

基于信号空间的最佳 FIR 分数延迟滤波器的设计方法

赵君喜

(南京邮电学院应用数理系 南京 210003)

摘要: 分数延迟滤波器广泛用于通信, 语音处理, 回声消除等。该文基于信号的多分辨空间一般模型, 由尺度函数给出最优FIR分数延迟滤波器的设计方法, 并进行数值试验验证其有效性。

关键词: 分数延迟滤波器, 多分辨空间, 尺度函数

中图分类号: TN713⁺1

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)12-1905-04

A Method of Designing FIR Fractional Delay Filters Based on Signal Models

Zhao Jun-xi

(Department of Applied Mathematics and Physics, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract Fractional delay filters are applied to a wide range such as communications, speech processing, echo cancellation, etc. Based on the multiresolution space model of signals, a method for designing optimal fractional delay FIR filters is derived in this paper. Some numerical simulations are provided to show the effectiveness of the proposed method.

Key words Fractional delay filter, Multiresolution space, Scaling function

1 引言

分数延迟滤波器的作用是模拟一个理想的非整数时间单元延迟器, 广泛地应用于数字通信、语音处理、声音的数字建模、遥感阵列天线、回声消除等领域^[1]。近年来人们关于分数延迟滤波器的设计方法进行了许多研究^[1-4]。文献[1]系统地给出了各种分数延迟滤波器的设计方法。传统的方法是在频域采用各种方法直接逼近理想延迟滤波器, 而特别假设输入信号是理想带限的。在文献[2]中, 作者利用带限信号的积分再生核, 以时域信号样值作为逼近目标给出一种在均方误差下最优滤波器的设计。然而, 在许多信号处理情形中信号的带限假设并不成立, 即便对带限信号, 因时域截断也使其成为非带限的, 常用处理方式是过采样。然而, 在许多情形下人们可把信号用多分辨空间进行建模, 如小波分析、多分辨图像处理等, 而带限信号、有限时间持续信号只作为特例。许多例子表明引入信号的多分辨表示更适宜于信号处理的各种场合。基于信号的多分辨模型, 我们可在时域有效地设计出最佳的分数延迟滤波器, 形成基于模型的FIR分数

延迟滤波器设计的一般方法。这样的设计方法, 适用传统的带限信号, 更为不同场合下信号处理提供更灵活而有效的选择。另外, 基于信号模型的设计方法, 能根据不同的应用背景, 给出最佳FIR分数滤波器的设计。本文中, 我们在一般多分辨空间框架下, 以时域样值作为分数延迟的逼近目标给出均方意义下最佳FIR分数延迟滤波器的设计方法, 并进行数值仿真, 验证了该方法的有效性。

2 单生成元多分辨空间中最佳分数FIR滤波器的设计

本文用 R, Z 分别表示实数域和整数集, $L^2(R)$ 表示 $(-\infty, +\infty)$ 上能量有限信号空间, 简记为 L^2 。 $x(t) \in L^2$, $\|x\| = \left(\int_R |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ 为它的范数, $X(\omega)$ 表示 $x(t)$ 的连续 Fourier 变换。最高频率不超过 $\sigma > 0$ 的带限信号空间为 $H_\sigma = \{x(t) \in L^2(R): X(\omega) = 0, |\omega| > \sigma\}$ 。由 Shannon 采样定理, H_σ 具有正交基 $\{\text{sinc}(\sigma t - n\pi) = \sin(\sigma t - n\pi) / (\sigma t - n\pi): n \in Z\}$ 。一般地设 $\varphi(t) \in L^2$, 使得 $0 < A$

$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega + 2n\pi/T)|^2 \leq B < +\infty$, A, B 为常数, $\Phi(\omega)$ 为 $\varphi(t)$

的Fourier变换。

$$H = \text{span}\{\varphi(t - Tn) : n \in Z\} \\ = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi(t - Tn) : c_n \in R, \sum_n |c_n|^2 < +\infty \right\} \quad (1)$$

称为尺度函数 $\varphi(t)$ 生成的多分辨率空间, $\{\varphi(t - n) : n \in Z\}$ 为 H 的 Riesz基^[5]。对带限信号、多带信号、持续有限信号及其它许多非带限信号, 我们可以取合适的尺度函数将信号纳入多分辨率空间来考虑, 同时多尺度变换可以生成不同分辨率空间, 使人们可以在不同分辨率下处理信号。常用的多分辨率空间有样条函数空间、小波空间等, 带限函数空间可看成多分辨率空间的特例。

对连续时间信号 $x(t) \in H$, $\{x(nT)\}$ 为它的离散采样, $T > 0$ 。设 N 为一个自然数, $d \notin Z$, 一个 N 阶理想FIR分数延迟线性滤波器 $\mathbf{h} = \{h_0, h_1, \dots, h_N\}$ 的作用是由 $\{x(nT)\}$ 输出 $x(nT - dT)$ 。对于最高角频率为 $\sigma > 0$ 的带限信号, 理想的分数延迟滤波器为 $h(n) = \sin \sigma(n - d) / \sigma(n - d)$ 。这个滤波器是非因果的IIR滤波器, 实际使用的FIR分数延迟滤波器只能是理想分数延迟滤波器的一种逼近, 而分数延迟滤波器的输出 $\hat{x}(nT - dT)$ 只是理想值 $x(nT - dT)$ 的近似。所以我们就以逼近理想值 $x(nT - dT)$ ($n \in Z$) 作为设计最佳分数延迟滤波器的准则。由于尺度函数 $\varphi(t)$ 生成的多分辨率空间 H 具有整数平移不变性, 且为叙述简便, 取 $T = 1$, 并把设计FIR分数延迟滤波器的问题简化为由 $\{x(0), x(1), \dots, x(N)\}$ 线性估计 $x(d)$ 的问题。

对 $d \in (0, 1)$, 设 $\hat{x}(d) = \sum_{n=0}^N h_n x(n)$, 我们决定滤波器的系数向量 $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_N)^T$ 使 $\hat{x}(d)$ 是 $x(d)$ 的最佳逼近。由 $x(t) \in H$, 存在数列 $\{c_n\}$, 使 $\sum_n |c_n|^2 < +\infty$, $x(t) = \sum_k c_k \varphi(t - k)$, 以及 $\sum_k |c_k|^2 \leq B \|\mathbf{x}\|^2$ 。于是

$$\hat{x}(d) = \sum_{n=0}^N h_n \sum_k c_k \varphi(n - k) = \sum_k c_k \sum_{n=0}^N h_n \varphi(n - k) \quad (2)$$

逼近误差平方为

$$\varepsilon(\mathbf{h}) = |x(d) - \hat{x}(d)|^2 = \left| \sum_k c_k \varphi(d - k) - \sum_k c_k \sum_{n=0}^N h_n \varphi(n - k) \right|^2 \\ = \left| \sum_k c_k \left[\varphi(d - k) - \sum_{n=0}^N h_n \varphi(n - k) \right] \right|^2 \\ \leq \sum_k |c_k|^2 \left| \varphi(d - k) - \sum_{n=0}^N h_n \varphi(n - k) \right|^2 \\ \leq B \|\mathbf{x}\|^2 \sum_k \left| \varphi(d - k) - \sum_{n=0}^N h_n \varphi(n - k) \right|^2 \quad (3)$$

可以看到, 归一化误差方 $\varepsilon(\mathbf{h}) / \|\mathbf{x}\|^2$ 的大小, 取决于

$$\sum_k \left| \varphi(d - k) - \sum_{n=0}^N h_n \varphi(n - k) \right|^2。记 \\ \mathbf{e}_d = (\dots, \varphi(d - k), \varphi(d - k + 1), \dots)^T \\ \mathbf{e}_n = (\dots, \varphi(n - k), \varphi(n - k + 1), \dots)^T, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (4)$$

$\mathbf{e}_d, \mathbf{e}_n$ 为尺度函数的离散采样序列向量, 记号 T 为矩阵的转置。由正交原理及 $\mathbf{x}$ 的任意性, $\varepsilon(\mathbf{h}) / \|\mathbf{x}\|^2$ 取最小值当且仅当 $\sum_{n=0}^N h_n \varphi(n - k) = \sum_{n=0}^N h_n \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbf{e}_d$ 在 $\{\mathbf{e}_n\}_{n=0}^N$ 生成子空间 $\text{span}\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ 上的正交投影。用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示向量的内积,

$$\text{由 } \langle \mathbf{e}_d - \sum_{n=0}^N h_n \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_k \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \text{ 可得} \\ \sum_{n=0}^N h_n \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \langle \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_m \rangle, \quad m = 0, 1, \dots, N. \quad (5)$$

记 $\mathbf{A} = (\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle)_{n,m=0}^N$, 我们可以得到

$$\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_N)^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (6)$$

这里 $\mathbf{A}^+$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的Penrose逆, $\mathbf{b} = (\langle \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_0 \rangle, \langle \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_N \rangle)^T$ 。此时的极小误差为

$$|x(d) - \hat{x}(d)| \leq \sqrt{B} \|\mathbf{x}\| \left(\|\mathbf{e}_d\|^2 - \mathbf{b}^T \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \right)^{1/2} \quad (7)$$

值得注意的是, 当尺度函数 $\varphi(t)$ 是有限支撑的, 即存在一个区间 $[a, b]$ 使 $\varphi(t) = 0$, $t \notin [a, b]$ 时, 最佳FIR分数延迟滤波器的阶数取成两倍于尺度函数支撑的整数长度就相当理想了。这是因为尺度函数的采样向量非零分量有限长, 导致上述向量 $\mathbf{b}$ 的有效长不随滤波器阶数增加。对于带限信号而言, 尺度函数支撑是无限的且具有较慢的衰减性, 分数延迟滤波器的阶数取得比较高才行, 同时误差也增大了。对于这种情况, 解决的办法是适当地增加带宽, 如以最高频率为 $\sigma + \lambda$ ($\lambda > 0$) 的空间来处理 H_σ 中的信号, 使 H_σ 的尺度函数有更好时间衰减性, 如将尺度函数取成滚降余弦型函数。这相当于提高信号的采样率, 在过采样情形实现分数滤波。

3 多生成元空间的最佳分数延迟滤波器的设计

在一些情形下, 信号要由多个尺度函数的平移来表示, 如多输入多输出系统。处理这类信号, 就要将信号用多生成元多分辨率空间来考虑。设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_K(t) \in L^2$ 使 $0 < A \leq \sum_{k=1}^K \sum_n |\Phi_k(\omega + 2n\pi)|^2 \leq B < +\infty$ 。 $H = \text{span}\{\varphi_k(t - m) : k = 1, 2, \dots, K, m \in Z\}$ 。对于任意 $x(t) \in H$, 存在 K 重数列 $\{c_{k,m} : k = 1, 2, \dots, K, m \in Z\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^K \sum_m |c_{k,m}|^2 < +\infty, \quad x(t) = \sum_{k=1}^K \sum_m c_{k,m} \varphi_k(t - m) \quad (8)$$

对于 $d \in (0, 1)$, 设 $\hat{x}(d) = \sum_{n=0}^N h_n x(n)$ 为 $x(d)$ 的线性估计, 将 $x(n)$ 代入此估计式可得

$$\hat{x}(d) = \sum_{k=1}^K \sum_m c_{k,m} \sum_{n=0}^N h_n \varphi_k(n-m) \quad (9)$$

而误差平方可表示为

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{h}) &= |x(d) - \hat{x}(d)|^2 = \left| \sum_{k=1}^K \sum_m c_{k,m} \left[\varphi_k(d-m) - \sum_{n=0}^N h_n \varphi_k(n-m) \right] \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^K \sum_m |c_{k,m}|^2 \sum_{k=1}^K \sum_m \left| \varphi_k(d-m) - \sum_{n=0}^N h_n \varphi_k(n-m) \right|^2 \\ &\leq B \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{k=1}^K \sum_m \left| \varphi_k(d-m) - \sum_{n=0}^N h_n \varphi_k(n-m) \right|^2 \end{aligned} \quad (10)$$

记 $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_N)^T$, $\mathbf{e}_{k,n} = (\dots, \varphi_k(n-m), \varphi_k(n-m+1), \dots)^T$, $\mathbf{e}_{k,d} = (\dots, \varphi_k(d-m), \varphi_k(d-m+1), \dots)^T$, $k=1, 2, \dots, K$, $n \in \mathbb{Z}$, 则上面的误差平方以向量的形式可表示为

$$\varepsilon(\mathbf{h}) \leq B \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{k=1}^K \left\| \mathbf{e}_{k,d} - \sum_{n=0}^N h_n \mathbf{e}_{k,n} \right\|^2 \quad (11)$$

由 $\sum_{k=1}^K \left\| \mathbf{e}_{k,d} - \sum_{n=0}^N h_n \mathbf{e}_{k,n} \right\|^2$ 取最小值得

$$\left(\sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k \right) \mathbf{h} = \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \quad (12)$$

这里 $\mathbf{T}_k = (\mathbf{e}_{k,0}, \mathbf{e}_{k,1}, \dots, \mathbf{e}_{k,N})$, $\mathbf{A}_k = \mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k$, $\mathbf{b}_k = (\langle \mathbf{e}_{k,0}, \mathbf{e}_{k,d} \rangle, \langle \mathbf{e}_{k,1}, \mathbf{e}_{k,d} \rangle, \dots, \langle \mathbf{e}_{k,N}, \mathbf{e}_{k,d} \rangle)^T$, $k=1, 2, \dots, K$. 于是

$$\mathbf{h} = \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k \right)^+ \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \quad (13)$$

最小误差平方为

$$|x(d) - \hat{x}(d)|^2 \leq B \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{k=1}^K \left\| \mathbf{e}_{k,d} - \mathbf{T}_k \left(\sum_{m=1}^K \mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_m \right)^+ \sum_{m=1}^K \mathbf{b}_m \right\|^2 \quad (14)$$

从上面的分析可知, 多个生成元分辨空间中 FIR 分数延迟滤波器的性能与它的阶数以及空间的生成元有关。由文献 [5] 可知, 常数 $B \geq 1$, 当生成元形成正交的时候, $B=1$, 相应的最佳 FIR 分数滤波器性能相对较好。相反, 当 B 很大时,

4 多分辨空间最佳 FIR 分数延迟滤波器设计举例

我们用第 2 节和第 3 节的方法就几种多分辨空间的信号模型给出相应的最佳 FIR 分数滤波器设计举例, 并用最佳 FIR 分数延迟滤波器给出信号在分数间隔上的插值。

首先用二次样条函数^[6] $\varphi(t)$ 作为尺度函数。这里取 $x(t) = \sum_{n=0}^{79} c_n \varphi(t-n)$ 为线性调频信号 $5 \sin t^2 / 15$ 的一个近似,

图 1 的实线为 $x(t)$, 离散点为 5 阶最佳 FIR 分数延迟滤波器对 $x(t)$ 在对于非整采样点上的插值(以下类似)。图 2 是 FIR 分数延迟滤波器对不同延迟量 d 的插值与对应信号值之间的误差, 其中我们取了 2 个不同的非整延迟因子。由图 1 和图 2 可见, 在较小的阶数下, 最佳 FIR 分数延迟滤波器有很好的效果。表 1 给出几个不同 d 所对应的最佳 FIR 分数延迟滤波器。

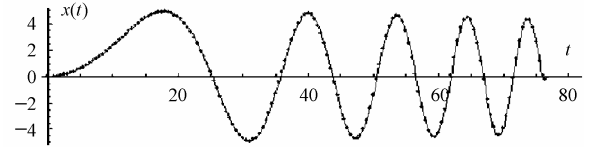


图 1 信号 $x(t)$ 与它的插值

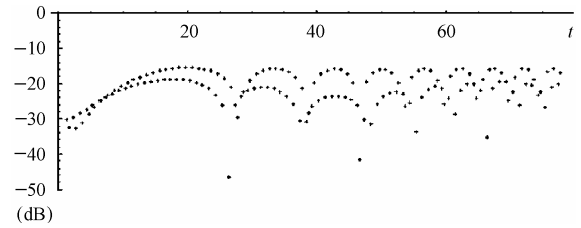


图 2 插值误差

其次考虑一元带限函数情形。取 $\varphi(t) = \sin \sigma t / (\sigma t)$, $\sigma > 0$ 。Nyquist 采样间隔为 $T = \pi / \sigma$, 由于 $\varphi(t)$ 满足 $\varphi(nT) = \delta(n)$, 即 $\varphi(t)$ 具有插值性质, 所以对任意延迟因子 $d \in (0, 1)$, 最佳 FIR 分数延迟滤波器的系数只是围绕 0 以 T 为间隔对 $\varphi(t)$ 的对称采样。由于这里的采样尺度函数 $\varphi(t)$ 具

表 1 不同延迟的滤波器设计举例

d	$\mathbf{h}$					
0.2793	0.187441,	-0.11568,	0.870643,	0.267457,	-0.0458503,	0.0076418
0.9434	-0.00677833,	0.04183,	0.99472,	-0.0357294,	0.00612521,	-0.000209
0.1155	0.0107185,	-0.0661502,	0.977859,	0.0922201,	-0.0158094,	0.00263495
0.595	0.00604433,	-0.037303,	0.994113,	0.0442739,	-0.00758997,	0.00126502
0.74996	-0.0375412,	0.231688,	0.896548,	-0.110947,	0.0190204,	-0.00317023

有较慢时间衰减特性,当滤波器阶数不够高时与理想的分数延迟滤波器有较大的误差。针对带限信号的这一特点,要适当增加带宽使重建函数有较快衰减,即增加信号的采样的冗余性可获得好的效果。对于一般多分辨空间情形,信号采样率的变化,对应的最佳分数延迟滤波器设计可以简单地通过生成函数的尺度的改变来实现,但对于不同的信号空间,寻求具有好的时间衰减特性的尺度函数可获得理想的效果。这里我给出信号的最高频率为0.9Hz,取采样率为2Hz。图3是信号和利用最优FIR滤波器对信号的插值信号,图4给出他们之间的误差。

最后我们对多生成元(尺度函数)的多分辨空间中最佳FIR分数延迟滤波器进行设计举例。取两个尺度函数分别为

$$\phi_1(t) = A_1 \cos\left(\frac{9\pi t}{20}\right)e^{-10t^2/3}, \quad \phi_2(t) = A_2 te^{-t^2/8} \quad (15)$$

这里 A_1, A_2 为归一化常数。图5-图7中的实线是一个以 $\phi_1(t)$

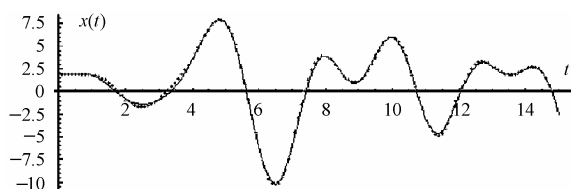


图3 信号 $x(t)$ 与它的插值

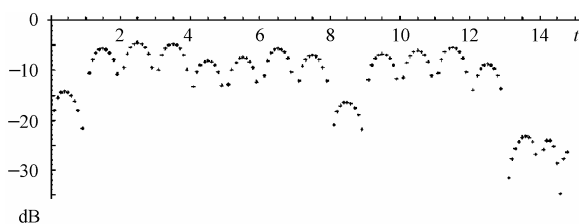


图4 插值误差

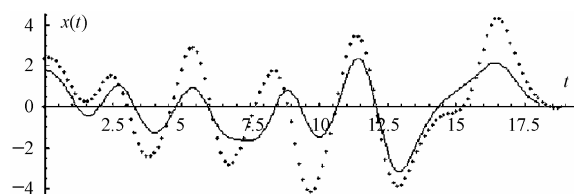


图5 信号与由尺度函数 $\phi_1(t)$ 给出的插值

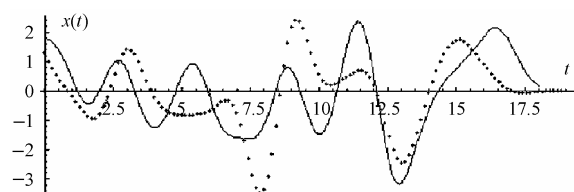


图6 信号与由尺度函数 $\phi_2(t)$ 给出的插值

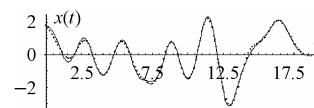


图7 信号与由尺度函数 $\phi_2(t)$ 给出的插值

与 $\phi_2(t)$ 为生成元的二元多分辨空间中随机取定的函数 $x(t)$ 。图5与图6分别给出由 $\phi_1(t)$ 与 $\phi_2(t)$ 单独作为生成函数的8阶最佳分数FIR滤波器给出的不同延迟插值结果。可以看出在多元生成元空间,利用仅用一个生成元进行最佳分数FIR滤波器设计是不行的。图7给出由 $\phi_1(t)$ 与 $\phi_2(t)$ 为生成元的8阶最佳分数延迟FIR滤波给出不同延迟下的插值结果。

5 结束语

本文通过信号的多分辨空间模型,给出了最佳分数FIR滤波器的时域设计的一般方法。本方法容易推广到多维情形,具有广泛性,能在不同的场合及不同的采样率下给出相应的最佳FIR分数延迟滤波器,适用于带限信号、非带限信号、多维信号等。这样的设计过程简单,不需要复杂的优化算法,仅涉及对称矩阵的代数方程求解。还应当看到,基于多分辨空间模型设计的最佳FIR分数延迟滤波器的性能与信号空间生成元的关系很大,在选用时应分析误差特性。

参考文献

- [1] Nagahara M, Yamamoto Y. Optimal design of fractional delay filters. *Proceeding 42th IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, 2003: 6539 – 6544.
- [2] Yu Shiang-Hwua, Hu Jwu-Sheng. Optimal synthesis of a fractional delay FIR filter in a reproducing kernel Hilbert space. *IEEE Signal Processing Letters*, 2001, 8(6): 160 – 162.
- [3] Xia Xiang-Gen. Fractional delay filter design when sampling rate higher than Nyquist rate. *Electronics Letters*, 1997, 33(3): 199 – 201.
- [4] Laakso T I, *et al.* Splitting the unit delay FIR/all pass filter design. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, 13 (1): 30 – 60.
- [5] 崔锦泰. 小波分析导论. 西安: 西安交通大学出版社, 1999, 第1 – 3章.
- [6] Djokovic I, Vaidyanathan P P. Generalized sampling theorems in multiresolution subspaces. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1997, 145(6): 583 – 599.

赵君喜: 男, 1963年生, 副教授, 研究方向为小波分析及其在信号处理中的应用、信号与信息处理。