第 15 卷 第 2 期
1993 年 3 月

电 子 科 学 学 刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 15, No. 2
Mar., 1993

任意长度离散 Hartley 变换的快速算法

曾 泳 泓
(国防科技大学七系,长沙 410073)

摘要 本文把长为 $p^l q$(p 为奇数,q 为任意自然数)的 DHT 转化为 p^l 个长为 q 的 DHT 的计算及其附加运算,附加运算只涉及 p 点 cos-DFT 和 sin-DFT 的计算;对长度为 $p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}2^l$($p_1,\cdots,p_r$ 为奇素数)的 DHT,用同样的递归技术得到其快速算法,因而可计算任意长度的 DHT;文中还论证了计算长为 N 的 DHT 所需的乘法和加法运算量不超过 $O(N\log_2 N)$. 当长度为 $N=p^l$ 时,本文算法的乘法量比其他已知算法更少.

关键词 信号处理;Hartley 变换;快速算法

一、引 言

Hartley 变换是实数域中定义的一种离散变换,在通信和信号处理中已得到了广泛的应用[1]. 它与 DFT 等离散变换一样,也可用于计算离散卷积,而且计算速度比用 DFT 计算更快. 自从 Hartley 变换提出以来,对其快速算法的研究已取得了很大进展. 对长度为 2 的幂的离散 Hartley 变换 (DHT) 已提出了很多算法[2-5],其运算量比直接用 DFT 计算减少很多,对长度为 p^l 的 DHT(p 为奇数),也已提出了一些算法[6]. 对长度为互素因子相乘的 DHT,目前采用的办法是转化成多维 DHT 进行计算[5]. 由于 DHT 的核不具有 DFT 的核那种可分离性,所以在转化为多维 DHT 的过程中要增加运算量. 本文提出了计算任意长度 DHT 的一种新算法,它不必转化为多维 DHT. 作为算法的特例,当长度为 p^l(p 为奇数)时,得到了一种新的基 p 算法,比其他已知的基 p 算法运算量更少.

二、长度为 $p^l q$(p 为奇数,q 为任意自然数)的 DHT 的快速算法

实序列 $x(n)(n=0,1,\cdots,N-1)$ 的离散 Hartley 变换 (DHT) 的定义为:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N},\ k=0,1,\cdots,N-1$$

其中 $\operatorname{cas}\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$.

下面考虑长度为 $N=p^l q$(p 为奇数,q 为任意自然数)的 DHT 的计算.

1991.11.19 收到,1992.04.02 定稿.

曾泳泓 男,1962 年出生,讲师,现从事科学与工程计算,数字信号处理及密码学的教学与科研工作.

令 $C_u(k) = X(pk+u)$，$k=0,1,\cdots,N/p-1$；$u=0,1,\cdots,p-1$。显然，只要计算出 $C_u(k)$ 便可得到 $X(k)$.

$$C_0(k) = X(pk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N/p}$$
$$= \sum_{n=0}^{N/p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1} x(n+iN/p)\operatorname{cas}\frac{2\pi(n+iN/p)k}{N/p}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N/p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1} x(n+iN/p)\right)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N/p}$$

令

$$x_0(n) = \sum_{i=0}^{p-1} x(n+iN/p),\quad n=0,1,\cdots,N/p-1.$$

则

$$C_0(k) = \sum_{n=0}^{N/p-1} x_0(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N/p},\quad k=0,1,\cdots,N/p-1 \tag{1}$$

(1)式为长度为 N/p 的 DHT。

令 $D_u(k) = C_u(k) + C_{p-u}(k-1)$，则

$$D_u(k) = X(pk+u) + X(pk-u)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\operatorname{cas}\frac{2\pi n(pk+u)}{N} + \operatorname{cas}\frac{2\pi n(pk-u)}{N}\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\cos\frac{2\pi n(pk+u)}{N} + \cos\frac{2\pi n(pk-u)}{N}\right.$$
$$\left. + \sin\frac{2\pi n(pk+u)}{N} + \sin\frac{2\pi n(pk-u)}{N}\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left(2x(n)\cos\frac{2\pi nu}{N}\right)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N/p}$$

类似于 $C_0(k)$ 的计算，若令

$$x_u(n) = \sum_{i=0}^{p-1} 2x(n+iN/p)\cos\frac{2\pi u(n+iN/p)}{N},\quad n=0,1,\cdots,N/p-1$$

则

$$D_u(k) = \sum_{n=0}^{N/p-1} x_u(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N/p},\quad k=0,1,\cdots,N/p-1 \tag{2}$$

(2)式为长为 N/p 的 DHT。

$$C_u(k) - C_{p-u}(k-1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\operatorname{cas}\frac{2\pi n(pk+u)}{N} - \operatorname{cas}\frac{2\pi n(pk-u)}{N}\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\cos\frac{2\pi n(pk+u)}{N} - \cos\frac{2\pi n(pk-u)}{N}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\sin\frac{2\pi n(pk+u)}{N}-\sin\frac{2\pi n(pk-u)}{N}\Big]\\
=&\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[-2\sin\frac{2\pi nu}{N}\sin\frac{2\pi nk}{N/p}+2\sin\frac{2\pi nu}{N}\cos\frac{2\pi nk}{N/p}\right]\\
=&\sum_{n=0}^{N-1}\left(2x(n)\sin\frac{2\pi nu}{N}\right)\left[\cos\frac{2\pi nk}{N/p}-\sin\frac{2\pi nk}{N/p}\right]\\
=&\sum_{n=0}^{N/p-1}\left(2\sum_{i=0}^{p-1}x(n+iN/p)\sin\frac{2\pi(n+iN/p)u}{N}\right)\\
&\times\left[\cos\frac{2\pi nk}{N/p}-\sin\frac{2\pi nk}{N/p}\right]
\end{aligned}
$$

若令

$$x'_u(n)=2\sum_{i=0}^{p-1}x(n+iN/p)\sin\frac{2\pi(n+iN/p)u}{N},\quad n=0,1,\cdots,N/p-1$$

并设

$$D'_u(k)=\sum_{n=0}^{N/p-1}x'_u(n)\mathrm{cas}\frac{2\pi nk}{N/p},\quad k=0,1,\cdots,N/p-1 \tag{3}$$

则

$$C_u(k)-C_{p-u}(k-1)=D'_u(N/p-k),\quad k=0,1,\cdots,N/p$$

这里 $D'_u(N/p)=D'_u(0)$. (3) 式是长为 N/p 的 DHT.

根据前面的结果，可得

$$
\left.\begin{aligned}
C_u(k)&=[D_u(k)+D'_u(N/p-k)]/2,\quad k=0,1,\cdots,N/p-1\\
C_{p-u}(k-1)&=[D_u(k)-D'_u(N/p-k)]/2,\quad k=1,2,\cdots,N/p
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

其中 $D_u(N/p)=D_u(0)$. 所以，只要求出了 $D_u(k)$和 $D'_u(k)$,($k=0,1,\cdots,N/p-1$; $u=1,2,\cdots,(p-1)/2$), 便可求出所有 $C_u(k)$, ($u=1,2,\cdots,p-1$; $k=0,1,\cdots,N/p-1$).

下面考虑 $x_0(n),x_u(n)$ 和 $x'_u(n)$ 的计算. 由三角公式

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi(n+iN/p)u}{N}&=\cos\frac{2\pi un}{N}\cos\frac{2\pi iu}{p}-\sin\frac{2\pi nu}{N}\sin\frac{2\pi iu}{p}\\
\sin\frac{2\pi(n+iN/p)u}{N}&=\sin\frac{2\pi nu}{N}\cos\frac{2\pi iu}{p}+\cos\frac{2\pi nu}{N}\sin\frac{2\pi iu}{p}
\end{aligned}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
x_u(n)=&\left[\sum_{i=0}^{p-1}x(n+iN/p)\cos\frac{2\pi iu}{p}\right]2\cos\frac{2\pi nu}{N}\\
&-\left[\sum_{i=0}^{p-1}x(n+iN/p)\sin\frac{2\pi iu}{p}\right]2\sin\frac{2\pi nu}{N}
\end{aligned}
$$

$$x'_u(n)=\left[\sum_{i=0}^{p-1}x(n+iN/p)\cos\frac{2\pi iu}{p}\right]2\sin\frac{2\pi nu}{N}$$

$$+\left[\sum_{i=0}^{p-1} x(n+iN/p)\sin\frac{2\pi iu}{p}\right]2\cos\frac{2\pi nu}{N}$$

令

$$\left.\begin{aligned}C_u(n)&=\sum_{i=0}^{p-1} x(n+iN/p)\cos\frac{2\pi iu}{p}, \quad u=0,1,\cdots,(p-1)/2\\ S_u(n)&=\sum_{i=0}^{p-1} x(n+iN/p)\sin\frac{2\pi iu}{p}, \quad u=1,2,\cdots,(p-1)/2\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$n=0,1,\cdots,N/p-1$.

则

$$x_0(n)=C_0(n)$$

$$\left.\begin{aligned}x_u(n)&=C_u(n)\cdot 2\cos\frac{2\pi nu}{N}-S_u(n)\cdot 2\sin\frac{2\pi nu}{N}\\ x'_u(n)&=C_u(n)\cdot 2\sin\frac{2\pi nu}{N}+S_u(n)\cdot 2\cos\frac{2\pi nu}{N}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

式中 $u=1,2,\cdots,(p-1)/2$; $n=0,1,\cdots,N/p-1$.

设对固定的 n,(5)式的计算需要 $m(p)$ 个乘法和 $a(p)$ 个加法. 当 $C_u(n)$ 和 $S_u(n)$ 求出来之后,(6)式的计算相当于计算 2 个复数相乘(对固定的 u 和 n). 根据 2 个复数相乘的最佳算法[7],只需 3 个乘法和 3 个加法. 因此,(5)式需要的总运算量为 $m(p)(N/p)$ 个乘法和 $a(p)(N/p)$ 个加法;(6)式需要的总运算量为 $3((p-1)/2)(N/p)$ 个乘法和 $3((p-1)/2)(N/p)$ 个加法;(4)式需要的运算量为 $(p-1)(N/p)$ 个加法(不计移位,移位可以在最后一次性完成). 这样,一个长为 N 的 DHT 可用 p 个长为 N/p 的 DHT 计算,附加的运算量为 $[m(p)+3(p-1)/2](N/p)$ 个乘法和 $[a(p)+5(p-1)/2](N/p)$ 个加法. 若用 $M(N)$ 和 $A(N)$ 分别表示长为 N 的 DHT 所需的乘法数和加法数,则有

$$M(N)=pM(N/p)+[m(p)+3(p-1)/2](N/p)$$
$$A(N)=pA(N/p)+[a(p)+5(p-1)/2](N/p)$$

即

$$M(p^lq)=pM(p^{l-1}q)+[m(p)+3(p-1)/2]p^{l-1}q$$
$$A(p^lq)=pA(p^{l-1}q)+[a(p)+5(p-1)/2]p^{l-1}q$$

若 $l>1$, 对长为 $p^{l-1}q$ 的 DHT 的计算可以继续利用上述方法分解成长为 $p^{l-2}q$ 的 DHT. 如此下去,可分解到 DHT 的长度为 q 时为止,则一个长为 p^lq 的 DHT 可用 p^l 个长为 q 的 DHT 计算,且有

$$M(p^lq)=[m(p)+3(p-1)/2]p^{l-1}ql+p^lM(q)$$
$$A(p^lq)=[a(p)+5(p-1)/2]p^{l-1}ql+p^lA(q)$$

(5)式也可用一个长为 p 的 DHT 来计算,事实上,若令

$$W_u(n)=\sum_{i=0}^{p-1} x(n+iN/p)\mathrm{cas}\frac{2\pi iu}{p}, \quad u=0,1,\cdots,p-1$$

则

$$C_u(n) = [W_u(n) + W_{p-u}(n)]/2, \quad u = 0,1,\cdots,(p-1)/2$$
$$S_u(n) = [W_u(n) - W_{p-u}(n)]/2, \quad u = 1,2,\cdots,(p-1)/2$$
$$n = 0,1,\cdots,N/p-1$$

其中 $W_p(n) = W_0(n)$。

所以 $m(p)$ 不超过长为 p 的 DHT 所需的乘法数。当 $q=1$ 时，上述方法得到了计算长为 p^l 的 DHT 的一种新算法。它比已知的基 p 算法[6]的乘法运算量更少。

三、任意长度 DHT 的快速算法

对长度N为任意的情形，设N可分解为 $N = p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}2^l$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 为奇素数，$l,l_1,\cdots,l_s$ 为非负整数。N可看成是长为 $p_1^{l_1}q$ 的 DHT，其中 $q = p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}2^l$，所以，长为$N$的 DHT 可用 $p_1^{l_1}$ 个长为 $p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}2^l$ 的 DHT 计算，并且有

$$M(p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}2^l) = [m(p_1)+3(p_1-1)/2]p_1^{l_1-1}p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}2^l l_1 + p_1^{l_1}M(p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}2^l)$$
$$A(p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}2^l) = [a(p_1)+5(p_1-1)/2]p_1^{l_1-1}p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}2^l l_1 + p_1^{l_1}A(p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}2^l)$$

同样，长为 $p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}2^l$ 的 DHT 可用 $p_2^{l_2}$ 个长为 $p_3^{l_3}\cdots p_s^{l_s}2^l$ 的 DHT 计算。依此下去，长为 $p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}2^l$ 的 DHT 可分解为 $p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}$ 个长为 2^l 的 DHT，且有

$$\begin{aligned} M(N) &= [m(p_1)+3(p_1-1)/2]Nl_1/p_1 + [m(p_2)+3(p_2-1)/2]Nl_2/p_2 \\ &\quad + \cdots + [m(p_s)+3(p_s-1)/2]Nl_s/p_s + p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}M(2^l) \\ &= N\sum_{i=1}^{s}[m(p_i)+3(p_i-1)/2]l_i/p_i + (N/2^l)M(2^l) \end{aligned}$$

$$A(N) = N\sum_{i=1}^{s}[a(p_i)+5(p_i-1)/2]l_i/p_i + (N/2^l)A(2^l)$$

注意到长为 2^l 的 DHT 迄今为止的最快速算法[2-4]所需运算量为

$$M(2^l) = (1/2)l2^l - (3/2)2^l + 2$$
$$A(2^l) = (3/2)l2^l - (5/2)2^l + 6$$

则

$$M(N) = N\sum_{i=1}^{s}[m(p_i)+3(p_i-1)/2]l_i/p_i + (1/2)Nl - (3/2)N + N/(2^{l-1})$$

$$A(N) = N\sum_{i=1}^{s}[a(p_i)+5(p_i-1)/2]l_i/p_i + (3/2)Nl - (5/2)N + 3N/(2^{l-1})$$

根据前面的结果，$m(p)$ 和 $a(p)$ 分别表示计算

$$\left.\begin{aligned} C_u &= \sum_{i=0}^{p-1} c_i\cos\frac{2\pi iu}{p}, \quad u = 0,1,\cdots,(p-1)/2 \\ S_u &= \sum_{i=0}^{p-1} c_i\sin\frac{2\pi iu}{p}, \quad u = 1,2,\cdots,(p-1)/2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

所需的乘法和加法数。(7)式可变形为

$$
\left.\begin{aligned}
C_u &= \sum_{i=0}^{(p-1)/2} c_i' \cos\frac{2\pi i u}{p}, \quad u = 0,1,\cdots,(p-1)/2 \\
S_u &= \sum_{i=1}^{(p-1)/2} s_i' \sin\frac{2\pi i u}{p}, \quad u = 1,2,\cdots,(p-1)/2
\end{aligned}\right\} \tag{8}
$$

其中

$$
c_0' = c_0, \quad c_i' = c_i + c_{p-i}, \quad i = 1,2,\cdots,(p-1)/2
$$
$$
s_i' = c_i - c_{p-i}, \quad i = 1,2,\cdots,(p-1)/2
$$

在文献[8]中，我们利用最佳短卷积算法得到了(8)式在 $p = 3,5,7,11$ 等情形的快速算法，根据这些算法，可得到计算(7)式的快速算法，并且运算量为

$$
m(3) = 0,\ a(3) = 4
$$
$$
m(5) = 5, a(5) = 15
$$
$$
m(7) = 8, a(7) = 34
$$
$$
m(11) = 20, a(11) = 82
$$

所以，对长度为 $N = 2^l 3^{l_1} 5^{l_2} 7^{l_3} 11^{l_4}$ 的 DHT，运算量为

$$
M(N) = Nl_1 + 11Nl_2/5 + 17Nl_3/7 + 35Nl_4/11 + Nl/2 - 3N/2 + N/(2^{l-1})
$$
$$
A(N) = 3Nl_1 + 5Nl_2 + 7Nl_3 + 107Nl_4/11 + 3Nl/2 - 5N/2 + 3N/(2^{l-1})
$$

一般地，(7)式的计算可用长为 p 的 DHT 完成，而长为 p 的 DHT 又可以用长度为 $p-1$ 的循环卷积计算。根据循环卷积的各种快速算法[7]，可知其运算量不超过 $O(p\log_2 p)$。所以，对任意长度的 DHT，运算量不超过

$$
M(N) = \sum_{i=1}^{s} \frac{O(p_i \log_2 p_i) + 3(p_i - 1)/2}{p_i} Nl_i + Nl/2
$$
$$
= N\sum_{i=1}^{s} O(\log_2 p_i) + Nl/2 = O(N\log_2 N),
$$

同理 $A(N) = O(N\log_2 N)$。

四、同其它算法的比较

文献[6]中提出了基 p 算法，对长度为 p^l 的 DHT，文献[6]中算法的乘法量为 $M_p(l) = [N_p + 2(p-1)]lp^l/p - 2p^l + 2$；而作为本文特殊情形得到的基 p 算法的乘法量为 $M(p^l) = [m(p) + 3(p-1)/2]lp^l/p$(包括一些平凡乘法)。前面已经说明 $m(p) \leqslant N_p$ (N_p 表示 p 点 DHT 所需的乘法数)，所以 $[m(p) + 3(p-1)/2] < [N_p + 2(p-1)]$。对较小的 p，可具体比较 $m(p)$ 和 N_p 的大小。假设 p 点 DHT 采用卷积计算，则需要计算一个长为 $p-1$ 的循环卷积。根据最佳短卷积算法[7]可知：$N_3 = 2$，$N_5 = 5$，$N_7 = 8$，$N_{11} = 20$；而 $m(3) = 0$，$m(5) = 5$，$m(7) = 8$，$m(11) = 20$；故本文算法乘法量更少。由于文献[6]中未给出加法运算量，此处不便比较。

文献[5]中给出了计算长度为互素因子相乘的 DHT 的办法。借助这个方法，可把长度为 $N = 2^l p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}$ 的 DHT 转化成 $s+1$ 维 $2^l \times p_1^{l_1} \times \cdots \times p_s^{l_s}$ 的 DHT，再利用长为 2^l 或长为 p^l 的 DHT 的算法，也可计算任意长度的 DHT。但是，文献[5]中的

转化方法需要很多附加运算，所以不便使用. 而本文的方法不需附加运算，结构更简单.

参　考　文　献

[1] R. N. Bracewell, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-38** (1990) 12, 2174—2176.
[2] 王中德，快速 W 变换——算法与程序，中国科学(A 辑)，1988 年，第 5 期，第 549—560 页.
[3] S. C. Pei, J. L. Wu, *Electron. Lett.*, **22** (1986) 1, 26—27.
[4] R. N. Bracewell, *Electron. Lett.*, **23** (1987) 10, 1148—1149.
[5] H. V. Sorensen et al., *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-33** (1985) 10, 1231—1238.
[6] 茅一民，电子科学学刊，**12**(1990)6，584—592.
[7] H. J. 努斯鲍默，快速傅里叶变换和卷积算法，上海科技文献版，上海，1984 年.
[8] 曾永红，电子学报，**19**(1991)5，87—95.

FAST ALGORITHMS FOR DISCRETE HARTLEY TRANSFORM OF ARBITRARY LENGTH

Zeng Yonghong
(7th Department, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract DHT of length $p^l q$ (p is odd. q is arbitrary) is turned into p-DHT's of length q and some additional operations while the additional operations only involves the computation of cos-DFT and sin-DFT with length p. If the length of a DHT is $p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}2^l(p_1, \cdots, p_s$ are odd primes), a fast algorithm is obtained by the similar recursive technique. Therefore, the algorithm can compute DHT of arbitrary length. The paper also proves that operations for computing DHT of length N by the algorithm are no more than $O(N\log_2 N)$. When the length is $N=p^l$, operations of the algorithm are less than that of other known algorithms.

Key words Signal processing; Discrete Hartley transform; Fast algorithm