

# 含有部分填充等离子体柱的螺旋线混合模的理论分析<sup>1</sup>

龚中麟 陈光 张晋林\* 何润亚

(北京大学电子学系 北京 100871)

\*(信息产业部电子 12 所 北京 100016)

**摘要** 导出了含有部分填充等离子体柱的螺旋线中混合模的色散方程, 计算出混合模的色散曲线并由此探讨了混合模的形成条件. 研究了约束磁场对轴向电场的径向分布的影响. 在低约束磁场下轴向电场的径向分布显示场与电子束的耦合显著增强, 无聚焦磁场时存在着沿等离子体柱面传播的 TG 模.

**关键词** 等离子体填充的行波管, 螺旋线, 混合模

**中图分类号** TN816

## 1 引言

行波管作为厘米和毫米波段的主要宽带功率放大器在雷达、电子对抗以及通信系统中起着关键作用, 到目前为止尚没有其他微波器件可以取代. 常规的电真空器件型行波管由于其工作原理的限制在性能上已达到极限. 从上个世纪 90 年代开始出现的等离子体填充行波管由于在原理中引入了新的因素, 导致器件性能较之真空型对应器件有大幅度提高, 已引起相当关注<sup>[1]</sup>. 俄罗斯学者已研制出等离子体填充的耦合腔型行波管, 相应的理论研究已证明所形成的等离子体-耦合腔链混合模是导致该类管性能大幅度提高的主要原因<sup>[1]</sup>. 目前尚没有公开发表有关等离子体填充的螺旋线行波管的实验结果, 但美国马里兰大学等离子体研究所已发表了对它的理论研究, 基于波束相互作用的小信号理论, 该文论证了等离子体-螺旋线混合模的形成是导致螺旋线行波管增益提高的主要原因<sup>[2]</sup>. 然而, 该文未着力分析混合模的特性, 而且所选择的计算参量与行波管的实际工作条件差距甚大, 例如聚焦磁场值取为 1.0T, 更接近于无穷大聚焦磁场的简化理论模型.

为了深入探讨等离子体填充的螺旋线行波管的工作机理, 本文对含有部分填充的等离子体柱的螺旋线中形成的混合模进行了理论分析和计算, 对混合模的特性进行了探讨. 所选择的螺旋线-等离子体柱几何参量与将要进行试验测量的系统一致, 聚焦磁场选择与无聚焦磁场管工作条件接近的 0.05T 低强度. 首次对无聚焦磁场情况下模式的场分布特征进行了探讨.

## 2 色散方程

在等离子体填充的螺旋线行波管中, 等离子体柱由电子注电离中性气体产生, 等离子体柱与螺旋线之间保留有间隙以形成部分填充. 本文仅分析不存在电子束时高频系统中形成的混合模的特性, 其横截面可以模型化为图 1 所示结构. 等离子体柱及螺旋线半径分别为  $R_1$ ,  $R_2$ , 其间为真空间隙. 螺旋线与半径  $R_3$  金属外套之间为均匀介质环以等效地表示螺旋线的夹持结构, 整个系统浸没于轴向均匀聚焦直流磁场  $B_0$  中.

<sup>1</sup> 2002-05-13 收到, 2002-10-24 改回  
高功率真空电子学国家实验室基金资助课题

取柱坐标  $(r, \theta, z)$  的  $z$  轴与螺旋线轴重合, 设等离子体柱为均匀的冷等离子体, 其介电张量为<sup>[3]</sup>

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & j\epsilon_2 & 0 \\ -j\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

矩阵元:

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2} \right], \quad \epsilon_2 = \epsilon_0 \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2}, \quad \epsilon_3 = \epsilon_0 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] \quad (2)$$

其中

$$\omega_p = \sqrt{ne^2/(m\epsilon_0)}, \quad \omega_c = |e|B_0/m \quad (3)$$

分别为等离子体角频率和电子回旋角频率,  $n$  为电子浓度,  $m$  和  $e$  分别为电子质量和电荷,  $\epsilon_0$  为真空的介电常数.

轴向传播模电磁场的每个分量的波因子写成  $e^{j(\omega t - \beta z)}$ , 例如  $E_z$  可写成

$$E_z(r, \theta, z, t) = \phi(r, \theta)e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (4)$$

的形式. 等离子体柱 ( $r \leq R_1$ ) 内的 Maxwell 方程旋度式可写成

$$\left. \begin{aligned} (\nabla_{\perp} - j\beta\hat{z} \times) \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{B} \\ (\nabla_{\perp} - j\beta\hat{z} \times) \mathbf{H} &= j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中的横向算符

$$\nabla_{\perp} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (6)$$

将场分量的纵向与横向分离, 即

$$\mathbf{E} = \hat{z}E_z + \mathbf{E}_{\perp}, \quad \mathbf{B} = \hat{z}B_z + \mathbf{B}_{\perp} \quad (7)$$

代入旋度方程 (5) 式可得场的横向分量用纵向分量的表达式, 消去横向分量后得  $E_z, B_z$  满足下列耦合方程式:

$$\begin{aligned} \frac{\beta\epsilon_2\mu}{-j\omega\mu\epsilon_1 + j\beta^2/\omega} \nabla_{\perp}^2 E_z - \nabla_{\perp}^2 B_z &= \left( \omega^2\mu\epsilon_1 - \beta^2 - \frac{(\omega\epsilon_2\mu)^2}{\mu\epsilon_1 - \beta^2/\omega^2} \right) B_z \\ \left( \mu\epsilon_1 + \frac{(\omega\epsilon_2\mu)^2}{-\omega^2\mu\epsilon_1 + \beta^2} \right) \nabla_{\perp}^2 E_z + \frac{\beta\epsilon_2\mu}{-j\omega\mu\epsilon_1 + j\beta^2/\omega} \nabla_{\perp}^2 B_z \\ &= \left[ -\omega^2\mu^2\epsilon_1\epsilon_3 + \beta^2\mu\epsilon_3 + \frac{(\omega\epsilon_2\mu)^2\mu\epsilon_3}{\mu\epsilon_1 - \beta^2/\omega^2} \right] E_z \end{aligned} \quad (8)$$

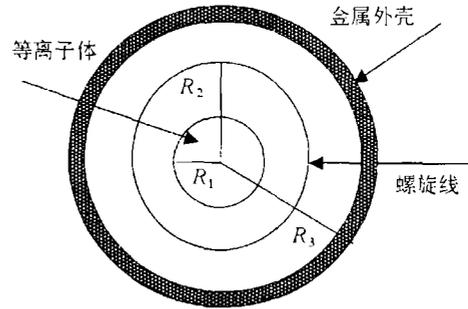


图1 含有部分填充的均匀等离子体柱的螺旋线截面

其中

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

等离子体及其他各个区域中介质的磁导率均可以认为是真空中的磁导率  $\mu_0$ , 为简单起见以下将  $\mu_0$  写作  $\mu$ .

以轴对称解

$$E_z = EJ_0(Tr), \quad B_z = BJ_0(Tr) \quad (9)$$

代入方程组 (8) 式可得

$$T^2 = \frac{(\omega^2 a - \beta^2)(a + \mu\epsilon_3) \pm (\omega^2 a - \beta^2) \sqrt{(a + \mu\epsilon_3)^2 - 4(a + b^2)\mu\epsilon_3}}{2(a + b^2)} \quad (10)$$

式中

$$a = \mu\epsilon_1 - \frac{(\omega\epsilon_2\mu)^2}{\omega^2\mu\epsilon_1 - \beta^2}, \quad b = \frac{\beta\epsilon_2\mu}{-j\omega\mu\epsilon_1 + j\beta^2/\omega} \quad (11)$$

(9) 式中  $J_0$  为零阶 Bessel 函数,  $T$  的两个解分别用  $T_1$  和  $T_2$  表示, 轴向电磁场分量由这两个解的线性组合构成:

$$\begin{aligned} E_z &= E_1 J_0(T_1 r) + E_2 J_0(T_2 r) \\ B_z &= y_1 E_1 J_0(T_1 r) + y_2 E_2 J_0(T_2 r) \end{aligned} \quad (12)$$

式中磁场与电场之比为

$$y_{1,2} = \frac{B_{z1,2}}{E_{z1,2}} = \frac{T_{1,2}^2 b}{T_{1,2}^2 + \beta^2 - \omega^2 a} \quad (13)$$

等离子体柱边界 ( $R_1$ ) 的另两个切向场分量  $E_{\theta}(R_1)$  和  $B_{\theta}(R_1)$  可通过轴向场分量求出, 然后可表示为

$$\begin{bmatrix} E_{\theta}(R_1) \\ E_z(R_1) \\ B_{\theta}(R_1) \\ B_z(R_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p \\ \mathbf{B}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中  $\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p$  为  $2 \times 2$  矩阵.

等离子体柱与螺旋线之间的真空间隙 ( $R_1 \leq r \leq R_2^-$ ) 中的纵向场分量写作

$$\begin{aligned} E_z &= AI_0(\gamma r) + BK_0(\gamma r) \\ B_z &= CI_0(\gamma r) + DK_0(\gamma r) \end{aligned} \quad (15)$$

$I_0, K_0$  为零阶变型 Bessel 函数. 螺旋线内侧柱面上的切向分量场可通过连续条件由等离子体柱面上的切向场分量求出, 并表示为

$$\begin{bmatrix} E_{\theta}(R_2^-) \\ E_z(R_2^-) \\ B_{\theta}(R_2^-) \\ B_z(R_2^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & \mathbf{B}_v \\ \mathbf{C}_v & \mathbf{D}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\theta}(R_1) \\ E_z(R_1) \\ B_{\theta}(R_1) \\ B_z(R_1) \end{bmatrix} \quad (16)$$

这里  $\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v, \mathbf{D}_v$  也均为  $2 \times 2$  矩阵. 以 (14) 式代入 (16) 式可将  $R_2^-$  柱面上的切向电磁场用  $E_1, E_2$  表示. 消去  $E_1, E_2$  后得

$$\begin{bmatrix} B_\theta(R_2^-) \\ B_z(R_2^-) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_{//}] \begin{bmatrix} E_\theta(R_2^-) \\ E_z(R_2^-) \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中导纳矩阵:

$$[\mathbf{Y}_{//}] = [\mathbf{C}_v \mathbf{A}_p + \mathbf{D}_v \mathbf{B}_p] [\mathbf{A}_v \mathbf{A}_p + \mathbf{B}_v \mathbf{B}_p]^{-1} \quad (18)$$

在螺旋线与金属外套之间 ( $R_2^+ \leq r \leq R_3$ ) 设填充介质的介电常数为  $\epsilon_4$ , 轴向电磁场的解可写为

$$\begin{aligned} E_z &= F_1 I_0(hr) + F_2 K_0(hr) \\ B_z &= G_1 I_0(hr) + G_2 K_0(hr) \end{aligned} \quad (19)$$

在金属外套内侧柱面  $R_3$  上它们需满足切向分量为零的边界条件, 由此可类似得到

$$\begin{bmatrix} B_\theta(R_2^+) \\ B_z(R_2^+) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_{///}] \begin{bmatrix} E_\theta(R_2^+) \\ E_z(R_2^+) \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中的导纳矩阵  $[\mathbf{Y}_{///}]$  也为  $2 \times 2$  矩阵. (14), (16) 和 (20) 式中的矩阵  $\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v, \mathbf{D}_v$  及  $[\mathbf{Y}_{///}]$  的具体表达式见文献 [4].

剩下的工作是需要连接螺旋线内外侧面  $R_2^-$  和  $R_2^+$  的场解. 我们采用螺旋导面模型近似以简化求解, 该螺旋导面模型导致的边界条件为 [5]

$$\left. \begin{aligned} E_\theta^+ \cos \psi + E_z^+ \sin \psi &= E_\theta^- \cos \psi + E_z^- \sin \psi = 0 \\ E_z^+ \cos \psi - E_\theta^+ \sin \psi &= E_z^- \cos \psi - E_\theta^- \sin \psi \\ H_\theta^+ \cos \psi + H_z^+ \sin \psi &= H_\theta^- \cos \psi + H_z^- \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中  $\psi$  为螺旋线的螺距角. 由 (21) 式的前两式可得

$$\left. \begin{aligned} E_\theta(R_2^+) &= E_\theta(R_2^-) = E_\theta(R_2) \\ E_z(R_2^+) &= E_z(R_2^-) = E_z(R_2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

利用 (22) 式以及 (17), (20) 式可导出

$$\begin{bmatrix} B_\theta(R_2^+) - B_\theta(R_2^-) \\ B_z(R_2^+) - B_z(R_2^-) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_{///} - \mathbf{Y}_{//}] \begin{bmatrix} E_\theta(R_2) \\ E_z(R_2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

利用 (21) 中的第 3 式在上式中消去磁场, 再利用 (21) 式的第 1 式消去一个电场分量后便导致色散方程:

$$M_3 \tan^2 \psi + (M_1 - M_4) \tan \psi - M_2 = 0 \quad (24)$$

式中的  $M_1 \sim M_4$  为两个导纳矩阵之差的矩阵元:

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_{///} - \mathbf{Y}_{//}] \quad (25)$$

### 3 混合模的特性

根据现有的研究,认为等离子体填充螺旋线行波管性能优于对应的真空器件的主要原因在于引入等离子体柱后形成的螺旋线-等离子体柱混合模式成为等离子体填充管的工作模式<sup>[1,2]</sup>。因此,具体的分析混合模式对于深入了解该类器件的工作机理是重要的。

首先,(8)式表明由于磁化等离子体呈现的各向异性介电张量,轴向电场和磁场所满足的波动方程发生耦合,在每个方程式中含有电场和磁场两者。这是等离子体填充的线束型微波电真空器件的一般特性,在导致新的性能的同时也导致了对于混合模进行分析和计算的复杂性。

由色散方程(24)式计算的色散曲线示于图2。所选择的螺旋线-等离子体柱的几何参量为 $R_1 = 1.4\text{cm}$ ,  $R_2 = 2.2\text{cm}$ ,  $R_3 = 3.8\text{cm}$ ,  $\tan\psi = 0.1085$ 。这里刻意选取较大的螺旋线半径,以便与今后的实验测量结果作比较。为了有可能实际进行测量,实验系统根据缩尺法将行波管的工作频率移到1GHz以下。等离子体电子浓度取为 $n = 2 \times 10^{16}(\text{1/m}^3)$ ,  $f_p = 1.27\text{GHz}$ 。聚焦直流磁场也相应地取较低的值 $B_0 = 0.05\text{T}$ ,  $f_c = 1.4\text{GHz}$ 。图2示出的外侧两支曲线(曲线1,4)为计算所得色散曲线。作为比较,同时示出了未填充等离子体的螺旋线慢电磁波模的色散曲线(曲线3),和圆波导中含有部分填充等离子体柱时的 Trivelpiece Gould 模(TG模)的色散曲线(曲线2),该模式为具有静电特性的空间电荷波模<sup>[3,6]</sup>。

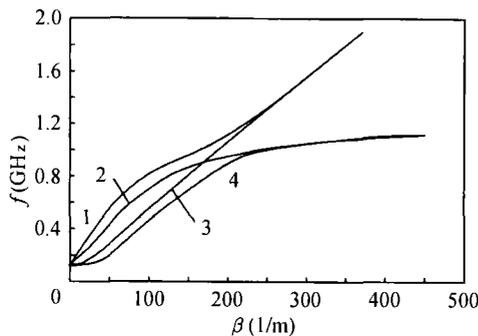


图2 含有部分填充等离子体柱的螺旋线混合模的色散曲线

由图2可见,对于上面的色散曲线分支(曲线1),以螺旋线模和TG模的交汇点 $\beta = 180(\text{1/m})$ 作为分界线,在低波数区该模式接近TG模(曲线2),在高波数区则接近螺旋线模(曲线3)。对于色散曲线的下分支曲线(曲线4)情况相反。在交汇点附近的波数(频率)范围内则形成了由螺旋线模和TG模混合而成的混合模,离开交汇点较远处,由于螺旋线模和TG模相速相差较大,不可能形成混合模。

对于同样的螺旋线-等离子体柱几何参量及等离子体电子浓度、聚焦磁场值,计算了轴向电场的径向分布随频率的变化,结果示于图3。图中示出了以螺旋线内侧的 $|E_z(R_2)|$ 值归一化的 $|E_z(r)|$ 径向变化。由图可见,当频率达到800MHz时,轴线( $r = 0$ )上的电场幅度已超过螺旋线内壁的电场值。与图2对照,频率800MHz的波数为 $\beta = 155(\text{1/m})$ ,已接近交汇点 $\beta = 180(\text{1/m})$ ,此时可形成混合模。对于未填充等离子体的螺旋线,慢电磁波为表面波,场离开螺旋线单调下降,在轴上达到极小。图3示出的在混合模形成的频率范围内大为增强的轴向电场将使电子束与高频系统的耦合大为增加,成为导致行波管性能改善的主因。

等离子体填充的线性束微波管的另一显著优点是,由于等离子体的自聚焦作用,可以降低聚焦磁场强度,甚至取消聚焦磁场。我们也计算了无聚焦磁场时轴向电场的径向分布随频率的变化,结果示于图4。值得注意的是无聚焦磁场时的介电张量退化为标量,但是由于等离子体柱与螺旋线之间存在间隙,在等离子体柱面上以表面扰动形式存在的TG模仍然可以沿柱传播(见文献[3],第4章)。图4所示的 $E_z(r)$ 径向分布在等离子体柱面上为极大,向两侧递减,这也可以看作是该类TG模存在的一个证明。图中示出的场分布随频率的变化特征不明显。由于取

消聚焦磁场的可能性对于行波管的实际使用有着巨大的吸引力, 对于这种情况下电磁波模式特性的研究值得加倍注意。

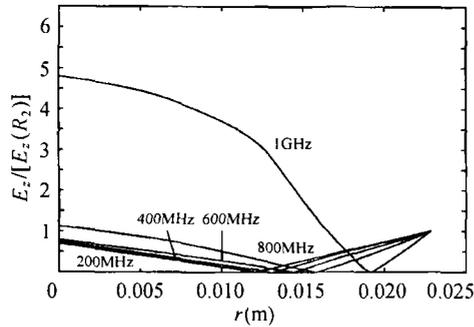


图3  $E_z$  径向分布随频率的变化

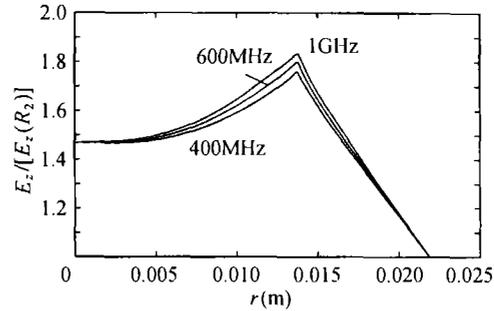


图4 无聚焦磁场时  $E_z$  的径向分布随频率的变化,  
 $n = 1.26 \times 10^{17} (1/m^3)$ ,  $f_p = 3.19GHz$

## 4 结 论

通过求解色散方程以具体地获得在含有部分填充等离子体柱的螺旋线中混合模的形成, 在  $\omega < \omega_p < \omega_c$  和聚焦磁场取低场强值条件下, 计算的轴向电场的径向分布显示, 在耦合模形成的频率范围内, 与对应的螺旋线内为真空的情况比较, 电场强度大为增强, 等离子体填充型螺旋线行波管的增益得以显著提高获得解释。在无聚焦磁场情况下计算的电场轴向分量的径向分布证实表面扰动型 TG 等离子体模可以在有间隙存在的条件下沿等离子体柱传播, 等离子体柱的存在仍然可能有利于行波管的工作。

对于含有部分填充等离子体柱的螺旋线中混合波特性的研究有待于从行波管设计的角度深入进行, 例如在更符合实际工作的条件下对场分布的分析和研究。等离子体柱与螺旋线的间隙以及聚焦磁场场强的影响也有待于进一步探讨。无聚焦磁场情况下模式特性的研究应予以特别注意。

## 参 考 文 献

- [1] G. S. Nusinovich, Y. Camel, T. M. Antonsen, Jr, D. M. Goebel, J. Santoru, Recent progress in the development of plasma-filled traveling-wave tubes and backward-wave oscillators, IEEE Trans. on Plasma Sci., 1998, 26(3), 628-645.
- [2] S. Kobayashi, T. M. Antonsen, Jr, S. Nusinovich, Linear theory of a plasma loaded, helix type, slow wave amplifier, IEEE Trans. on Plasma Sci., 1998, 26(3), 669-679.
- [3] A. W. Trivelpiece, Slow Wave Propagation in Plasma Waveguides, San Francisco, San Francisco Press, 1967, 22.
- [4] 陈光, 部分填充等离子体的螺旋线电磁特性的理论与实验研究, 北京, [硕士论文], 北京大学, 2001.
- [5] R. E. Collin, Foundations for Microwave Engineering, New York, McGraw-Hill, 1966, 393.
- [6] A. W. Trivelpiece, R. W. Gould, Space charge waves in cylindrical plasma columns, JAP, 1959, 30(11), 1784-1794.

## STUDY OF THE HYBRID MODE IN THE HELIX WITH A PARTIALLY FILLED PLASMA COLUMN

Gong Zhonglin    Chen Guang    Zhang Jinlin\*    He Runya

*(Department of Electronics, Peking University, Beijing 100871, China)*

*\*(Beijing Vacuum Electronics Research Institute, Beijing 100016, China)*

**Abstract** The dispersion equation of the axial symmetric hybrid mode inside the helix with a partially filled plasma column is derived, its dispersion curves are calculated, and the conditions to form that mode are illustrated. The effect of confining magnetic field on the radial profile of axial electric field is studied. In the situation that the strength of confining magnetic field has been entrusted a practical low value, the calculated radial profile shows much stronger coupling of the filed to the electron beam. In the situation without confining magnetic field, a Trivelpiece-Gould mode propagating along the surface of the plasma column presents.

**Key words** Plasma-filled TWT, Helix, Hybrid mode

龚中麟: 男, 1940年生, 教授、博士生导师, 中国电子学会会士, IEEE高级会员, 主要研究方向包括: 电磁场理论、天线与电波传播、微波电子学等.

陈光: 男, 1976年生, 现在美国攻读博士学位, 研究方向为计算电磁学.

张晋林: 男, 1937年生, 教授级高工, 研究方向为微波电子学.

何润亚: 男, 1977年生, 硕士, 研究方向为电磁场与微波技术.