

# 信号奇异性分析<sup>1</sup>

乔应军

(北京航空航天大学电子工程系 北京 100083)

**摘 要** 信号的奇异性往往携带了信号最重要的信息, 因此, 对奇异性的研究是一项很有价值的工作。由于传统的信号处理工具(如傅氏变换)在奇异性处理方面的局限性, 该文利用多重分形理论对信号的奇异性进行分析, 并给出计算算法和一些初步的结果, 同时结果分析也表明了多重分形理论是分析信号奇异性的有效方法。

**关键词** Lipschiz 指数, 多重分形, 信号奇异性

**中图分类号** TN911.72

## 1 引言

信号奇异性分析是信息处理中很重要但却很困难的问题, 信号中的不规则结构和奇异性(如图像纹理和信号尖点)是信号有意义且重要的特性。虽然传统的方法(如傅里叶变换)对时间平稳且规则信号提供了完整的描述, 但是对于自然界中大量存在的带有奇异性的不规则信号来讲, 传统方法往往难以奏效, 基于传统方法的局限性, 本文运用多重分形来对一种普遍的信号奇异性即整体奇异性(Singularity Everywhere)进行分析, 并给出一些初步结果和算法分析。自然界中无数非线性过程和现象的背后隐藏着某种规律性, 而分形理论能使人们以新的观念新的手段来处理这些难题, 透过无序的混乱现象和不规则性揭示隐藏在复杂现象背后的规律, 因此分形理论必定会成为信号奇异性处理的重要工具。

## 2 多重分形在一维信号中的应用

信号的奇异性一般可分为局部奇异性(Local Singularity)和整体奇异性(Singularity Everywhere), 对于局部奇异性我们可以用 Lipschiz 指数  $\alpha$  来刻画信号的正则性, 亦即连续性和可微性, 而对于整体奇异性就可以利用多重分形进行分析。这种方法允许对像噪声一样的复杂信号进行确定性处理。信号中的整体奇异性因为有大量的奇异点, 使得我们在局部奇异性处理中对 Lipschiz 指数的估算变得难以实现, 而多重分形则是一种对处处存在不同类型奇异点的奇异性的更有效的描述。

对信号  $f(t) \in (0, T)$ , 我们定义测度  $\mu_{f(T_i)}(\delta)$ ,  $T_i$  是与支撑  $T$  相交的  $\delta$ -网坐标立方体,  $N_\delta$  是覆盖支撑  $T$  的  $\delta$ -网坐标立方体的个数, 并且有  $\mu_{f(T_i)} \propto \delta^{\alpha_i}$ , 也就是对不同的  $T_i$  可能有不同的  $\alpha$  值, 并且很有可能有多于一个  $T_i$  的  $\delta$ -网坐标立方体有着同样的  $\alpha$  值, 记为  $N_\delta(\alpha)$ , 并有<sup>[1]</sup>

$$N_\delta(\alpha) \propto \delta^{-f(\alpha)} \quad (1)$$

指数  $f(\alpha)$  是多重分形谱, 并且在经常发生的情形下,  $f(\alpha)$  是一条光滑的倒锥形曲线。这样, 我们能利用  $f(\alpha)$  作为奇异性特性来代替 Lipschiz 指数  $\alpha$ 。在实际中, 直接对给定测度来计算  $f(\alpha)$  是很困难的; 相反, 由多重分形我们知道, 在所有  $\delta$ -网坐标立方体上定义和:

$$S_\delta(q) = \sum_{i=1}^{N_\delta} (\mu_{f(T_i)}(\delta))^q, \quad -\infty < q < \infty \quad (2)$$

<sup>1</sup> 1999-03-19 收到, 2000-07-27 定稿

并且  $S_\delta(0) = N_\delta$ ，即覆盖支撑  $T$  所需的  $\delta$ -网坐标立方体个数，而且有幂定律  $S_\delta(q) \propto \delta^{-\tau(q)}$ ，这里定义：

$$\tau(q) = \sup_{0 \leq \alpha < \infty} (f(\alpha) - q\alpha) \quad (3)$$

$$\tau(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(S_\delta(q))}{-\log(\delta)} \quad (4)$$

多数情况下， $f(\alpha)$  是  $\alpha$  的可微函数，假设对每个  $q$ ，(3) 式中的上确界是在  $\alpha = \alpha(q) > 0$  处达到，则有  $d(f(\alpha) - q\alpha)/d\alpha = 0$ ，求导得到

$$q = df(\alpha(q))/d\alpha \quad (5)$$

再由 (3) 式得

$$\tau(q) = f(\alpha(q)) - q\alpha(q) \quad (6)$$

若  $\alpha$  作为  $q$  的函数可微，则

$$d\tau(q)/dq = (df/d\alpha)(d\alpha/dq) - \alpha - q(d\alpha/dq) \quad (7)$$

代入  $\alpha = \alpha(q)$  由 (5) 式得

$$\alpha(q) = -d\tau(q)/dq \quad (8)$$

通常最容易求出随  $q$  变化的  $\tau(q)$ ，因此可以用 (6),(8) 式来求解  $f(\alpha(q))$ ， $\alpha(q)$ ，使得  $f(\alpha)$  相对于  $\alpha$  的图可以通过参数  $q$  刻画出来。

综上所述，利用多重分形进行分析，有以下步骤：

(1) 定义测度  $\mu_{f(T_i)}(\delta)$ 。

(2) 对某些  $q$  值，计算  $S_\delta(q) = \sum_{i=1}^{N_\delta} (\mu_{f(T_i)}(\delta))^q$ ， $(-\infty < q < \infty)$ 。

(3) 对每一个  $q$  值，利用式  $S_\delta(q) \propto \delta^{-\tau(q)}$  用双对数坐标法估算指数  $\tau(q)$ 。

(4) 由 (6) 式得到  $f(\alpha) = q\alpha + \tau(q)$  以及  $\alpha(q) = -d\tau(q)/dq$  求出  $f(\alpha(q))$ ， $\alpha(q)$ ，通过参数  $q$  刻画多重分形谱  $f(\alpha)$ - $\alpha$ 。

在这个方法中，成功的关键就在于信号测度的恰当选择。将曲线放置在二维平面中，用  $\delta$ -网坐标立方体（即小正方形）来覆盖，二维平面可以设定为  $256 \times 256$ 。覆盖曲线  $f(t)$  的  $\delta$ -网坐标立方体可取为  $\delta = 2, 4, 8, 16 \dots$ 。步骤为：(1) 对信号  $f(t)$  采样 256 个点，并在相应的平面位置中置 1；(2) 以规模  $\delta$  对二维平面进行分割，并求出每一个  $\delta$ -网坐标立方体中 1 的个数  $N$ ，而测度  $\mu_{f(T_i)}(\delta) = N/(256)$ ；其余步骤与前相同。对图 1 中的 Weierstrass 曲线 -1  $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$ ， $s = 1.5$ ；对图 2 中的 Weierstrass 曲线 -2  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} (1 - \cos \lambda^k t)$ ， $s = 1.5$ 。绘制出各自的多重分形谱  $f(\alpha)$ ，画在一起作比较如图 3。

利用此算法分析的结果容易看出，曲线越复杂则维数越高，而对于具有相同维数即相同复杂程度的曲线如图 1 和 2，当有相同维数  $s=1.5$  时，单一的维数便无法区分两个维数相同但“看上去”仍很不一样的曲线，而多重分形则能弥补单一维数的不足。从图 3 中可以看出，尽管两者维数较为接近，但它们的多重分形谱却很不一样，这也说明多重分形在刻画事物特性方面比单一的维数更细致更深入。

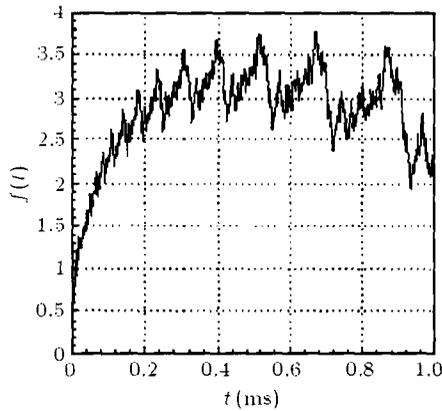


图 1 Weierstrass 曲线-1

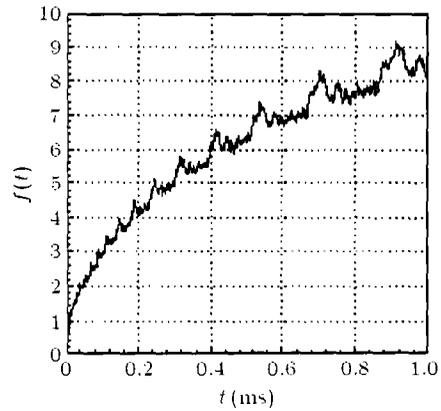


图 2 Weierstrass 曲线-2

我们对多重分形谱作进一步的分析可以得知, 当  $q = 0$  时, 有  $S_\delta(0) = N_\delta$ , 故由 (6) 式  $\tau(0) = f(\alpha(0)) =$  分形维数, 当 (5) 式  $df(\alpha(q))/d\alpha = 0$ , 对应了  $f(\alpha)$  的最大值. 再考虑  $q = 1$ , 有  $S_\delta(1) = 1$ , 因此,  $\tau(1) = 0$ , 利用 (5) 和 (6) 式,  $f(\alpha(1)) = \alpha(1)$ , 并且  $df(\alpha(1))/d\alpha = 1$ , 再由 (2) 式有

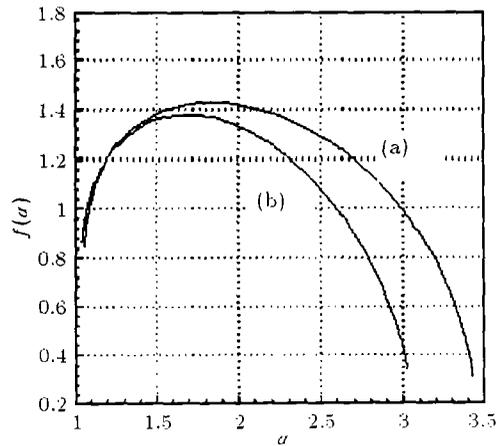


图 3 多重分形谱的比较  
(a) Weierstrass 曲线-1 (b) Weierstrass 曲线-2

$$\frac{d}{dq} \ln S_q(q) = \frac{\sum_{i=1}^{N_\delta} (\mu_{f(T_i)}(\delta))^q \ln \mu_{f(T_i)}(\delta)}{\sum_{i=1}^{N_\delta} (\mu_{f(T_i)}(\delta))^q} \quad (9)$$

故在  $q = 1$  时  $\frac{d}{dq} \left( \frac{\ln S_\delta(q)}{-\ln(\delta)} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{N_\delta} \mu_{f(T_i)}(\delta) \ln \mu_{f(T_i)}(\delta)}{-\ln \delta}$ , 假定当  $\delta \rightarrow 0$  时这个导数收敛, 则由 (4) 和 (9) 式可得

$$\alpha(1) = -\frac{d\tau(1)}{dq} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N_\delta} \mu_{f(T_i)}(\delta) \ln \mu_{f(T_i)}(\delta)}{\ln \delta} \quad (10)$$

表达式  $\sum_{i=1}^{N_\delta} (\mu_{f(T_i)}(\delta)) \ln(\mu_{f(T_i)}(\delta))$  称为由  $\delta$ -网立方体给出测度  $\mu$  的划分熵, 其中的和是对网的边长为  $\delta$  的立方体所取. 它表示由  $\mu$  度量的关于点  $x$  的信息平均总量. 它由了解包含点  $x$  的立方体  $\mu_{f(T_i)}(\delta)$  给出. 因此  $\alpha(1)$  即关于尺度  $\delta$  的熵称为  $\mu$  的信息维数, 对应于曲线  $f(\alpha)$ - $\alpha$  斜率为 1 的点.  $f(\alpha)$ - $\alpha$  的左半部分对应于  $q > 0$  的情况, 右半部分对应于  $q < 0$  的情况,  $q = 0$  时  $f(\alpha(0))$  便是集合的分形维数.

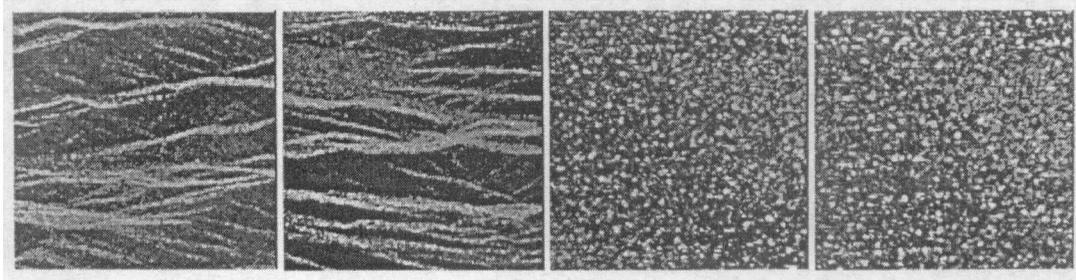
### 3 多重分形在图像处理中的应用

多重分形可以从图像中取出许多有价值的特性，同样仅靠单一的维数难以对图像进行详尽的描述，许多图像虽然有相同的维数，但对于人眼来讲它们完全是不一样的，因此，运用多重分形便成为图像处理的必要工具。

我们将图像放置在三维空间中考虑。在三维空间  $(x, y, z)$  定义了测度 [2]:

$$\mu_{f(V_i)}(\delta) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{(x,y,f(x,y)) \in V_i} 1_{V_i}(x,y,z) \right] \tag{11}$$

其中灰度值  $z = f(x, y)$ ， $V_i$  为某一  $\delta$ -网坐标立方体 (这里为小立方体)， $1_{V_i}(x, y, z)$  为 1 或 0 当  $(x, y, z)$  在  $V_i$  中或不在，其中像素点个数  $N = D \times D$ 。对于图像中的像素点  $(x_i, y_i)$ ，如果其对应的灰度值为  $z_i$ ，那么我们将高度为  $z_i$  的小立方柱中所有的小立方体均填充为 1，来表示该像素点对三维空间  $(x, y, z)$  的填充能力，于是便得到一个图像在三维空间的分布，测度仍然用 (11) 式。对图 4 中的 SAR 图像进行处理后得到的多重分形谱如图 5。



(a) 山丘 1 (b) 山丘 2 (c) 海面 1 (d) 海面 2

图 4 SAR 图像

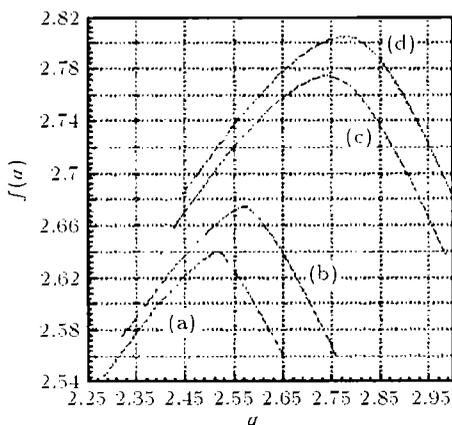


图 5 SAR 图像多重分形谱

从图 5 中可以看出，对于相似的图像如海面 1，海面 2 有着相近的维数分别是 2.77 和 2.8，并且其位置和分布也很相近。再如山丘 1，山丘 2 维数分别是 2.64 和 2.672 也很相近，并且  $f(\alpha)$  的位置和分布也很相近。而对于不大相同的图像如山丘 1，山丘 2 和海面 1，海面 2，它们的维数大小、位置、分布等都显得有较大差别。可见多重分形确能从不同的图像中提取出各自不同的纹理特征 [3]；而从相似的图像中提取出相似的纹理特征。在这里，维数表示图像对三维空间的填充能力。

多重分形刻画了无序动力系统的行为特性，测度的选择是进行多重分形分析的关键，多重分形谱则能有效地区分不同类型的图像，显示了不同图像各自不同的纹理特征，从我们对 SAR 图像的分析可以看出，单一的分形维 (这里我们使用的是计盒维数) 在一定程度上刻画了事物的统计特性，它衡量了不规则集合对空间的填充能力。事实上，单一的分形维数已经被用来进行

雷达微弱目标信号的识别与检测。从强噪声背景中提取出目标信号,用维数来区分目标和噪声背景的不同从而提取出目标信号来。尽管如此,在复杂的图像纹理分析中,单一的维数仍不能进行细致深入的分析,而多重分形则弥补了单一维数的不足,对于分形维数相同的集合仍然能有效地区分识别,获取信号的信息。与传统的信号处理的方法相比,分形理论更能有效方便地描述复杂信号的分布,不需要进行复杂的运算和了解信号精确的信息。

#### 4 结 论

对奇异性的分析是信息处理的有效途径,因为它携带了信号许多重要且有价值的信息,而传统的方法(如傅里叶变换)对此却难以发挥大的作用。在本文中,新的研究工具——多重分形在信号整体奇异性分析上显示了它的优越性,这是以往传统方法所不能比拟的。Lipschiz 指数  $\alpha$  和多重分形谱  $f(\alpha)$  构成了信号奇异性分析的总框架。在局部奇异性分析中,可以用 Lipschiz 指数  $\alpha$  来刻画信号的不规则性和奇异性,而当信号中存在大量的奇异点的情况下(即整体奇异性),使得求解  $\alpha$  变得非常困难而无从下手,这时多重分形便成为我们解决问题的新途径。它不仅被用于一维信号处理,而且也被用于二维图像的识别和检测以及纹理特征的分析中,因而,多重分形将会是信号奇异性研究的重要工具。

#### 参 考 文 献

- [1] [英] Kenneth Falconer 著,曾文曲,刘世耀译,分形几何——数学基础及其应用,沈阳,东北大学出版社出版,1993,第 17 章.
- [2] A. Langi, W. Kinsner, Singularity processing of nonstationary signal, IEEE Trans. on Electrical and Computer Engineering, 1996, 2(3), 687-691.
- [3] F. Arduini, S. Fioravanti, D. D. Giusto, A multifractal-based approach to natural scene analysis, IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing, 1991, 4(6), 2681-2684.

## ANALYSIS OF SIGNAL SINGULARITY

Qiao Yingjun

(Dept. of Electron. Eng., Beijing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract** Singularity often carries the most important information of signal, so it is valuable to study the singularity of signal. Because of the limitation of classical approaches (such as Fourier transform) in processing the singularity of signal, this paper applies multifractal theory to analyse the singularity of signal, and presents an algorithm and some fundamental results which indicate that multifractal theory is really a useful tool for analysing signal singularity.

**Key words** Lipschiz exponent, Multifractals, Signal singularity

乔应军: 男, 1975 年生, 硕士, 主要从事航空电子综合化、计算机网络、图像处理等方面的研究工作。