

多端口无耗网络的广义测量方程***

邱长兴 梁昌洪 韩毅

(西安电子科技大学, 西安)

摘要 本文提出了一种多端口无耗网络的广义测量方程. 对二端口情况, 即梁昌洪等(1988)提出的三角方程. 并以 H 面 T 三端口情况为例进行了测量, 给出了实验结果.

关键词 微波测量; 多端口网络; S 参数

一、引言

通讯、雷达和遥感等领域的实际需要促进了测量理论与技术的迅速发展. 在微波领域中, 各种波段的扫频源、微机接口和自动测量技术已逐渐普及. 功率方程、反射计技术和多端口测量理论等方法则为实际计量提供了强有力的基础. 此外, 近年来国内很多学者开始重视和发展数据处理并付诸实用^[1-7]. 从大量实践中人们已体会到只有当硬件设备、理论方法和数据处理齐头并进时, 才能产生真正的近代测量技术.

在微波网络 S 参数测量中, 有一个问题很值得重视: 即一方面工程中愈来愈多地采用多端口元件(三、四, 甚至更多端口), 而另一方面却没有完整的多端口元件测量理论. 通常的网络分析仪也是以二端口元件为对象的. 一般认为, 只要多端口中若干端口接上负载, 总可以简化成二端口. 这种测量方法需要不断地转换端口, 且带来了负载误差, 它与近代测量极不相称. 本文把现有的二端口滑动短路负载测量法, 推广到一般多端口情况. 当 $i = 2, 3, \dots, n$ 端口接已知负载 Γ_i 时, 可以通过获取端口 1 的反射 Γ_1 信息求得网络 S 参数. 特别在无耗情况下, 导出了多端口广义测量方程, 从而给出了一种不要转换端口的多端口测量方法.

二、多端口广义测量方程

假定所研究的 n 端口元件是一线性网络, 用 $[S]$ 参数表示, 其中, $2, 3, \dots, n$ 端口分别接已知负载反射 $\Gamma_i (i = 2, 3, \dots, n)$, 观察端口 1 的反射系数 Γ_1 , 如图 1 所示. 可以写出

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

* 1988年7月18日收到.

** 机电部提供基金课题的一部分.

设 $b_1/a_1 = \Gamma_1$, $a_i/b_i = \Gamma_i (i = 2, 3, \dots, n)$, 再引入符号

$$\tilde{\Gamma}_i = \begin{cases} 1/\Gamma_1 & i = 1 \\ \Gamma_i & i \neq 1 \end{cases} \quad (2)$$

得到

$$\begin{bmatrix} S_{11} - \frac{1}{\tilde{\Gamma}_1} S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} - \frac{1}{\tilde{\Gamma}_2} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} - \frac{1}{\tilde{\Gamma}_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

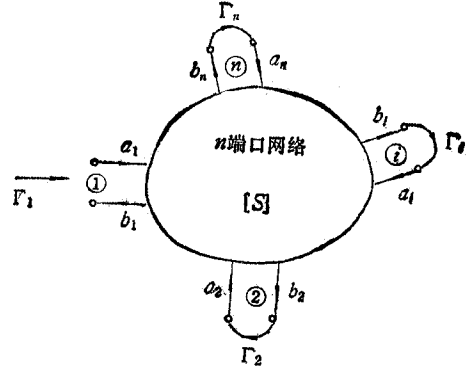


图1 n 端口网络

齐次方程(3)式有非零解的条件是行列式值为0, 即

$$\det \begin{bmatrix} S_{11} - \frac{1}{\tilde{\Gamma}_1} S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} - \frac{1}{\tilde{\Gamma}_2} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} - \frac{1}{\tilde{\Gamma}_n} \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

将(4)式展开为

$$S_{11}\tilde{\Gamma}_1 + S_{22}\tilde{\Gamma}_2 + \cdots + S_{nn}\tilde{\Gamma}_n - \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n \Delta_{ij}\tilde{\Gamma}_i\tilde{\Gamma}_j + \sum_{i < j < k < n} \Delta_{ijk}\tilde{\Gamma}_i\tilde{\Gamma}_j\tilde{\Gamma}_k - \cdots + (-1)^{n-1}\det[S]\tilde{\Gamma}_1\tilde{\Gamma}_2\cdots\tilde{\Gamma}_n - 1 = 0 \quad (5)$$

上式中, $\Delta_{ij\cdots k}$ 表示以 i, j, \dots, k 为对角元素的 $S_{ii}, S_{jj}, \dots, S_{kk}$ 构成的子矩阵行列式。原则上, 已知 $\tilde{\Gamma}_i$ 即可由(5)式求出 $[S]$ 参数。但是, 一般情况下, 问题形式极为复杂。因此, 在本文讨论中, 只限于无耗、互易 n 端口元件。这是实际工程中经常遇见或可以作近似处理的。在这种情况下, $\det[S] = e^{j\varphi_D}$ 。设 $i = 2, 3, \dots, n$, 诸端口均接滑动短路器 $\Gamma_i = e^{j\varphi_i}$, 这时端口1的 $\Gamma_1 = e^{j\varphi_1}$, 即

$$\tilde{\Gamma}_i = \begin{cases} \Gamma_1^* = e^{-j\varphi_1}, & i = 1 \\ \Gamma_i = e^{j\varphi_i}, & i \neq 1 \end{cases} \quad (6)$$

附录中已证明了复对称么矩阵 $[A]$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ C^T & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

有

$$\det[A^*]e^{j\varphi_D} = \det[\bar{A}_1] \quad (8)$$

其中 \bar{A}_1 表示 A_1 的余子阵。为使导出公式有明显对称性,令 $\varphi_1^* = -\varphi_1$ 。计及(8)式,再以因子 $\exp\left[-j\left(\varphi_1^* + \sum_{i=2}^n \varphi_i + \varphi_D\right)/2\right]$ 乘(5)式两边,合并 $\det[A_1]$ 和 $\det[\bar{A}_1]$ 同类项。

对于二端口网络为

$$|S_{11}| \cos\left(\varphi_{11} - \frac{-\varphi_1^* + \varphi_2 + \varphi_D}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_1^* + \varphi_2 + \varphi_D}{2}\right) = 0 \quad (9)$$

考虑到 $\varphi_D = \varphi_{11} + \varphi_{22}$, 上式即为

$$|S_{11}| \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2}\right) = 0 \quad (10)$$

也就是文献[1]中的(4)式。

对于三端口情况,为

$$\begin{aligned} & |S_{11}| \sin\left(\varphi_{11} - \frac{-\varphi_1^* + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_D}{2}\right) + |S_{22}| \sin\left(\varphi_{22} - \frac{\varphi_1^* - \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_D}{2}\right) \\ & + |S_{33}| \sin\left(\varphi_{33} - \frac{\varphi_1^* + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_D}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi_1^* + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_D}{2}\right) = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

对于四端口情况,设

$$\begin{cases} S_{11}S_{22} - S_{12}^2 = |S_{D12}| e^{j\varphi_{D12}} \\ S_{11}S_{33} - S_{13}^2 = |S_{D13}| e^{j\varphi_{D13}} \\ S_{11}S_{44} - S_{14}^2 = |S_{D14}| e^{j\varphi_{D14}} \end{cases} \quad (12)$$

由性质(8)式可知

$$\begin{cases} S_{33}S_{44} - S_{34}^2 = |S_{D12}| e^{j(\varphi_D - \varphi_{D12})} \\ S_{22}S_{44} - S_{24}^2 = |S_{D13}| e^{j(\varphi_D - \varphi_{D13})} \\ S_{22}S_{33} - S_{23}^2 = |S_{D14}| e^{j(\varphi_D - \varphi_{D14})} \end{cases} \quad (13)$$

因此导得

$$\begin{aligned} & |S_{11}| \cos\left(\varphi_{11} - \frac{-\varphi_1^* + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_D}{2}\right) \\ & + |S_{22}| \cos\left(\varphi_{22} - \frac{\varphi_1^* - \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_D}{2}\right) \\ & + |S_{33}| \cos\left(\varphi_{33} - \frac{\varphi_1^* + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_D}{2}\right) \\ & + |S_{44}| \cos\left(\varphi_{44} - \frac{\varphi_1^* + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_D}{2}\right) \\ & - |S_{D12}| \cos\left(\varphi_{D12} - \frac{-\varphi_1^* - \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_D}{2}\right) \\ & - |S_{D13}| \cos\left(\varphi_{D13} - \frac{-\varphi_1^* + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_D}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - |S_{D14}| \cos \left(\varphi_{D14} - \frac{-\varphi_1^* + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_D}{2} \right) \\
 & - \cos \left(\frac{\varphi_1^* + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_D}{2} \right) = 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

根据要求, 不难把它们推广到任意端口情况。

我们把(9)、(11)和(14)式称为无耗多端口广义测量方程。有趣的是: 对于偶数端口方程是余弦函数, 而对于奇数端口则是正弦函数, 因此也称作广义三角函数测量方程。

三、三端口情况

作为例子, 我们着重研究三端口情况。在(11)式中设

$$\begin{aligned}
 a &= \cos \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{2} \right), \quad b = -\sin \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{2} \right) \\
 c &= \cos \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3}{2} \right), \quad d = \sin \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3}{2} \right) \\
 e &= \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3}{2} \right), \quad f = \sin \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3}{2} \right) \\
 g &= \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3}{2} \right), \quad h = -\sin \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3}{2} \right)
 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
 x_1 &= |S_{11}| \sin \left(\varphi_{11} - \frac{\varphi_D}{2} \right), \quad x_2 = |S_{11}| \cos \left(\varphi_{11} - \frac{\varphi_D}{2} \right) \\
 x_3 &= |S_{22}| \sin \left(\varphi_{22} - \frac{\varphi_D}{2} \right), \quad x_4 = |S_{22}| \cos \left(\varphi_{22} - \frac{\varphi_D}{2} \right) \\
 x_5 &= |S_{33}| \sin \left(\varphi_{33} - \frac{\varphi_D}{2} \right), \quad x_6 = |S_{33}| \cos \left(\varphi_{33} - \frac{\varphi_D}{2} \right) \\
 x_7 &= \sin \left(\frac{\varphi_D}{2} \right), \quad x_8 = \cos \left(\frac{\varphi_D}{2} \right)
 \end{aligned}$$

问题的提法是已知第 i 次测量的 $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i$ 和 h_i , 求 x_1, x_2, \dots, x_8 。考虑到 i 次测的偶然误差造成残差 ε_i 。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i &= a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 + e_i x_5 + f_i x_6 + g_i x_7 + h_i x_8 \quad (15) \\
 (i &= 1, 2, \dots, m, m \geq 8)
 \end{aligned}$$

定义目标函数

$$F = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^m (a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 + e_i x_5 + f_i x_6 + g_i x_7 + h_i x_8)^2 \quad (16)$$

以及约束条件

$$G = x_7^2 + x_8^2 - 1 = 0 \quad (17)$$

应用 Lagrange 乘子法构造新函数 E

$$E = F - \lambda G = \sum_{i=1}^m (a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 + e_i x_5 + f_i x_6 + g_i x_7 + h_i x_8)^2 - \lambda(x_1^2 + x_8^2 - 1) \quad (18)$$

于是,问题的模型归结为求 x_1, x_2, \dots, x_8 , 使

$$\min E(x_1, x_2, \dots, x_8) \quad (19)$$

(19)式要求 $\partial E/\partial x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) 和 $\partial E/\partial \lambda = 0$ 易得齐次方程

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & A_{28} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & A_{48} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & A_{58} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} & A_{67} & A_{68} \\ A_{17} & A_{27} & A_{37} & A_{47} & A_{57} & A_{67} & A_{77} - \lambda & A_{78} \\ A_{18} & A_{28} & A_{38} & A_{48} & A_{58} & A_{68} & A_{78} & A_{88} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

和文献[1]类似,(20)式也是有约束的本征值问题。式中,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{i=1}^m a_i^2, & A_{12} &= \sum_{i=1}^m a_i b_i, & A_{13} &= \sum_{i=1}^m a_i c_i, & A_{14} &= \sum_{i=1}^m a_i d_i \\ A_{15} &= \sum_{i=1}^m a_i e_i, & A_{16} &= \sum_{i=1}^m a_i f_i, & A_{17} &= \sum_{i=1}^m a_i g_i, & A_{18} &= \sum_{i=1}^m a_i h_i \\ A_{22} &= \sum_{i=1}^m b_i^2, & A_{23} &= \sum_{i=1}^m b_i c_i, & A_{24} &= \sum_{i=1}^m b_i d_i, & A_{25} &= \sum_{i=1}^m b_i e_i \\ A_{26} &= \sum_{i=1}^m b_i f_i, & A_{27} &= \sum_{i=1}^m b_i g_i, & A_{28} &= \sum_{i=1}^m b_i h_i, & A_{33} &= \sum_{i=1}^m c_i^2 \\ A_{34} &= \sum_{i=1}^m c_i d_i, & A_{35} &= \sum_{i=1}^m c_i e_i, & A_{36} &= \sum_{i=1}^m c_i f_i, & A_{37} &= \sum_{i=1}^m c_i g_i \\ A_{38} &= \sum_{i=1}^m c_i h_i, & A_{44} &= \sum_{i=1}^m d_i^2, & A_{45} &= \sum_{i=1}^m d_i e_i, & A_{46} &= \sum_{i=1}^m d_i f_i \\ A_{47} &= \sum_{i=1}^m d_i g_i, & A_{48} &= \sum_{i=1}^m d_i h_i, & A_{55} &= \sum_{i=1}^m e_i^2, & A_{56} &= \sum_{i=1}^m e_i f_i \\ A_{57} &= \sum_{i=1}^m e_i g_i, & A_{58} &= \sum_{i=1}^m e_i h_i, & A_{66} &= \sum_{i=1}^m f_i^2, & A_{67} &= \sum_{i=1}^m f_i g_i \\ A_{68} &= \sum_{i=1}^m f_i h_i, & A_{77} &= \sum_{i=1}^m g_i^2, & A_{78} &= \sum_{i=1}^m g_i h_i, & A_{88} &= \sum_{i=1}^m h_i^2 \end{aligned}$$

若构造 $\sum_{i=1}^8 x_i \frac{\partial E}{\partial x_i} = 0$

则有

$$F - \lambda(x_7' + x_8') = 0 \quad (21)$$

计及约束条件(17)式,可得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\min} &= \min F \\ x_7' + x_8' &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

也就是说,原问题的 $\min F$ 转化为求最小本征值问题。并且解 $[x_1, x_2, \dots, x_8]^T$, 即 λ_{\min} 所对应的本征矢

(20) 式有非零解的充要条件是 $\det[A] = 0$ 。很易得到

$$p_1 \lambda^2 - p_2 \lambda + p_3 = 0 \quad (23)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2p_1} [p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_1 p_3}] \quad (24)$$

和

$$\lambda_{\min} = \min_+ (\lambda_{1,2}) \quad (25)$$

式中, \min_+ 表示 $\lambda_{1,2}$ 中的最小正根。且

$$p_1 = \det[A]$$

$$p_2 = \det \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} & A_{67} & \\ A_{17} & A_{27} & A_{37} & A_{47} & A_{57} & A_{67} & A_{77} & \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cccccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{18} & \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{28} & \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{38} & \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{48} & \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} & A_{58} & \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} & A_{68} & \\ A_{18} & A_{28} & A_{38} & A_{48} & A_{58} & A_{68} & A_{88} & \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$p_3 = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{bmatrix}$$

求出 λ_{\min} 之后, 即有解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} & A_{67} & \\ A_{17} & A_{27} & A_{37} & A_{47} & A_{57} & A_{67} & A_{77} & - \lambda_{\min} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{18} \\ A_{28} \\ A_{38} \\ A_{48} \\ A_{58} \\ A_{68} \\ A_{78} \end{bmatrix} x_8 \quad (26)$$

或简写作

$$F - \lambda(x_7' + x_8') = 0 \quad (21)$$

计及约束条件(17)式,可得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\min} &= \min F \\ x_7' + x_8' &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

也就是说,原问题的 $\min F$ 转化为求最小本征值问题。并且解 $[x_1, x_2, \dots, x_8]^T$, 即 λ_{\min} 所对应的本征矢

(20) 式有非零解的充要条件是 $\det[A] = 0$ 。很易得到

$$p_1 \lambda^2 - p_2 \lambda + p_3 = 0 \quad (23)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2p_1} [p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_1 p_3}] \quad (24)$$

和

$$\lambda_{\min} = \min_+ (\lambda_{1,2}) \quad (25)$$

式中, \min_+ 表示 $\lambda_{1,2}$ 中的最小正根。且

$$p_1 = \det[A]$$

$$p_2 = \det \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} & A_{67} & \\ A_{17} & A_{27} & A_{37} & A_{47} & A_{57} & A_{67} & A_{77} & \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cccccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & A_{28} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & A_{48} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & A_{58} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} & A_{67} & A_{68} \\ A_{17} & A_{27} & A_{37} & A_{47} & A_{57} & A_{67} & A_{77} & A_{78} \\ A_{18} & A_{28} & A_{38} & A_{48} & A_{58} & A_{68} & A_{78} & A_{88} \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$p_3 = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{bmatrix}$$

求出 λ_{\min} 之后, 即有解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} & A_{67} & \\ A_{17} & A_{27} & A_{37} & A_{47} & A_{57} & A_{67} & A_{77} & -\lambda_{\min} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{18} \\ A_{28} \\ A_{38} \\ A_{48} \\ A_{58} \\ A_{68} \\ A_{78} \end{bmatrix} x_8 \quad (26)$$

或简写作

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ W \end{bmatrix} x_3 \quad (27)$$

由约束条件 $x_7^2 + x_8^2 = 1$, 得 $x_8 = 1/\sqrt{1+W^2}$, 其中 x_8 取正根不失一般性。最后有

$$|S_{11}| = \frac{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}{\sqrt{1+W^2}} \quad (28)$$

$$|S_{22}| = \frac{\sqrt{V_3^2 + V_4^2}}{\sqrt{1+W^2}} \quad (29)$$

$$|S_{33}| = \frac{\sqrt{V_5^2 + V_6^2}}{\sqrt{1+W^2}} \quad (30)$$

$$\varphi_{11} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+W^2}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}\right) \quad (31)$$

$$\varphi_{22} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+W^2}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{V_4}{\sqrt{V_3^2 + V_4^2}}\right) \quad (32)$$

$$\varphi_{33} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+W^2}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{V_6}{\sqrt{V_5^2 + V_6^2}}\right) \quad (33)$$

$$\varphi_D = 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+W^2}}\right) \quad (34)$$

其它 $[S]$ 参数可利用无耗网络的么正性条件 $[S]^\dagger[S] = [I]$ 求得。† 是表示矩阵的转置共轭, 而 $[I]$ 则是单位矩阵。于是有

$$|S_{12}| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |S_{33}|^2)} \quad (35)$$

$$|S_{13}| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - |S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 - |S_{33}|^2)} \quad (36)$$

$$|S_{23}| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - |S_{33}|^2)} \quad (37)$$

$$2\varphi_{12} = \varphi_{11} + \varphi_{22} \pm \cos^{-1}\left[\frac{|S_{13}|^2|S_{23}|^2 - |S_{12}|^2(|S_{11}|^2 + |S_{22}|^2)}{2|S_{12}|^2|S_{11}||S_{22}|}\right] \quad (38)$$

$$2\varphi_{13} = \varphi_{11} + \varphi_{33} \pm \cos^{-1}\left[\frac{|S_{12}|^2|S_{23}|^2 - |S_{13}|^2(|S_{11}|^2 + |S_{33}|^2)}{2|S_{13}|^2|S_{11}||S_{33}|}\right] \quad (39)$$

$$2\varphi_{23} = \varphi_{22} + \varphi_{33} \pm \cos^{-1}\left[\frac{|S_{12}|^2|S_{13}|^2 - |S_{23}|^2(|S_{22}|^2 + |S_{33}|^2)}{2|S_{23}|^2|S_{22}||S_{33}|}\right] \quad (40)$$

至此,问题全部解决。应该指出:对于无耗三端口网络,真正独立实参数只有六个:例如, $|S_{11}|$, $|S_{22}|$, $|S_{33}|$, φ_{11} , φ_{22} 和 φ_{33} , 而 φ_D 实际上可以由其它 S 参数表示。本文的处理方法把 φ_D 也当作待求量,可以使问题简单。此外,若对要求精度较高的场合,可以作二次数据处理,即求出(28)~(34)式的七个量之后,由 S 参数表示 φ_D 再作一次处理。这时问题转化成只有六个未知数了。

四、实验结果

无耗网络 $[S]$ 参数的实验在 X 波段进行。选定的多端口元件是 H 面 T 。系统装置如图 2 所示。 H 面 T 的端口标

号也在图上给出。在实际工作中,两路滑动短路器各在 $1/2$ 波导波长内取 20 个点,共有 400 个数据。采用本文方法处理的结果如表 1。 $|S_{ii}|$ 与接匹配负载所测的完全吻合。

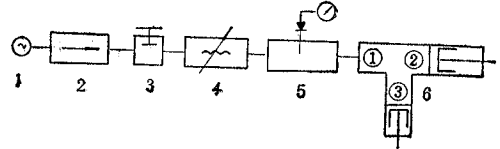


图 2 微波测量系统 1. X 波段讯号源 2. 隔离器 3. 波长计 4. 精密衰减器 5. 测量线 6. 待测元件 (H 面 T) 和滑动短路器

表 1 H 面 T 的 S 参数 ($f = 9390 \text{ MHz}$)

	S_{11}	S_{22}	S_{33}	S_{12}	S_{13}	S_{23}
$ S $	0.23852	0.22784	0.57091	0.78011	0.57840	0.58268
$\angle S$	$\exp(j102.93^\circ)$	$\exp(j94.821^\circ)$	$\exp(j65.604^\circ)$	$\exp(j121.01^\circ)$	$\exp(j99.49^\circ)$	$\exp(j95.969^\circ)$

注 其中 S_{ij} 相位有二个可能值,表中只取了一个。
 $\min F = 0.0165687$

五、结 语

多端口无耗网络的广义测量方程为多端口网络测量的统一理论提供了途径。虽然,在本文的实用例子中只讨论了三端口元件,实际上这种方法不难推广到更多端口情况,并且方法的数据处理量小,一般微型机足以应付。把这一理论应用于任意多端口有耗网络是进一步要研究的课题。

附 录

定理 若复对称矩阵 A 为 n 阶矩阵,即满足 $A_{ij} = A_{ji}$, 并且 $[A][A^*] = [I]$, 则有

$$e^{j\varphi_D} \cdot \det[A^*] = \det[\bar{A}_1] \quad (\text{A1})$$

其中, A_1 是以主矩阵对角元素作对角的 $[A]$ 的子矩阵,而 \bar{A}_1 是 A_1 的余子阵, $[I]$ 是单位矩阵。 $\det[A] = e^{j\varphi_D}$ 。

证明 设

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ C^T & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

其中, A_1 为 m 阶, \bar{A}_1 为 $n - m$ 阶,上标 T 表示转置。根据么正及对称条件,有

$$\begin{bmatrix} A_1 & C \\ C^T & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* & C^* \\ C^{T*} & \bar{A}_1^* \end{bmatrix} = I_n \quad (\text{A3})$$

式中 I_n 为 n 阶单位矩阵。展开上式为

$$\begin{cases} A_1 A_1^* + C C^{*T} = I_m \\ C^T C^* + \bar{A}_1 \bar{A}_1^* = I_{n-m} \\ A_1 C^* + C \bar{A}_1^* = 0_{m, n-m} \\ C^T A_1^* + \bar{A}_1 C^{T*} = 0_{n-m, m} \end{cases} \quad (\text{A4})$$

设

$$[B] = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{n, n-m} \\ 0_{n-m, m} & I \end{bmatrix}$$

则有

$$[B^*][A] = \begin{bmatrix} A_1^* A_1 & A_1^* C \\ C^T & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$

取上式两端的行列式

$$\det\{[B^*][A]\} = \det[B^*]\det[A] = e^{i\varphi_D} \cdot \det[A_1^*] = \det \begin{bmatrix} A_1^* A_1 & A_1^* C \\ C^T & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

(A6) 式右端行列式的第二行左乘 C^* 加到第一行, 行列式值不变。即

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_D} \cdot \det[A_1^*] &= \det \begin{bmatrix} A_1^* A_1 + C^* C^T & A_1^* C + C^* \bar{A}_1 \\ C^T & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ C^T & \bar{A}_1 \end{bmatrix} = \det[\bar{A}_1] \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

证毕。

参 考 文 献

- [1] 梁昌洪, 邱长兴, 电子科学学刊, 10 (1988)1, 1-7.
- [2] 梁昌洪, 西北电讯工程学院学报, 10 (1983) 3, 11-17.
- [3] 周清一, 微波测量技术, 国防工业出版社, 1964 年.
- [4] 张世策, 测量误差及数据处理, 科学出版社, 1979 年.
- [5] 梁昌洪, 计算微波, 西北电讯工程学院出版社, 1985 年.
- [6] J. D. Pieterse, W. Versnel, *Appl. Sci. Res.*, 21 (1969), 12-13.
- [7] D. Kaifez *IEEE Trans. on IM*, IM-24 (1975), 4-11.

GENERALIZED MEASUREMENT EQUATION FOR MULTI PORT LOSSLESS NETWORK

Qiu Changxing Liang Changhong Han Yi

(Xidian University, Xi'an)

Abstract A new generalized measurement equation for multi-port lossless network is developed. In two-port case, it is reduced as a triangle function in the paper [1]. As an example, experimental data are given for a H-plane T three-port network.

Key words Microwave measurement; S-parameters; Multi-port network