

具有轴突信号传输延迟的双向联想记忆神经网络¹

廖晓峰 刘光远 虞厥邦

(电子科技大学光电子技术系 成都 610054)

摘 要 双向联想记忆模型是两层异联想网络, 本文重点讨论了具有轴突信号传输延迟的双向联想记忆神经网络平衡点存在的条件以及全局稳定性, 并用具体例子验证了结论的正确性, 本文所讨论的方法具有普遍性, 所得到的结果对于网络的设计和应用具有重要的指导意义。

关键词 轴突信号传输延迟, 双向联想记忆神经网络, 平衡点存在性, 全局稳定性

中图分类号 TN-052

1 引 言

Kosko 提出了一系列神经网络的模型, 即双向联想记忆模型 (BAM)^[1-5], 它是将单层自联想 Hebb 相关器推广成两层的模式匹配异联想器, 因此这类网络在模式识别中具有重要的应用前景^[6]。Kosko 在讨论 BAM 系统的全局稳定性时, 规定了联接权矩阵必须对称这一苛刻条件, 然而无论从光学或电子实现上来看, 不可能保持联接权矩阵绝对对称, 而对于研究稳定的非对称联接 BAM 网络, 一直是国内外学者研究的热点和难点, 但这方面研究的结果甚少^[7]。另外值得注意 Kosko 并未考虑现实世界生物神经元之间本身存在着时间延迟, 亦即轴突信号传输过程中存在延迟。

本文我们在 Kosko 双向联想记忆模型上引入轴突信号传输延迟, 得到了一类推广的 BAM 模型, 并且要求双向联想记忆矩阵不必对称, 重点讨论了所提出的网络平衡点存在性和全局稳定性条件, 并用具体的例子进行了仿真实验, 我们的方法具有普遍性, 至于对网络的设计和在模式识别中的应用我们将另文报道。

2 平衡点的存在性和全局稳定性分析

考虑如下具有轴突信号传输延迟的 BAM 网络:

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^p W_{ij} S_j(y_j(t - \tau_{ij})) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1a)$$

$$\dot{y}_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n V_{ij} S_i(x_i(t - \sigma_{ij})) + J_j, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (1b)$$

这里 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T \in \mathbf{R}^p$, a_i 、 b_i 、 τ_{ij} 和 σ_{ij} 分别为非负数, I_i 和 J_j 表示外界恒定输入, 信号函数 S_i , S_j 是连续可微且有界的单增函数, 时间延迟 τ_{ij} , σ_{ij} 相应于轴突信号传输的有限速度。

¹ 1995-11-20 收到, 1996-08-06 定稿

中科院国家模式识别重点实验室基金和清华大学计算机系国家智能技术与系统实验室基金资助课题

我们首先对平衡点的存在性进行研究, 下面给出平衡点存在的充分条件.

定理 1 设联接权 $W_{ij}, V_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p)$ 是实常数, 外部输入 $I_i, J_j (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p)$ 是实常数, 并且存在正常数 $\varepsilon > 0$, 使得联接权满足:

$$a_i - \sum_{j=1}^p \left| V_{ij} \frac{dS_i(\xi)}{d\xi} \right| \geq \varepsilon > 0, \quad (2a)$$

$$b_j - \sum_{i=1}^n \left| W_{ij} \frac{dS_j(\xi)}{d\xi} \right| \geq \varepsilon > 0, \quad (2b)$$

那么对应于每个输入向量对 $\mathbf{I} = [I_1, \dots, I_n]^T \in \mathbf{R}^n, \mathbf{J} = [J_1, \dots, J_p]^T \in \mathbf{R}^p$, 系统 (1) 式都存在唯一的平衡点 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 它满足:

$$a_i x_i^* = \sum_{j=1}^p W_{ij} S_j(y_j^*) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3a)$$

$$b_j y_j^* = \sum_{i=1}^n V_{ij} S_i(x_i^*) + J_j, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (3b)$$

证明 设

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -a_1 x_1 + \sum_{j=1}^p W_{1j} S_j(y_j) \\ \dots \\ -a_n x_n + \sum_{j=1}^p W_{nj} S_j(y_j) \end{bmatrix}, \quad (5a)$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -b_1 y_1 + \sum_{i=1}^n V_{i1} S_i(x_i) \\ \dots \\ -b_n y_n + \sum_{i=1}^n V_{in} S_i(x_i) \end{bmatrix}. \quad (5b)$$

由于条件 (2) 式成立, 故 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的 Jacobi 矩阵是严格对角占优的, 所以 Jacobi 矩阵的逆存在, 因此 \mathbf{F} 是局部 C^1 微分同胚.

对于任意 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left[\left| a_i x_i - \sum_{j=1}^p W_{ij} S_j(y_j) \right| \right] + \sum_{i=1}^p \left[\left| b_j y_j - \sum_{i=1}^n V_{ij} S_i(x_i) \right| \right] \\ &\geq \sum_{i=1}^n \left[|a_i x_i| - \sum_{j=1}^p |W_{ij} S_j(y_j)| \right] + \sum_{j=1}^p \left[|b_j y_j| - \sum_{i=1}^n |V_{ij} S_i(x_i)| \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[|a_i x_i| - \sum_{j=1}^p |V_{ij} S_i(x_i)| \right] + \sum_{j=1}^p \left[|b_j y_j| - \sum_{i=1}^n |W_{ij} S_j(y_j)| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left[\left| \int_0^{x_i} a_i d\xi \right| - \sum_{j=1}^p \left| \int_0^{x_i} V_{ij} \frac{dS_i(\xi)}{d\xi} d\xi \right| \right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^p \left[\left| \int_0^{y_j} b_j d\xi \right| - \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{y_j} W_{ij} \frac{dS_j(\xi)}{d\xi} d\xi \right| \right]. \quad (6)
\end{aligned}$$

若 $x_i \geq 0, y_i \geq 0$, 由于 $dS_i(\xi)/d\xi \geq 0, dS_j(\xi)/d\xi \geq 0$, 故

$$\int_0^{x_i} a_i d\xi - \sum_{j=1}^p \int_0^{x_i} \left| V_{ij} \frac{dS_j(\xi)}{d\xi} \right| d\xi \geq \int_0^{x_i} \varepsilon d\xi = \varepsilon x_i = \varepsilon |x_i|, \quad (7a)$$

$$\int_0^{y_j} b_j d\xi - \sum_{i=1}^n \int_0^{y_j} \left| W_{ij} \frac{dS_i(\xi)}{d\xi} \right| d\xi \geq \int_0^{y_j} \varepsilon d\xi = \varepsilon y_j = \varepsilon |y_j|. \quad (7b)$$

同理, 如果 $x_i < 0, y_j < 0$, 则有

$$\int_{x_i}^0 a_i d\xi - \sum_{j=1}^p \int_{x_i}^0 \left| W_{ij} \frac{dS_j(\xi)}{d\xi} \right| d\xi \geq \int_{x_i}^0 \varepsilon d\xi = -\varepsilon x_i = \varepsilon |x_i|, \quad (8a)$$

$$\int_{y_j}^0 b_j d\xi - \sum_{i=1}^n \int_{y_j}^0 \left| W_{ij} \frac{dS_i(\xi)}{d\xi} \right| d\xi \geq \int_{y_j}^0 \varepsilon d\xi = -\varepsilon y_j = \varepsilon |y_j|. \quad (8b)$$

因此不论 x_i, y_i 为何值时, 均有 $\|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_1 \geq \varepsilon[\|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1]$, 即当 $\|\mathbf{x}\|_1 \rightarrow \infty, \|\mathbf{y}\|_1 \rightarrow \infty$ 时, $\|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_1 \rightarrow \infty$, 故 F 是 C^1 在 R^{n+p} 上微分同胚. 证毕

下面给出网络的全局稳定性定理.

定理 2 在定理 1 的条件 (2) 式中若有 $\varepsilon = 0$, 则系统 (1) 式的任意轨道当 $t \rightarrow \infty$ 时, 收敛于一个稳定状态.

证明 设系统 (1) 式的轨道是 $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$, 且定义

$$\alpha(t) = \dot{x}(t), \quad \beta(t) = \dot{y}(t). \quad (9)$$

则

$$\dot{\alpha}_i(t) = -a_i \alpha_i(t) + \sum_{j=1}^p W_{ij} S'_j(y_j(t - \tau_{ij})) \beta_j(t - \tau_{ij}), \quad (10a)$$

$$\dot{\beta}_j(t) = -b_j \beta_j(t) + \sum_{i=1}^n V_{ij} S'_i(x_i(t - \sigma_{ij})) \alpha_i(t - \sigma_{ij}). \quad (10b)$$

另定义集合 I_t, J_t, I'_t 和 J'_t 为

$$I_t = \{1 \leq i \leq n : \dot{x}_i > 0 \text{ 或 } \dot{x}_i(t) = 0, \ddot{x}_i \geq 0\}, \quad (11)$$

$$J_t = \{1 \leq j \leq p : \dot{y}_j > 0 \text{ 或 } \dot{y}_j(t) = 0, \ddot{y}_j \geq 0\}, \quad (12)$$

$$I'_t = \{1 \leq i \leq n\} / I_t, \quad J'_t = \{1 \leq j \leq p\} / J_t. \quad (13)$$

注意系统 (1) 式的 Lyapunov 函数为

$$L(t) = \sum_{i=1}^n \left[|\alpha_i(t)| + \sum_{j=1}^p \int_{t-\tau_{ij}}^t |W_{ij} S'_j(y_i(\xi)) \beta_j(\xi)| d\xi \right] + \sum_{j=1}^p \left[|\beta_j(t)| + \sum_{i=1}^n \int_{t-\sigma_{ij}}^t |V_{ij} S'_i(x_i(\xi)) \alpha_i(\xi)| d\xi \right]. \quad (14)$$

显然 $L(t) \geq 0$, 且

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &\leq \sum_{i \in I_t} \left\{ -a_i |\alpha_i(t)| + \sum_{j=1}^p |W_{ij} S'_j(y_j(t)) \beta_j(t)| \right\} + \sum_{i \in I'_t} \left\{ -a_i |\alpha_i(t)| + \sum_{j=1}^p |W_{ij} S'_j(y_j(t)) \beta_j(t)| \right\} \\ &\quad + \sum_{j \in J_t} \left\{ -b_j |\beta_j(t)| + \sum_{i=1}^n |V_{ij} S'_i(x_i(t)) \alpha_i(t)| \right\} + \sum_{j \in J'_t} \left\{ -b_j |\beta_j(t)| + \sum_{i=1}^n |V_{ij} S'_i(x_i(t)) \alpha_i(t)| \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -a_i |\alpha_i(t)| + \sum_{j=1}^p |W_{ij} S'_j(y_j(t)) \beta_j(t)| \right\} + \sum_{j=1}^p \left\{ -b_j |\beta_j(t)| + \sum_{i=1}^n |V_{ij} S'_i(x_i(t)) \alpha_i(t)| \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -a_i |\alpha_i(t)| + \sum_{j=1}^p |V_{ij} S'_i(x_i(t)) \alpha_i(t)| \right\} + \sum_{j=1}^p \left\{ -b_j |\beta_j(t)| + \sum_{i=1}^n |W_{ij} S'_j(y_j(t)) \beta_j(t)| \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left\{ -a_i + \sum_{j=1}^p |V_{ij} S'_i(x_i(t))| \right\} |\alpha_i(t)| + \sum_{j=1}^p \left\{ -b_j + \sum_{i=1}^n |W_{ij} S'_j(y_j(t))| \right\} |\beta_j(t)|. \end{aligned}$$

由于 L 是有界的, 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时有极限 \bar{L} , 显然 $\bar{L} \geq 0$, 而 $\dot{L}(t) \leq 0$, 所以 $\bar{L} = 0$, 即 $\alpha_i(t) \rightarrow 0$, $\beta_j(t) \rightarrow 0$. 证毕

3 具体例子的计算机模拟

在下面两个例子中, 为了方便起见, 所有元胞的轴突延迟取为相同的.

例 1 考虑如下 4 个元胞的网络

$$\dot{x}_1(t) = -1.1x_1(t) - 0.51 \tanh(y_1(t-\tau)) + 0.51 \tanh(y_2(t-\tau)) + 1.0, \quad (15)$$

$$\dot{x}_2(t) = -1.2x_2(t) - 0.62 \tanh(y_1(t-\tau)) - 0.42 \tanh(y_2(t-\tau)) - 1.0, \quad (16)$$

$$\dot{y}_1(t) = -1.3y_1(t) - 0.73 \tanh(x_1(t-\tau)) + 0.33 \tanh(x_2(t-\tau)) + 2.0, \quad (17)$$

$$\dot{y}_2(t) = -1.4y_2(t) + 0.84 \tanh(x_1(t-\tau)) - 0.24 \tanh(x_2(t-\tau)) + 2.0. \quad (18)$$

由于激活函数 $\tanh(x)$ 在 $x = 0$ 处的函数导数取全局极大值 $C \leq 1$, 因此, 不难验证 (15)~(18) 式满足定理 1 ~ 2 的条件. 取 $\tau = 1.0$, 我们用四阶 Runge-Kutta 方法进行仿真, 初始条件对 $t \leq 0$ 取为 $\mathbf{x} = (0.1, 0.1)$, $\mathbf{y} = (0.1, 0.1)$, 其结果见图 1—图 3.

例 2 考虑如下 4 个元胞的网络

$$\dot{x}_1(t) = -1.1x_1(t) - 5.0\tanh(y_1(t-\tau)) + 5.0\tanh(y_2(t-\tau)) + 1.0, \quad (19)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2.1x_2(t) + 6.0\tanh(y_1(t-\tau)) - 40.0\tanh(y_2(t-\tau)) - 1.0, \quad (20)$$

$$\dot{y}_1(t) = -3.1y_1(t) - 7.0\tanh(x_1(t-\tau)) + 3.0\tanh(x_2(t-\tau)) + 2.0, \quad (21)$$

$$\dot{y}_2(t) = -4.1y_2(t) + 8.0\tanh(x_1(t-\tau)) - 20.0\tanh(x_2(t-\tau)) - 2.0. \quad (22)$$

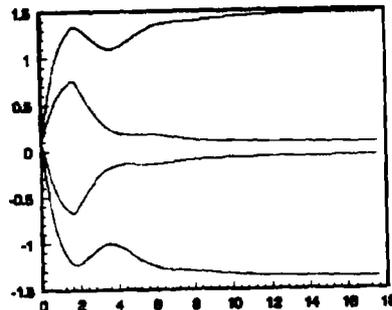


图 1 系统 (15)—(18) 式的运动轨迹图.

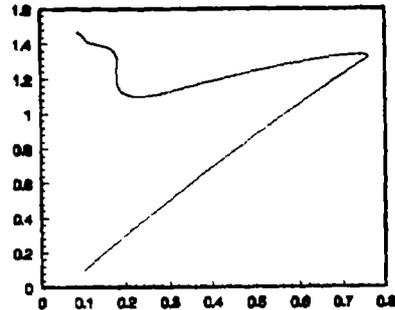


图 2 x_1, y_1 的相平面图

其最终收敛于平衡点为
 $x = (0.0853672, -0.0615203);$
 $y = (1.4738379, -1.3658427)$

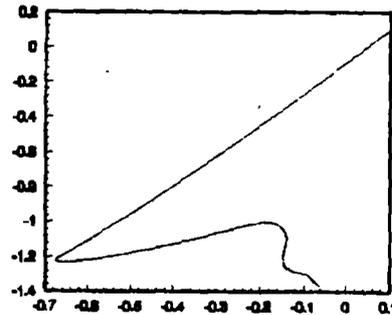


图 3 x_2, y_2 的相平面图

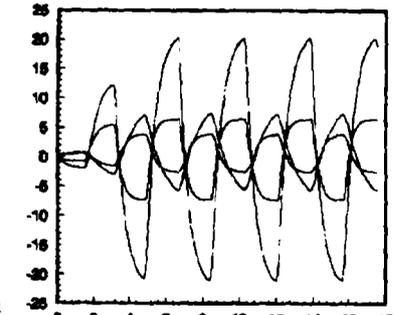


图 4 系统 (19)—(22) 式的运动轨迹图

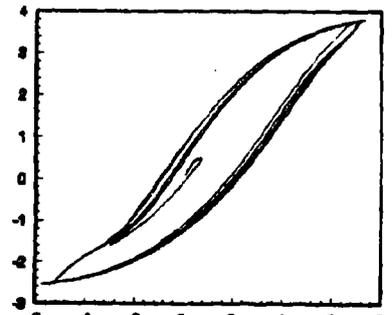


图 5 x_1, y_1 的相平面图

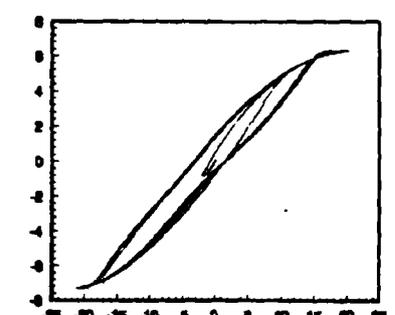


图 6 x_2, y_2 的相平面图

不难验证 (19)—(20) 式不满足定理 1,2 条件, 但我们用 Runge-Kutta 仿真结果见图 4—图 6. 此时 $\tau = 1.0$.

从例 1 可看出,若系统满足定理 1, 2 的条件,系统一定收敛到稳定平衡点(吸引子上)。但从例 2 看出,若系统不满足定理之条件,就会出现周期振荡现象或极限环(图 5 ~ 图 6)。当然我们可断言若系统不满足定理 1, 2 条件,也有可能出现混沌现象,至于混沌现象的产生以及联接权值如何选取的问题,我们将在后继文章中作较深入分析。

4 结 束 语

本文详细讨论了具有轴突信号传输延迟的双向联想记忆网络平衡点存在性和全局稳定性条件,这些条件是与延迟无关的,我们的结果对于具体的网络设计具有重要的指导意义。值得注意的是我们是在假设延迟是常数情形下进行讨论的,至于延迟也随时间变化的问题将变得更加复杂,这方面的工作我们将另文报道。

参 考 文 献

- [1] Kosko B. Bidirectional associative memories. IEEE Trans on SMC. 1988, SMC-18(1): 49-60.
- [2] Kosko B. Adaptive bidirectional associative memories. Appl. Opt. 1987, 26(23): 4947-4960.
- [3] Kosko B. Unsuperised learning in noise. IEEE Trans on NN, 1990, 1(1): 44-57.
- [4] Kosko B. Structural stability of unsuperised learning in feedback neural networks. IEEE Trans on AC, 1991, AC-36(7): 785-792.
- [5] Kosko B. Neural Networks and Fuzzy Systems—A Dynamical System Approach to Machine Intelligence. Prentice Hall International Inc, 1992, 2-3: 38-108.
- [6] Mathai C, Vpadyaya B C. Performance Analysis and Application of the Bidirectional Associative Memory to Industrial Spectral Signatures. Proc. IJCNN' 1989, Vol.1, Washington: June, 1989, 33-37.
- [7] 廖晓峰, 刘光远, 虞厥邦. 连续 BAM 网络的定性分析. 电路与系统学报, 1996, 1(2): 13-18.
- [8] Kohonen T. Self-Organization and Associative Memory. New York: Springer Verlag, 1988.
- [9] Hirsch M W, Smale S. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra: Orlando, FL: Academic press, 1974.
- [10] Michel A N, Miller R K. Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. New York: Academic, 1977.

NEURAL NETWORKS OF BIDIRECTIONAL ASSOCIATIVE MEMORY WITH AXONAL SIGNAL TRANSMISSION DELAYS

Liao Xiaofeng Liu Guangyuan Yu Juebang

(Dept. of Optoelectronic Technology UEST of China, Chengdu 610054)

Abstract Bidirectional Associative Memory(BAM) models are two-layer heteroassociative networks. In this paper, conditions for the existence of equilibrium points and global stability are emphatically discussed for BAM with axonal signal transmission delays. The correctness of obtained conclusions is verified by use of some examples. The discussed methods are more general. The obtained results have important leading significance in the design and application of BAM.

Key words Axonal signal transmission delays, Neural networks of BAM, Existence of equilibrium point, Global stability

廖晓峰: 男, 1964 年生, 博士, 主要兴趣是神经网络定性理论和应用研究。

刘光远: 男, 1961 年生, 博士生, 主要兴趣是神经网络电路设计。

虞厥邦: 男, 1932 年生, 教授, 博士生导师, 主要兴趣是非线性网络理论和人工神经网络。