

有限快拍四阶累量无偏估计性能分析¹

李建勋 保 铮

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 关于累量域估计的研究以前主要着重于渐进性能的研究, 包括渐近无偏估计及渐近方差。本文主要研究有限快拍累量域无偏估计性能, 包括有限快拍的无偏估计及方差性能分析。仿真结果表明无偏估计在低信噪比情况下波达方向参数估计性能优于有偏估计, 从而推动累量域本身估计的研究。

关键词 累量域, 有偏估计, 无偏估计

中图分类号 TN911.7

1 引言

高阶累量是近几年国内外信号处理领域内的一个前沿课题, 是非高斯、非最小相位和非线性问题的主要分析工具^[1,2]。当信号具有非高斯分布时, 许多有用信息包含在其大于二阶的高阶统计量(指高阶累量及多谱)中。作为基于二阶统计量的常规参数估计方法的拓展与补充, 它为增强分辨参数估计方法的容差性和稳健性开辟了一条新的重要途径。因此高阶统计量理论及其应用的研究正受到越来越多的关注, 并已在雷达、声纳、通信、图像处理、电磁学、生物医电等领域获得了大量的应用。

高阶累量参数估计方法的研究和发展是人们在理论和方法上向更深层次探索的结果, 也是实际应用的需求所致。首先, 由于大于二阶的高阶累量对高斯噪声(白色或有色)有自然盲性, 因而基于高阶累量的参数估计方法对统计特性未知的高斯噪声具有稳健性, 这也是人们研究累量域参数估计方法的最初动机。其次, 最近在阵列处理研究中人们发现, 由于空间累量可以提供阵列孔径扩展(虚拟阵元), 以及比协方差更为丰富的累量元素及幅相信息, 累量域参数估计方法具有更强的容差性和稳健性。因此, 研究累量域参数估计方法具有重要的现实意义。

但是高阶累量本身的估计问题一直是阻碍其发展和实际应用的关键^[3], 只有少量的文献报道^[4]。因此寻找最优累量估计和降低估计方差, 尤其是基于有限快拍的情况将是非常关键的问题。针对上述问题, 本文主要研究基于有限快拍的累量域估计性能, 包括基于有限快拍的无偏估计及方差性能分析。仿真结果表明无偏估计在低信噪比情况下, 波达方向参数估计性能优于有偏估计, 从而推动累量域本身估计的研究。

2 问题描述

2.1 基本假设

在时间序列分析及阵列处理中, 一类信号具有如下形式:

$$r_m(t) = \sum_{p=1}^P s_p(t) v_m(w_p) + w_m(t), \quad (1)$$

¹ 1998-10-26 收到, 1999-05-20 定稿
国家自然科学基金资助项目

其中 $s_p(t)$ 为复信号, $w_m(t)$ 为加性观测噪声, $v_m(w_p)$ 为一复指数函数, 包含了信号来向(或频率)、阵列结构等信息. 此类信号常称为复谐波过程.

我们对信号和噪声做如下假设:

AS₁: $s(t)$ 为零均值非高斯过程, 且其累量不为零;

AS₂: $w(t)$ 为零均值高斯过程(白色或有色);

AS₃: $s_p(t)$ 之间、 $s_p(t)$ 与 $w_k(t)$ 之间均统计独立.

2.2 四阶累量的定义

在雷达、通信中常用的高阶累量多为四阶累量^[5]. 零均值平稳随机过程的四阶累量定义为:

$$c_{4y}(k, l, m, n) = E\{r_k(t)r_l^*(t)r_m^*(t)r_n(t)\} - E\{r_k(t)r_l^*(t)\}E\{r_m^*(t)r_n(t)\} \\ - E\{r_k(t)r_m^*(t)\}E\{r_l^*(t)r_n(t)\} - E\{r_k(t)r_n(t)\}E\{r_l^*(t)r_m^*(t)\}.$$

其渐近无偏估计为

$$\hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_k(t)r_l^*(t)r_m^*(t)r_n(t) - \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N r_k(t)r_l^*(t)r_m^*(u)r_n(u) \\ - \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N r_k(t)r_m^*(t)r_l^*(u)r_n(u) - \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N r_k(t)r_n(t)r_l^*(u)r_m^*(u). \quad (3)$$

式中 $\hat{c}_{4y}^N(\dots)$ 表示 N 次实现(快拍)下 $y_m(t)$ 四阶累量的估计.

3 有限点四阶累量无偏估计

定理 1 对于有限点四阶累量, 其无偏估计为

$$\hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n) = \frac{1}{a} \sum_{t=1}^N r_k(t)r_l^*(t)r_m^*(t)r_n(t) - \frac{1}{b} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N r_k(t)r_l^*(t)r_m^*(u)r_n(u) \\ - \frac{1}{b} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N r_k(t)r_m^*(t)r_l^*(u)r_n(u) - \frac{1}{b} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N r_k(t)r_n(t)r_l^*(u)r_m^*(u), \quad (4)$$

其中

$$a = (N^2 - N)/(N + 2), \quad b = N^2 - N. \quad (5)$$

证明 设由于有限次快拍(N 次)引起的累量估计误差为

$$\Delta \hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n) = \hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n) - c_{4y}(k, l, m, n).$$

$$E\{\Delta \hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n)\} = E\{\hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n) - c_{4y}(k, l, m, n)\} = E\{\hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n)\} - c_{4y}(k, l, m, n).$$

$$E\{\hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n)\} = \left(\frac{N}{a} - 3\frac{N}{b}\right)c_{4y}(k, l, m, n) + \left(\frac{N}{a} - 3\frac{N}{b} - \frac{N^2 - N}{b}\right)R_y(k, m)R_y(l, n) \\ + \left(\frac{N}{a} - 3\frac{N}{b} - \frac{N^2 - N}{b}\right)R_y(k, n)R_y(l, m) \\ + \left(\frac{N}{a} - 3\frac{N}{b} - \frac{N^2 - N}{b}\right)R_y(k, l)R_y(m, n).$$

无偏估计的条件为

$$\begin{cases} N/a - 3N/b - 1 = 0, \\ N/a - 3N/b - (N^2 - N)/b = 0, \end{cases} \quad \text{则} \begin{cases} a = (N^2 - N)/(N + 2), \\ b = N^2 - N. \end{cases}$$

在圆高斯噪声情况下, 同理可推得

$$a = 1/N, \quad b = N^2 - N. \quad \text{证毕}$$

4 有限快拍四阶累量估计方差

定理 2 对于 (1) 式所定义的复谐波过程, 其有限快拍四阶累量的估计方差为

$$\text{Var}(\hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n)) = c_0 F_8 + c_1 F_{62} + c_2 F_{44}^1 + c_3 F_{44}^2 + c_4 F_{422}^1 + c_5 F_{422}^2 + c_6 F_{2222}, \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} c_0 &= N/a^2 - 6N/(ab) + 9N/b^2, \quad F_8 = M_{8y}(k1, l1, m1, n1, k2, l2, m2, n2) \quad A\#, \\ c_1 &= -N(N-1)/(ab) + 3N(N-1)/b^2, \\ F_{62} &= \sum_{\substack{i,j=X2 \\ i \neq j}} M_{6y}(X1, X2 - \{i, j\}) R_y(i, j) \cdot \sum_{\substack{i,j=X1 \\ i \neq j}} M_{6y}(X2, X1 - \{i, j\}) R_y(i, j), \\ c_2 &= -N/a^2 + 6N/(ab) - 9N/b^2, \quad F_{44}^1 = M_{4y}(k1, l1, m1, n1) M_{4y}(k2, l2, m2, n2), \\ c_3 &= N(N-1)/b^2, \\ F_{44}^2 &= \sum_{i=X1-\{k1\}} \sum_{\substack{j1, j2=X2 \\ j1 \neq j2}} M_{4y}(k1, i, j1, j2) M_{4y}(X1 - \{kl, i\}, X2 - \{j1, j2\}) - F_{44}^1, \\ c_4 &= 2N(N-1)/(ab) - 6N(N-1)/b^2, \\ F_{422}^1 &= M_{4y}(X1) \sum_{i=X2-\{k2\}} R_y(k2, i) R_y(X2 - \{k2, i\}) \\ &\quad + M_{4y} \left(X2 \sum_{i=X1-\{k1\}} R_y(k1, i) R_y(X1 - \{k1, i\}) \right) \\ c_5 &= N(N-1)(N-2)/b^2, \\ F_{422}^2 &= \sum_{\substack{i1, i2=X1 \\ i1 \neq i2}} \sum_{\substack{j1, j2=X2 \\ j1 \neq j2}} M_{4y}(i1, i2, j1, j2) R_y(X1 - \{i1, i2\}) R_y(X2 - \{j1, j2\}), \\ c_6 &= 2N(N-1)(2N-3)/b^2, \\ F_{2222} &= \sum_{i=X1-\{k1\}} R_y(k1, i) R_y(X1 - \{k1, i\}) \sum_{j=X2-\{k2\}} R_y(k2, j) R_y(X2 - \{k2, j\}), \end{aligned}$$

其中 $R_y(\cdots)$ 、 $M_{4y}(\cdots)$ 、 $M_{6y}(\cdots)$ 、 $M_{8y}(\cdots)$ 分别为 $y_m(t)$ 的二、四、六、八阶矩。

$X1 = \{k1, l1, m1, n1\}$, $X2 = \{k2, l2, m2, n2\}$, $X1 - \{k1, l1\} = \{m1, n1\}$.

当采用 (4)、(5) 式无偏估计时, 上式可写为

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n)) &= (1/N)(F_8 - F_{62} - F_{44}^1 - F_{44}^2 + 2F_{422}^1 + 2F_{422}^2 + 6F_{2222}) \\ &+ [1/(N-1)](-F_{44}^2 - F_{422}^2 - 2F_{2222}) \doteq b1/N + b2/(N-1). \end{aligned} \quad (7)$$

当采用 (3) 式渐近无偏估计时, 上式可写为

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{c}_{4y}^N(k, l, m, n)) &= (1/N)(F_8 - F_{62} - F_{44}^2 + 2F_{422}^1 + 2F_{422}^2 + 4F_{2222}) \\ &+ (1/N^2)(-6F_8 + 4F_{62} + 6F_{44}^1 + F_{44}^2 - 8F_{422}^1 - 3F_{422}^2 - 10F_{2222}) \\ &+ (1/N^3)(9F_8 - 3F_{62} - 9F_{44}^1 - F_{44}^2 + 6F_{422}^1 + 2F_{422}^2 + 6F_{2222}) \\ &\doteq c1/N + c2/N^2 + c3/N^3. \end{aligned} \quad (8)$$

4 性能仿真

针对等矩线阵^[5]进行仿真研究, 仿真条件为间隔为半波长的八元等矩线阵, 高斯白噪声环境。

实验 1 来自 0° 的 BPSK 单信号源, 样本数 $N=500$, 固定 (k, l, m, n) 为 $(1, 1, 1, 1)$ 。图 1 给出了两种估计的均方误差曲线。

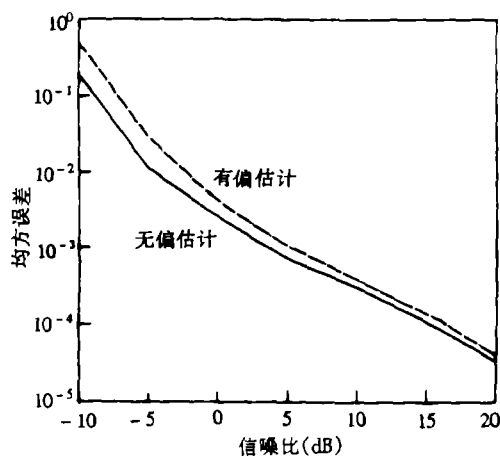


图 1 均方误差与信噪比的关系

实验 2 两个信号源分别为 10° 和 -15° , 采用 ESPRIT 算法进行 DOA 估计, 其中四阶累量的计算分别采用有偏估计和无偏估计, 仿真结果如图 2~图 7 所示, 表 1 列出了 50 次 Monte Carlo DOA 估计仿真结果。(其中 + 为无偏估计, o 为有偏估计)

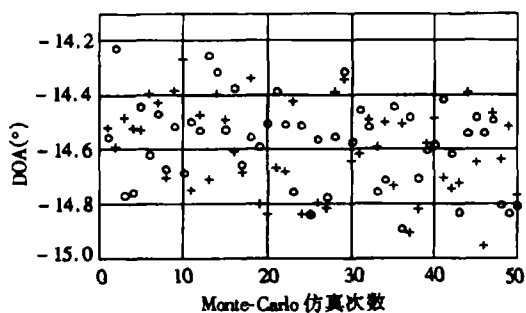
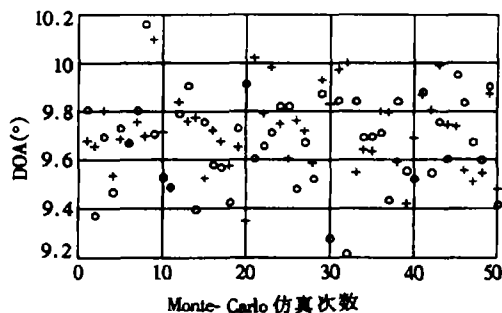
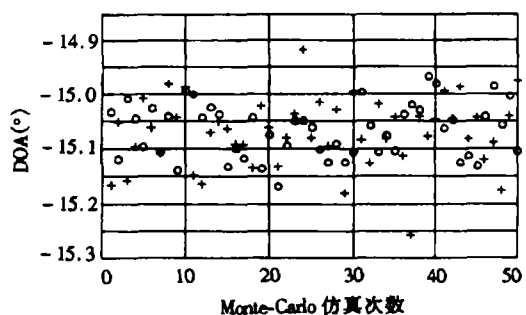
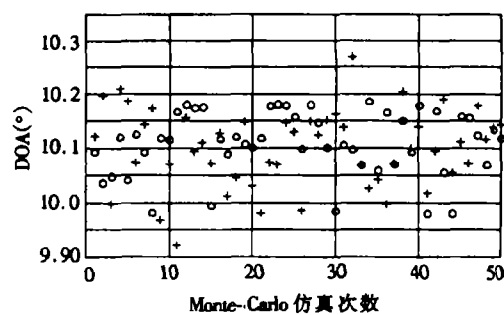
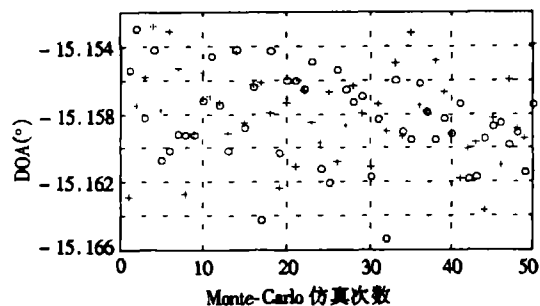
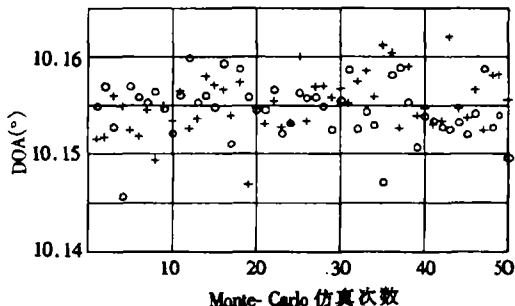
图 2 SNR=-20dB, $\theta = -15^\circ$ 的 DOA 估计图 3 SNR=-20dB, $\theta = -10^\circ$ 的 DOA 估计图 4 SNR=0dB, $\theta = -15^\circ$ 的 DOA 估计图 5 SNR=0dB, $\theta = 10^\circ$ 的 DOA 估计图 6 SNR=20dB, $\theta = -15^\circ$ 的 DOA 估计图 7 SNR=20dB, $\theta = 10^\circ$ 的 DOA 估计

表 1 DOA 估计均方差

信噪比 (dB)	无偏估计		有偏估计	
	-15°	10°	-15°	10°
-20	0.4247	0.3287	0.4555	0.3696
0	0.0870	0.1152	0.0906	0.1199
20	0.1572	0.1552	0.1575	0.1553

分析 对比上述仿真结果, 可以发现 (1) 无偏估计和有偏估计的方差基本一致。在低信噪比情况下, 无偏估计的方差小于有偏估计的方差; (2) 采用无偏估计的 DOA 估计性能优

于有偏估计,尤其是在低信噪比情况下。

无偏估计相对于有偏估计具有零偏差和低信噪比情况下相对误差小的优点,所以可提高基于有限长度的累量本身估计的精度。

6 结 论

本文研究了有限样本点情况下,四阶累量的无偏估计。给出了无偏估计算式,并分析了不同估计条件下的估计方差。在低信噪比条件下无偏估计具有优于有偏估计的特性,对于提高累量本身的估计具有一定的作用。

参 考 文 献

- [1] Nikias C L, Petropulu A P. Higher-Order Spectra Analysis: A Nonlinear Signal Processing Framework. New Jersey: PTR Prentice-Hall, Inc., 1993, 163-218.
- [2] 张贤达. 时间序列分析—高阶统计量方法. 北京: 清华大学出版社, 1995, 25-44.
- [3] Mendel J M. Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some applications. Proc. IEEE, 1991, 79(3): 278-305.
- [4] Andre F, Nowak D, Van Veen D. Low-rank estimation of higher order statistics. IEEE Trans. on Signal Processing. 1997, 45(3): 673-685.
- [5] 吴涸, 保铮. 累量域波达方向估计的稳健性. 电子学报, 1997, 25(6): 25-29.

COVARIANCE PERFORMANCE ANALYSIS OF FINITE-SAMPLE CUMULANTS

Li Jianxun Bao Zheng

(Key Lab for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract In recent years, estimation in cumulant domains was studied mainly in the aspect of asymptotic performance, including asymptotic unbiased estimation and asymptotic covariance. Unbiased estimation performance for finite snapshots is discussed in this paper. Simulation results demonstrate that performance of DOA unbiased estimation is better than that of biased for low SNR.

Key words Cumulant domains, Biased estimation, Unbiased estimation

李建勋: 男, 1969 年生, 副教授, 博士后, 研究兴趣为阵列信号处理, 信息融合。

保 铮: 男, 1927 年生, 教授, 中国科学院院士、IEEE 高级会员、中国电子学会会士, 研究领域为信号处理与检测。