

基于多相滤波结构的分数比采样率转换¹

高志成 肖先赐

(电子科技大学电子工程系 成都 610054)

摘要 带通信号的欠采样中, 分数比采样率转换是一个颇费计算量的复杂过程。用低阶的线性内插会带来较大的镜像噪声。该文基于多相滤波的结构, 按照最小运算量准则, 综合处理分数比采样率转换中内插、滤波、抽取的运算过程, 提出了三种高效的转换实现模式。文章比较了三种模式的计算效率, 并给出典型信号的计算机仿真结果。

关键词 多相滤波, 分数比采样率转换, 带通内插和抽取
中图分类号 TN911.7, TN713

1 引言

在数字接收系统中, 解决高速 A/D 转换器和商用处理器之间数据瓶颈的方法之一是利用带通信号的欠采样技术。一般情况下, 欠采样频率和输入数据率之比是分数。在高数据率条件下, 实现分数比采样率转换是一件颇费计算量的过程^[1]。本文探讨了基于多相滤波结构实现带通信号分数比采样率转换的几种方法。

2 带通信号分数比采样率转换的多相滤波实现方法

带通信号 $x(t)$ 常常用一个复低通信号 $m(t)$ 来表示, $m(t)$ 带宽为 B , 频谱 $M(f)$ 的范围 $(-B/2, B/2)$, 带通信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = \text{Re}\{m(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (1)$$

$$X(f) = (1/2)[M(f - f_c) + M^*(-f - f_c)] \quad (2)$$

其正半频谱的范围在 (f_l, f_u) 。中心频率 $f_c = (f_l + f_u)/2$, 第一采样频率 f_{s1} 一般大于信号最高频率。当频带位置 f_u 满足欠采样无模糊的条件时, 可以按照欠采样频率 f_{s2} 对其重采样^[2], 得到 $x(n_2 T_2)$, $T_2 = 1/f_{s2}$, f_{s2} 大于 2 倍带宽 B 。由 $x(n_2 T_2)$ 重构 $x(t)$ 的公式为^[3]

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_2) \frac{\sin[\pi(t - mT_2)/(2T_2)]}{\pi(t - mT_2)/(2T_2)} \cos[2\pi f(t - mT_2)] \quad (3)$$

在窄带信号条件下, f_{s1} 远远大于 f_{s2} , 经重采样后数据量大大减少。

一般情况下欠采样频率 f_{s2} 和第一采样频率 f_{s1} 之比是一个分数 P/Q 。 P 称为内插算子, Q 称为抽取算子。按照抽样理论, 由 $x(n_1 T_1)$ 计算 $x(n_2 T_2)$ 的过程实际上是抽样率转换的过程。需要先做 P 阶内插, 抗镜像滤波; 再做抗混叠滤波, Q 阶抽取。工程中将抗镜像滤波和抗混叠滤波一起考虑为 $h(n)$ 。在低通信号情况下, $h(n)$ 的截止频率选为 $f_{ch} = \min[f_{s1}/2, Pf_{s2}/(2Q)]$ ^[4]。

P/Q 阶采样率转换的直接实现结构如图 1。图中, 符号 $\uparrow P$ 表示 P 阶内插, 即在两数据样本间插入 $P - 1$ 个 0 值。符号 $\downarrow Q$ 表示 Q 阶抽取, 即每隔 Q 个输入样本数据输出一个值。

¹ 2000-01-12 收到, 2000-11-23 定稿

转换过程为

$$y(n_2 T_2) = u(Q n_2 T_3) \quad (4)$$

$$u(n_3 T_3) = v(n_3 T_3) * h(n_3 T_3) \quad (5)$$

$$v(n_3 T_3) = \begin{cases} x(n_3 T_1 / P), & n_3 = 0, \pm P, \dots \\ 0, & n_3 = \text{其它} \end{cases} \quad (6)$$

如果 $h(n)$ 阶数为 N , 每计算一个 $y(n_2 T_2)$ 需要 N 次乘法和 $(N - 1)$ 次加法。采用多相滤波的高效结构, 计算次数可以大大减少。

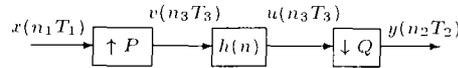


图1 P/Q 阶采样率转换的直接实现

2.1 实现分数比采样率转换的多相内插滤波结构

图1中的滤波器 $h(n)$ 工作在 Pf_{s1} 的频率上, 计算量很大, 如能将内插算子 $\uparrow P$, 放在滤波之后, 使 $h(n)$ 工作在 f_{s1} 频率上, 运算量便可减少。

按照多相内插滤波方法, 对抗混叠滤波器 $h(n)$ 做 P 相分解^[4]。设 $h(n)$ 的 Z 变换为 $H(Z)$, 将 $H(Z)$ 分解成 P 相并行支路:

$$H(Z) = \sum_{m=0}^{P-1} Z^{-(p-1-m)} R_m(Z^P) \quad (7)$$

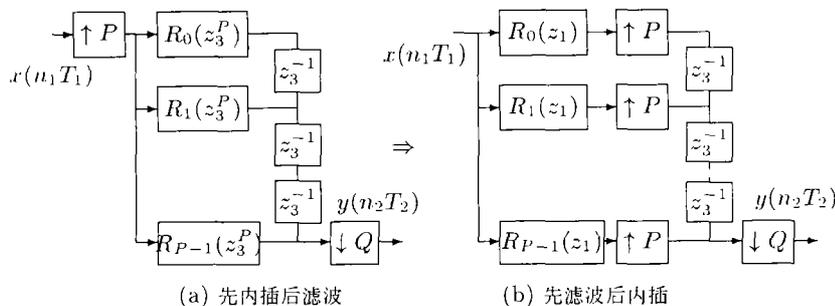
$$R_m(Z^P) = \sum_{n=0}^{L-1} h(np + p - 1 - m)(Z^P)^{-n} \quad (8)$$

式中 $R_m(Z^P)$ $m = 0, 1, \dots, P - 1$ 称为 P 相内插滤波器, 各相之间延迟 T_3 。同一相内的运算样本间隔 PT_3 , 如图2(a)所示。因为 $Z_1^{-1} = e^{-j\Omega T_1} = e^{-j\Omega P T_3} = Z_3^{-P}$, 内插算子 $\uparrow P$ 和延时因子 Z_3^{-P} 可以交换次序, 交换前后的延迟量保持不变, 交换后 Z_3^{-P} 改写为 Z_1 。

将多相分解后的内插滤波器 $R_m(Z_3^P)$ 和内插算子 $\uparrow P$ 交换次序, 得到图2(b)的等效结构。图2(b)中, 滤波器的工作频率为 f_{s1} , 降低了 P 倍, 运算效率提高 P 倍。

图2(b)中的 P 阶内插、 P 阶延时链和 Q 阶抽取, 可以等效为一组按 Q/P 抽取的时分多路开关。时分开关随时间变量 n_2 由下往上移动, 开关位置由输出时刻 $n_2 T_2$ 和下式决定:

$$k = \text{int}(n_2^* Q / P) \oplus Q, \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad k \in (0, 1, \dots, P - 1) \quad (9)$$



(a) 先内插后滤波

(b) 先滤波后内插

图2 实现分数比采样率转换的多相内插滤波结构

其中 \cdot 表示取模, $\text{int}(\cdot)$ 表示取整. 图 2(b) 中 $R_m(Z_1)$ 的阶数为 $L, L = N/P$, 每计算一个输出 $y(n_2T_2)$, 只选通一条内插滤波器通道, 需要 L 次乘法, $L - 1$ 次加法, 运算效率提高了 P 倍.

2.2 实现分数比采样率转换的多相抽取滤波结构

图 1 中 N 阶滤波器 $h(n)$ 和 Q 阶抽取器 $\downarrow Q$ 可以构成一个多相抽取滤波器, 将滤波运算放在抽取之后, 计算量减少 Q 倍.

设滤波器转移函数为 $H(Z)$, 按照多相滤波的方法将 $H(Z)$ 分成时分工作的 Q 相,

$$H(Z) = \sum_{k=0}^{Q-1} Z^{-k} E_k(Z^Q) \tag{10}$$

$$E_k(Z^Q) = \sum_{n=0}^{M-1} h(nQ + k)(Z^Q)^{-n} \tag{11}$$

其中 $M = N/Q$. $E_k(Z^Q), k = 0, 1, \dots, Q - 1$ 称为 Q 相抽取滤波器^[4]. 按照 (9) 式构成的采样率转换器如图 3(a) 所示. 在图 3(a) 中, 每一路抽取滤波器 $E_k(Z^Q)$ 内运算的样本间隔为 QT_3 , 因为 $Z_3^Q = Z_2$, 抽取算子 $\downarrow Q$ 和延时因子 Z_3^{-Q} 可以互相交换次序, 交换前后延时量不变, 交换后 Z_3^Q 改写成 Z_2 . 将图 3(a) 中抽取滤波器 $E_k(Z^Q)$ 与抽取算子 $\downarrow Q$ 交换次序后, 得到采样率转换器的另一高效结构形式, 如图 3(b). 图 3(b) 中, 抽取滤波器 $E_k(Z^Q)$ 被移到抽取器 $\downarrow Q$ 的后边, 滤波器的工作频率降低为 $1/Q$, 计算量减少, 效率提高 Q 倍. 在欠采样应用中, 抽取比 Q 远远大于内插比 P , 按多相抽取滤波方式实现的采样率转换器效率高于按多相内插滤波的实现方式. 在图 3(b) 中, 内插、延时和抽取可以等效为一组按 Q/P 抽取的时分多路开关. 时分开关按速率 T_3 由下往上依次移动, 每隔 P 个 T_3 接通一次, 接通位置 k 由时刻 n_3 按下式决定:

$$k = \text{int}(n_3/P) \oplus Q, \quad n_3 = 0, 1, 2, \dots, \quad k \in (0, 1, \dots, Q - 1) \tag{12}$$

图 3(b) 中抽取滤波器 $E_k(Z^Q)$ 的阶数为 $M = N/Q$. 每计算一个输出 $y(n_2T_2)$, 只选通一条抽取滤波器通道, 需要 M 次乘法, $M - 1$ 次加法, 运算效率提高了 Q 倍. 抽取滤波器的工作频率降低为 $1/Q$.

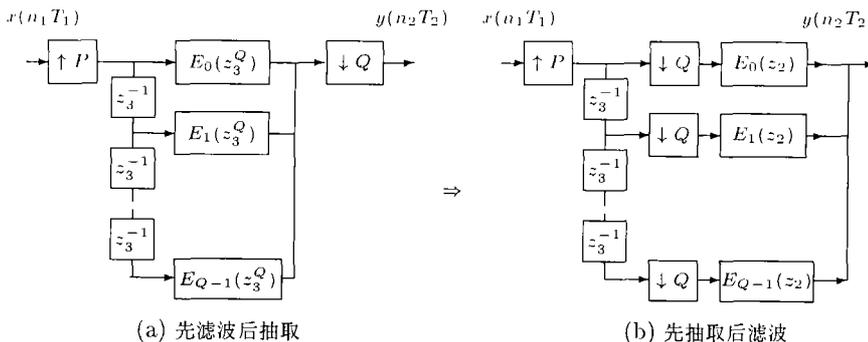


图 3 实现分数比采样率转换的多相抽取滤波结构

2.3 实现分数比采样率转换的综合滤波结构

我们注意到, 将多相内插滤波方法与多相抽取滤波方法综合应用, 会进一步提高运算效率. 按照多相内插滤波方法, 先把 $h(n)$ 和 $\uparrow P$ 构成 P 阶内插滤波器, $R_m(Z_3^P), m = 0, 1, \dots, P - 1$, 就得到图 2 的结构, 先做 P 相内插滤波, P 阶内插, 再抽取, 运算量减小为 $1/P$.

我们进一步设法将抽取算子 $\downarrow Q$ 移到内插滤波器 $R_m(Z_3^P)$ 之前, 降低运算的数据率。为此先将抽取算子 $\downarrow Q$ 移到内插算子 $\uparrow P$ 之前。将图 2 中延时因子 Z_3^{-1} 分解, 因为 P, Q 互质, 总可以找到 l, m , 使 $lP + mQ = -1$, 即

$$Z_3^{-1} = (Z_3^P)^l (Z_3^Q)^m = Z_1^l Z_2^m \tag{13}$$

按照 (13) 式的分解, 我们可以将内插 $\uparrow P$ 、延时 Z_3^{-1} 和抽取 $\downarrow Q$ 的运算过程等效成延时、抽取、内插和延时的过程。如图 4 所示。将图 4(b) 中的 $(Z_3^P)^l$ 和 $\uparrow P$ 交换次序, 改写成 Z_1^l , $(Z_3^Q)^m$ 和 $\downarrow Q$ 交换次序, 改写成 Z_2^m 。再把内插算子 $\uparrow P$ 和抽取算子 $\downarrow Q$ 交换顺序, 得到图 4(d) 的等效形式。再把 Z_1^l 移到 $R_m(Z_1)$ 的前面, Z_2^m 移到 $\downarrow Q$ 的后面, 就得到图 5(a) 的结构形式。在图 5(a) 中, 可以发现, 内插滤波器 $R_m(Z_1)$, $m = 0, 1, \dots, P-1$ 和抽取算子 $\downarrow Q$ 刚好组成多相抽取滤波器。把 $R_m(Z_1)$ 按 Q 相分解成 Q 路, $E_{mk} = 0, 1, \dots, Q-1$, 即

$$R_m(Z_1) = \sum_{k=0}^{Q-1} Z_1^{-k} E_{mk}(Z_1^Q) \tag{14}$$

在 $E_{mk}(Z_1^Q)$ 内, 利用抽取算子 $\downarrow Q$ 和 Z_1^Q 可交换次序, 将 $\downarrow Q$ 提到 $E_{mk}(Z_1^Q)$ 运算的前面, 先抽取后滤波, 最后得到综合法采样率转换的高效结构框图, 如图 5(b)。

图 5 中各内插滤波器经多相分解后, 采样率变换器共有 PQ 条滤波支路。每计算一个输出点数据 $y(n_2T_2)$, 仅需 $N/(PQ)$ 次乘法 and $N/(PQ) - 1$ 次加法, 运算效率提高了 PQ 倍。三种采样率转换方法的运算效率和特性如表 1 所示。

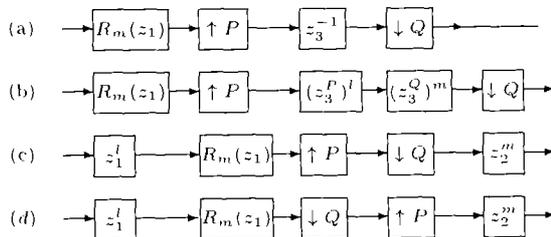
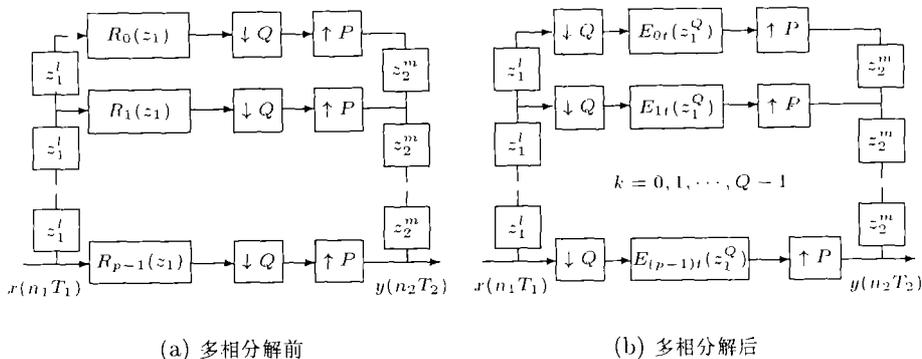


图 4 内插 $\uparrow P$ 、延时 Z_3^{-1} 和抽取 $\downarrow Q$ 的等效转换过程



(a) 多相分解前

(b) 多相分解后

图 5 综合法采样率转换结构

表 1

| | 乘法次数 | 加法次数 | 滤波器工作频率 |
|-----|----------|--------------|-------------|
| 直接法 | N | $N - 1$ | $f_{s1}P$ |
| 内插法 | N/P | $N/P - 1$ | f_{s1} |
| 抽取法 | N/Q | $N/Q - 1$ | $f_{s1}P/Q$ |
| 综合法 | $N/(PQ)$ | $N/(PQ) - 1$ | f_{s1}/Q |

应当说明, 采样率转换器的转换质量取决于带通信号的带宽与滤波器 $h(n)$ 性能的匹配性, 与转换器实现的结构形式无关。多相滤波的高效结构是利用内插、滤波、抽取运算在一定条件下的可交换性, 在保证输出结果相同的条件下, 减少了运算次数, 提高了滤波运算的效率。上述三种采样率转换方法相对于图 1 的直接转换法在滤波性能上是完全等效的。

3 带通信号采样率变换的计算机仿真

按照上一节采样率变换的 3 种高效方法, 选定一个带通信号 $x(n)$, 分别按 3 种方式做计算机仿真, 以验证算法的有效性。

设带通信号 $x(n)$ 带宽 $B = 10\text{MHz}$, 第一取样频率 $f_{s1} = 400\text{MHz}$, 线性调频信号 $x(n) = \cos[2\pi(ft + \mu t^2/2) + \varphi]$, $\mu = 2\pi B/T$ 。 N 取 240 点, 信号频谱位置 $(f_l, f_u) = (16, 26)\text{MHz}$, 按带通信号欠采样定理, 需要无混叠抽样频率 $f_{s2} = 60\text{MHz}$, 采样率转换比 $f_{s1}/f_{s2} = 20/3$, $P = 3, Q = 20$ 。

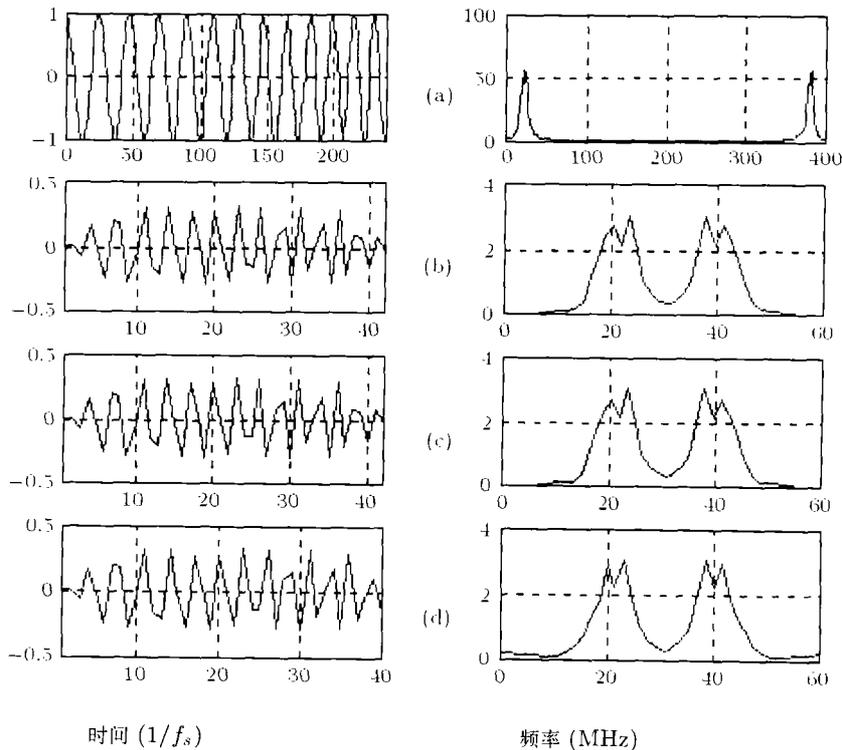


图 6 基于多相滤波结构的采样率转换结果

选择抗混叠滤波器 $h(n)$ 的截止频率 $w_c = f_h/f_{s3}$, $f_{s3} = Pf_{s1} = 1200\text{MHz}$, 滤波器 $h(n)$ 长度取 $M = 120$, $h(n)$ 由 MATLAB 函数 $\text{Firl}(w_c, M)$ 产生。仿真程序按照多相滤波 3 种采样率转换方法处理后得到的欠采样序列 $y(n_2T_2)$, 如图 6 所示。图 6(a) 是原带通信号 $x(n_1T_1)$, 采样频

率 $f_{s1} = 400\text{MHz}$, 信号的归一化频谱位置 (0.04, 0.065)。图 6(b) 是按多相内插滤波器结构转换采样率的输出, 采样频率 60MHz , 信号的归一化频谱位置 (0.2667, 0.4333)。图 6(c) 是按多相抽取滤波器结构转换采样率的输出, 采样频率 60MHz , 信号归一化的频谱位置 (0.2667, 0.4333)。图 6(d) 是按综合法结构转换采样率的输出, 输出采样率和频谱位置与图 6(c) 相同, 基线噪声有所增加是因为 $x(n_1T_1)$ 按有限长数据段仿真, 延时处理中在前后添加零所致, 这在实时使用中是不存在的。就运算效率而言, 综合法最高, 提高 60 倍; 多相抽取法次之, 提高 20 倍; 多相内插法最差, 提高 3 倍。

4 结 论

针对带通信号欠采样中分数比采样率转换的问题, 本文探讨了采用多相滤波技术提高运算效率的 3 种结构, 多相内插滤波结构、多相抽取滤波结构和综合滤波结构, 3 种高效实现结构的运算效率分别提高了 P 倍, Q 倍和 $P \times Q$ 倍。文章讨论了采样率转换的实现条件和等效过程。采样率转换的运算效率取决于所采用的结构, 采样率转换的信号质量取决于带通滤波器的阶数。最后以一个带通信号采样率转换的仿真实例, 证实了高效转换方法的有效性。

参 考 文 献

- [1] C. Dick, F. Harris, PPGA interpolators using polynomial filter, Proc. ICSPAT, Toronto, Canada, 1998, 684-688.
- [2] R. G. Vaughan, L. S. Neil, D. White, The theory of bandpass sampling, IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39(9), 1973-1984.
- [3] 胡广书, 数字信号处理—理论算法与实现, 北京, 清华大学出版社, 1997 年 8 月, 126-131.
- [4] A. J. Coulson, R. G. Vaughan, M. A. Poletti, Frequency-shifting using bandpass sampling, IEEE Trans. on SP, 1994, SP-42(6), 1556-1559.

FRACTIONAL RATIO SAMPLING RATE CONVERSION BASED ON POLYPHASE FILTER ARCHITECTURE

Gao Zhicheng Xiao Xianci

(Dept. of Electronic Engineering, UEST of China, Chengdu 610054, China)

Abstract In the under-sampling of pass-band signal, the fractional ratio Sampling Rate Conversion(SRC) is a procedure which requires a lot of computations. The low-order linear interpolating will incur more aliase noise. Based on the polyphase filter architecture and minimum-operation principle, this paper integrates the interpolating, filtering, and decimating operations in the course of SRC, and presents three architectures for efficient conversion. It also compares the operation efficiencies of the three architectures, and finally gives the computer simulation results on a typical signal.

Key words Polyphase filter, Fractional ratio sampling rate conversion, Band-pass interpolating and decimating

高志成: 男, 1955 年生, 博士, 从事现代谱估计, 宽带数字接收, 信号处理等方面的研究工作。

肖先赐: 男, 1933 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事电子工程, 信号处理等方面的教学和研究工作。