad (2)$$

因 $x_0 \geq k$, 故由 (2) 式可知 $(x_0 - k)[+h] + y_0[+1]$ 是 0 到 r 的一条路径, 再由 $x[+h] + y[+1]$ 是 0 到 r 的一条最短路径, 故有

$$(x_0 - k) + y_0 \geq x + y, \quad \text{即} \quad x_0 + y_0 \geq (x + k) + y.$$

从而再由 (1) 式可得

$$(x + k) + y = x_0 + y_0,$$

即 $(x + k)[+h] + y[+1]$ 也是 0 到 v 的一条最短路。

证毕

由引理 2 可知, 欲求 0 到其它任意节点 v 的最短路径 ($0 \leq v \leq N - 1$), 知道 0 到任意节点 u ($0 \leq u < h$) 的最短路径即可。下面我们就来考查 0 到 u ($0 \leq u < h$) 的最短路径。

令

$$k_0 = \min\{k : j_k = kh(\text{mod } N), k > j_k, k = 1, 2, \dots, N - 1\},$$

$$V_0 = \{(k, j_k) : j_k = kh(\text{mod } N), j_k < h, k = 0, 1, \dots, k_0 - 1\}$$

设 V_0 中含有 r 个元素, 它的第 i 个元素记为 $(k(i - 1), j_k(i - 1))$, 即 $V_0 = \{(k(i - 1), j_k(i - 1)) : 1 \leq i \leq r\}$ 。令 $u_i = u - j_k(i)$, $w(i) = k(i)$ ($0 \leq i \leq r - 1$), $\bar{u} = \min\{u_i : u_i \geq 0, 0 \leq i \leq r - 1\}$, 并令与 $\bar{u}$ 相对应的 w_i 为 $\bar{w}$ 。例如: 设 $N = 39, h = 17, u = 9$, 则 $k_0 = 7, V_0 = \{(0, 0), (3, 12), (5, 7)\}$, 从而 $r = 0, (k(0), j_k(0)) = (0, 0), (k(1), j_k(1)) = (3, 12), (k(2), j_k(2)) = (5, 7), u_0 = 9 - 0 = 9, w_0 = 0, u_1 = 9 - 12 = -3, w_1 = 3, u_2 = 9 - 7 = 2, w_2 = 5, \bar{u} = u_2 = 2, \bar{w} = w_2 = 5$ 。

引理 3 设 $x[+h] + y[+1]$ 是 0 到 u 的一条最短路径, 则必有 $x < k_0$.

证明 如若不然, $x \geq k_0$, 则由 $j_{k_0} = k_0 h (\bmod N)$ 和 $xh + y (\bmod N) = u$ 可得 $(x - k_0)h + (y + j_{k_0}) (\bmod N) = u$, 即 $(x - k_0)[+h] + (y + j_{k_0})[+1]$ 是 0 到 u 一条路径. 再由 k_0 的定义知 $k_0 > j_{k_0}$, 从而

$$(x - k_0) + (y + j_{k_0}) < x + y.$$

这与 $x[+h] + y[+1]$ 是最短路径矛盾, 从而引理 3 得证.

证毕

定理 1 设 $DL(N, h)$ 是双环网络, $0 \leq u < h$, 则 $\bar{w}[+h] + \bar{u}[+1]$ 是 0 到 u 的一条最短路径.

证明 根据引理 3, 可设 $x[+h] + y[+1]$ 是 0 到 u 的一条最短路径, 且 $x < k_0$. 由 V_0 的定义可知: (1) 若 $1 \leq p < k_0$ 且 $(p, j_p) \notin V_0$, 则 $ps (\bmod N) \geq s$; (2) 若 $1 \leq p < k_0$ 且 $(p, j_p) \in V_0$, 则 $p[+h]$ 是 0 到 j_p 的最短路径. 从而由于 $x[+h] + y[+1]$ 是 0 到 u 的一条满足 $x < k_0$ 的最短路径和 $0 \leq u < h$ 可知: 存在 $(p, j_p) \in V_0$, 使 $x = p$. 进而再由 $\bar{u}$ 和 $\bar{w}$ 的定义可推知: $x = \bar{w}, y = \bar{u}$. 于是 $\bar{w}[+h] + \bar{u}[+1]$ 是 0 到 u 的一条最短路径. 证毕

利用定理 1 和引理 2 可以给出如下求节点 0 到其它任意节点 $u (0 < u \leq N - 1)$ 的最短路径的算法. $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

最短路径算法: Routing

Step1 置 $x_0 = \lfloor u/h \rfloor, u_0 = u - x_0 h, k = 0, w_0 = 0, u_1 = u_0, u_2 = 0$;

Step2 $k = k + 1, j_k = kh (\bmod N)$, 如果 $k > j_k$, 则转 Step5;

Step3 如果 $j_k > u_0$, 则转 Step2; 否则置 $u_2 = u_0 - j_k$;

Step4 如果 $u_1 \leq u_2$, 则转 Step2; 否则置 $u_1 = u_2, w_0 = k$, 并转 Step2;

Step5 输出 $(x_0 + w_0)[+h] + u_1[+1]$, 并终止算法.

图 2 给出了该算法的流程图, 该算法所需时间为 $O(k_0)$. 设 Δ 是 $DL(N, h)$ 的直径, $x[+h] + y[+1]$ 是节点 0 到节点 u 的一条最短路径, 则必有 $x \leq \Delta$. 因此上述算法再时间上还可以进一步缩短, 此时只须将算法中的 Step2 修改为如下的 Step2' 即可.

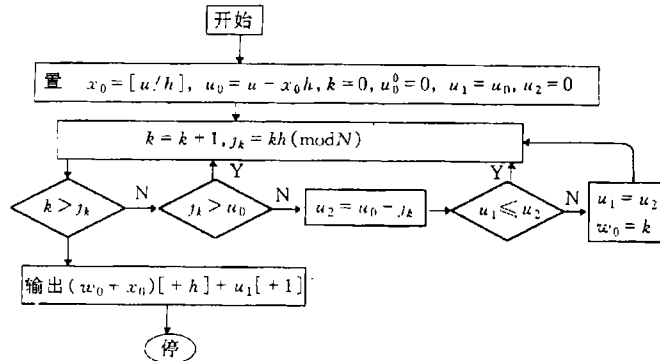


图 2 最短路径算法框图

Step2': 若 $k > \Delta$, 则转 Step5; 否则, 置 $k = k + 1, j_k = kh (\bmod N)$; 如果 $k > j_k$, 则转 Step5.

修改后的算法所需时间为 $O(\delta)$, 其中 $\delta = \min\{\Delta, k_0\}$. 故该算法所需时间不超过 $O(\delta)$.

例 1 在 $DL(39, 17)$ 中求节点 1 到节点 27 的最短路径。

解 求节点 1 到节点 27 的最短路径相当于求节点 0 到节点 26 的最短路径。此时有 $N = 39$, $h = 17$, $u = 26$, 利用最短路径算法 Routing, 经过 7 次运算可求得 0 到 26 的一条最短路径为: $6[+17] + 2[+1]$ 。从而 1 到 27 的一条最短路径为: 从 1 出发沿 $[+1]$ -边走 2 步再沿 $[+17]$ -边走 6 步即可。当然根据引理 1 也可按其它次序走。

3 结束语

本文针对一般的双环网络 $DL(N, h)$, 给出了一个求任意节点对间的最短路径的有效算法, 丰富了文献 [3-5] 在对 h 有所限制时得到的一些结果。

致谢 北京商儒信息技术有限公司对本项研究给予了大力支持, 特此感谢。

参 考 文 献

- [1] Liu MT, *et al.* Design of the distributed double-loop computer network(DDLCN). J. Digital System, 1988, 5(1): 3-37.
- [2] Grnarov A, Kleinrock L, Gerla M. A highly reliable distributed loop network architecture. In Proc. of Int. Symp. Fault-Tolerant Computing, U.S.A: 1988, 319-324.
- [3] Raghavendra C S, Gerla M, Avizienis A. Reliable loop topologies for local computer networks. IEEE Trans. on Comp., 1985, C-34(1): 46-54.
- [4] Raghavendra C S, Silvester J S. A survey of multiconnected loop topologies for local computer-networks. Computer Networks and ISDN Systems, 1986, 11(1): 29-42.
- [5] 冯斐玲, 金林钢. 一类双环网的特征分析及寻径控制. 计算机学报, 1994, 17(11): 859-865.
- [6] K. Mukhopadhyaya, B.P. Sinha. Fault-tolerant routing in distributed loop network. IEEE Trans. on Comp., 1995, C-44(): 1452-1456.

AN ALGORITHM FOR FINDING THE SHORTEST PATH IN DOUBLE-LOOP NETWORKS

Liu Huanping Zhu Yangong* Yang Yixian

(Dept. of Information Eng., Beijing University of Posts and Telecom., Beijing 100876)

*(Harbin Institute of Technology, Haerbin 150006)

Abstract Double-loop network has been one of the most popular topologies used in the distribution systems. An important problem is to find the shortest path between any two nodes in this kind of networks. This paper gives an $O(\Delta)$ time algorithm for finding the shortest path between any two nodes of the double-loop network.

Key words Double-loop network, Shortest path, Algorithm

刘焕平: 男, 1965 年生, 讲师, 博士生, 从事通信网理论及信息安全等方向的研究。

朱延功: 男, 1972 年生, 博士生, 哈尔滨工业大学机器人研究所。

杨义先: 男, 1961 年生, 教授, 博士生导师, 北京邮电大学信息安全中心主任, 全国政协委员, 现在的研究方向为编码理论, 现代密码学, 通信网理论, 网络信息安全等, 已发表论文 200 余篇, 专著五部。