

# 基于非均匀采样模型的 DDS 相位截断杂散谱分析

曹平安 安琪 唐世悦 陆增援

(中国科学技术大学快电子学实验室 合肥 230026)

**摘要** 该文提出直接数字频率合成器(DDS)的非均匀采样模型,在此模型的基础上对 DDS 的相位截断频谱杂散进行了分析和计算,给出了一些重要的结论并指出了影响杂散特性一种较为准确的解释。同时给出了一种抑制相位截断噪音的方法。Matlab 仿真结果表明在一定条件下该方法能够有效抑制相位截断误差。

**关键词** 直接数字频率合成器, 相位截断, 杂散噪音, 非均匀采样

中图分类号: TN742.1

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)11-2182-04

## An Analysis of DDS Spurious Spectrum Based on Non-uniformly Sampled Model

Cao Ping An Qi Tang Shi-yue Lu Zeng-yuan

(Fast Electronics Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

**Abstract** A non-uniformly sampled model to DDS is introduced, based on which an analysis of DDS phase truncation noise is deduced and some important conclusions including the explanation to this kind of spur noise are derived. Further more, a technique to restrain DDS spur noise is introduced. The Matlab simulation indicates that DDS spur noise can be effectively restrained using this technique under some restriction conditions.

**Key words** Direct digital frequency synthesizer, Phase truncation, Spurious noise, Non-uniformly sample

### 1 引言

直接数字频率合成器(DDS)技术在 70 年代初由Tierney 等人<sup>[1]</sup>提出以后,近年来迅速发展成为一种新的频率合成技术。全数字化结构的DDS具有许多优点,但由于引入了输出杂散的固有缺点,因此对DDS的相位截断噪音的分析是整个DDS研究的关键部分。Nicholas<sup>[2]</sup>采用数论方法得到了相位截断杂散谱的幅度和位置分布的计算方法,也有学者采用信号分析<sup>[3]</sup>以及时域波形分解<sup>[4]</sup>等分析手段对相位截断杂散进行了分析。但是,所有这些都是基于对时域进行均匀采样的假设,存在分析困难以及计算量大等缺点。基于此,本文提出了DDS的非均匀采样模型,对相位截断杂散进行分析并指出了影响截断杂散特性的真正原因。该方法简单易懂、概念清楚以及计算简单。进一步在该模型的基础上,本文提出了一种能够有效抑制相位杂散的处理方法。Matlab的仿真结果表明该方法切实有效。

### 2 DDS 工作原理

假设 DDS 的相位累加器的  $N$  位输出中只有高  $A$  位用于 ROM 寻址,相位截断为  $B=N-A$ ,输出频率控制字为  $K$ ,工作时钟为  $T_s$ 。于是 DDS 的模型可以简化为采样信号对正弦波的均匀采样。当  $K=1$  时,必须满足  $\omega 2^N T_s = 2\pi$ ,于是可得输出频率为  $f = f_s / 2^N$ ;当  $K \neq 1$  时,表示以  $KT_s$  的采样周期对正弦波进行采样,所以输出频率应该为  $K=1$  时的  $K$  倍,所以输出频率为  $f = Kf_s / 2^N$ 。综合可知,当频率控制码为  $K$

时,DDS 的输出频率为  $f = Kf_s / 2^N$ 。

但这只是理想的DDS,实际上由于ROM的容量使得相位累加器的  $N$  位输出只有高  $A$  位是有效的,这就出现了相位截断误差,假设该误差序列为  $e_p(n)$ ,对相位盘<sup>[5]</sup>分析可知

$$e_p(n) = Kn - 2^B [Kn / 2^B] = (Kn) \bmod 2^B \quad (1)$$

考虑误差为 0 的时候,即满足条件

$$\frac{2\pi}{2^N} Kk_1 = \frac{2\pi}{2^A} k_2, \quad k_1 \text{ 和 } k_2 \text{ 互质} \quad (2)$$

$$\text{即} \quad Kk_1 = 2^B k_2 \quad (3)$$

由于任意  $K$  都可以写成

$$K = 2^l (2p+1), \quad l, p \text{ 为整数} \quad (4)$$

所以  $2^l = \text{GCD}(K, 2^B)$ ,其中  $\text{GCD}(K, 2^B)$  表示  $K$  和  $2^B$  的最大公约数,代入式(3)得

$$k_1 = \frac{2^B}{\text{GCD}(K, 2^B)}, \quad k_2 = \frac{K}{\text{GCD}(K, 2^B)} \quad (5)$$

将理想的相位累加情况(相位步进  $2\pi K / 2^N$ )与实际的相位累加情况(相位步进  $2\pi / 2^A$ )作对比如图 1 所示,可见当满足式(3)时,两相位值重合。因此,实际相位所对应的采样点,如果间隔为  $k_2$  的话,那么它们所对应的相位误差相等,如图 1 中的点 A 和点 B。如果使用系统理想的采样率来表示的话,则  $k_2$  需要换成  $k_1$ 。这表明,系统采样点  $n$  和  $(n+k_1)$  所得到的误差值相同,记  $M_k$  为

$$M_k = k_1 = \frac{2^B}{\text{GCD}(K, 2^B)} \quad (6)$$

则DDS的输出正弦序列 $s_p(n)$ 为



即谱线数  $M$  为

$$M = M_k / 2 = \frac{2^B}{2 \cdot \text{GCD}(k, 2^B)} \quad (19)$$

(2) 谱线幅度 由于  $N$  位相位累加器的输出为  $A$  位, 就使得有效的位数变为  $(N-A)$  位, 从而有  $2^N / 2^A = 2^{N-A} = 2^B$  个数据重叠, 等间距相加相当于均匀采样, 所以在计算相位幅度时式(17)需要改为

$$A(i) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^B}{M_k} e^{-jm2\pi/M_k} = \frac{2^B}{M_k} \frac{1}{1 - \cos(2i\pi/M_k) + j \sin(2i\pi/M_k)} \quad (20)$$

所以有

$$|A(i)| = \frac{2^B}{M_k} \frac{1}{\sqrt{[1 - \cos(2i\pi/M_k)]^2 + \sin^2(2i\pi/M_k)}} = \frac{2^B}{2M_k} \csc \frac{i\pi}{M_k} \quad (21)$$

于是带入式(18)可求得频率  $f_i$  对应的幅度:

$$\rho(f_i) = \frac{2\pi}{f_o/f_s} \frac{2^B}{2M_k} \csc \frac{i\pi}{M_k} = \frac{2\pi}{2^N} \frac{2^B}{2M_k} \csc \frac{i\pi}{M_k} = 2^{B-N} \frac{\pi/M_k}{\sin(i\pi/M_k)} \quad (22)$$

可见, 杂散频谱的幅度特性是由相位截断和该非均匀采样模型的大周期特性决定的。

(3) 信噪比  $S/N$  由式(22)可得信噪比为

$$S/N \approx 20 \lg 2^{B-N} = -6.02(N-B) \quad (23)$$

可见, 舍位  $B$  每减少一位, 能改善杂散约 6dB。舍位越少, 杂散幅度就越小; 反之, 舍位越多, 杂散幅度就越大。

## 5 相位截断误差抑制

相位截断误差是影响 DDS 使用的一个重要的因素, 有很多学者都在积极寻找方法来降低它对输出频谱的影响<sup>[8]</sup>, 他们主要是基于破坏误差相位的周期性, 对 ROM 查找表压缩等的考虑, 本文提出一种全新的抑制方法。

由前面的分析可知, 尽管在小粒度的采样时所得到的相位存在误差, 但是在考虑大的周期采样的话, 只要满足采样周期  $T_s^* = M_k \cdot T_s$ , 那么所得到的新序列就不存在相位误差了, 采样自然就是均匀采样了。为此可以将 ROM 查找表输出数据进行周期为  $T_s^*$  的抽样, 那么所得到的新的序列在通过 DAC, 所得的信号将会大大改善, 如图 3 所示。图 3 中的  $M_k$  抽样模块是以  $f_s/M_k$  的频率对输出序列进行抽样的, 式(4)指出, 任何数字  $K$  总可以表示成  $K = 2^l(2p+1)$  ( $l, p$  为整数), 于是  $\text{GCD}(2^B, K) = 2^l$ , 得  $M_k = 2^{B-l}$ 。所以在硬件逻辑实现上只要将  $K$  右移就可以将  $l$  找出从而可以求出  $M_k$ , 然后再将采样频率  $f_s$  进行  $M_k$  分频即可实现。图 4 是当  $K=56, N=10, A=5$  时的复函数  $e^{jm}$  波形的 Matlab 仿真波形图。根据前面的推导, 频谱分布应该为  $(K/2^N + i/M_k)f_s = [0.055, 0.305, 0.555, 0.805]$ , 与仿真结果一致。图 4 是改进后的频谱图,

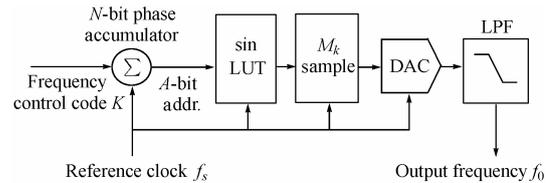


图 3 改进的 DDS 结构图

Fig.3 Improved structure of DDS

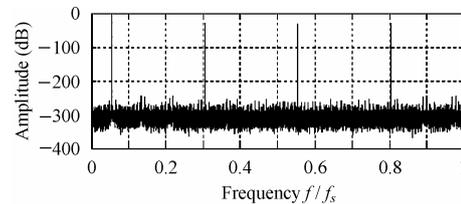


图 4 改进前后 DDS 输出频谱的比较

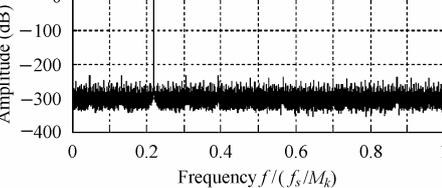


图 4 改进前后 DDS 输出频谱的比较

Fig.4 Improved vs. traditional spectrum of DDS

由于通过了  $M_k$  采样, 所以该图中的采样率为  $f_s/M_k$ , 实际频率应为所得结果除以  $M_k$ 。

由图 4 可以看出, 改进后的频谱中相位截断噪声大大减小, 但是由于改进的 DDS 是对 ROM 输出的数据再进行  $M_k$  采样, 这就使得原来的采样点减少, 导致使用上的一些限制, 分析如下:

首先, 原采样需要满足采样定理, 即  $K/2^N \leq 1/2$ , 得到  $K \leq 2^{N-1}$ 。在进行  $M_k$  采样的时候, 同样要满足采样定理  $K/2^N \leq 1/2M_k$ , 得  $2p+1 \leq 2^{A-1}$ 。又  $M_k = 2^B/\text{GCD}(2^B, K) = 2^B/2^l \geq 1$ , 所以  $l \leq B$ 。

因此, 若  $K = 2^l(2p+1)$  ( $l, p$  为整数), 则必须要满足:

$$\left. \begin{array}{l} l \leq B \\ 2p+1 \leq 2^{A-1} \end{array} \right\} \quad (24)$$

## 6 结束语

本文利用非均匀采样的模型对 DDS 的工作原理进行了分析, 并对 DDS 的相位截断误差进行了详细的理论分析和计算, 所得结论与已有的用均匀采样方法的结论完全一致。进一步得出如下结论:

(1) 非均匀采样模型的大周期特性决定了杂散在输出频谱中的位置;

(2) 相位截断和非均匀采样模型的大周期特性决定杂散频谱的幅度特性;

(3) 将非均匀采样模型恢复成均匀采样模型, 相位截断决定了杂散频谱的频率和幅度, 同时也决定了非均匀采样模型的大周期特性。

这表明相位截断形成的真正原因分成两部分: 非均匀采样(采样时钟的 jitter 也可以引入)决定了输出杂散频谱的位置, 相位截断决定了(导致非均匀采样)频谱的幅度, 笼统地

说相位截断决定了杂散频谱特性是不精确的。

进一步,本文基于非均匀采样模型的大周期采样假设前提,对 DDS 结构做了部分的修改。Matlab 仿真结果表明,修改后的 DDS 对于满足一定条件的频率控制码所产生的信号的相位截断杂散噪音有很好的抑制作用,而且逻辑实现简单,为在 FPGA 上实现提供了参考。同时,如果结合 ROM 表压缩方法<sup>[9]</sup>,还会有更好的抑制效果。

本文所采用的非均匀采样的分析方法具有简单直观、逻辑性强、物理概念清晰等优点,对于其它的数字采集处理也具有一定的参考作用。

### 参 考 文 献

- [1] Tierney J, Rader C M, Gold B. A digital frequency synthesizer. *IEEE Trans. on Audio-and Electro-acoustics*, 1971, AU-19(3): 48-57.
  - [2] Nicholas H T, Samueli H. An analysis of the output spectrum of direct digital frequency synthesizers in the presence of phase-accumulator truncation. *Proc. 41st Annual Frequency Control Symposium, Monmouth*, 1987: 495-502.
  - [3] 张玉兴, 彭清泉. 相位舍位对 DDS 谱分布的影响. *电子科技大学学报*, 1997, 28(4): 137-142.
  - [4] 赵正敏. 相位截尾对 DDS 输出谱影响的分析与计算. *东南大学学报*, 2000, 30(1): 141-145.
  - [5] Analog Device. A technical tutorial on digital signal synthesis. 1999, Section1. <http://www.analog.com>.
  - [6] Jenq Y C. Digital spectral of non-uniformly sampled singles: Fundamentals and high-speed waveform digitizers. *IEEE Trans. Instrum. Meas*, 1988, 37(2): 245-251.
  - [7] 郑君里等. 信号与系统(第二版). 北京: 高等教育出版社, 2000.5, 第 9 章.
  - [8] 刘晓明, 谢明钦等. 一种能有效减小 DDS 杂散的设计方法. *现代雷达*, 2004, 26(3): 61-63.
  - [9] 王晓音等. DDS 输出频谱杂散的抑制. *电子对抗技术*, 2003, 18(6): 25-28.
- 曹 平: 男, 1980 年生, 博士, 研究方向为数字信号处理理论研究及应用.
- 安 琪: 男, 1956 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为高速信号采集与处理研究.