第42卷 第12期 电 子 与 信 息 学 报 Vol. 42No. 12
2020年12月 Journal of Electronics & Information Technology Dec. 2020

$K_{4,4,p}$的点可区别的IE-全染色(p≥1008)

陈祥恩* 马静静
(西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070)

摘 要：该文利用色集事先分配法、构造染色法、反证法探讨了完全三部图$K_{4,4,p}$ (p≥1008)的点可区别IE-全染色问题，确定了$K_{4,4,p}$ (p≥1008)的点可区别IE-全染色数。

关键词：完全三部图；IE-全染色；点可区别IE-全染色；点可区别IE-全色数
中图分类号：O157.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2020)12-3068-06
DOI: 10.11999/SEIT190832

Vertex-distinguishing IE-total Coloring of $K_{4,4,p}$(p≥1008)

CHEN Xiang'en MA Jingjing
(*College of Mathematics and statistics*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: The vertex-distinguishing IE-total coloring of complete tripartite graphs $K_{4,4,p}$ (p≥1008) is discussed, by using of the methods of distributing the color sets in advance, constructing the colorings and contradiction. The vertex-distinguishing IE-total chromatic number of $K_{4,4,p}$ (p≥1008) is determined.

Key words: Complete tripartite graph; IE-total coloring; Vertex-distinguishing IE-total coloring; Vertex-distinguishing IE-total chromatic number

1 引言

点可区别一般边染色是由Harary等人[1]于1985年提出，在文献[1–6]中均有研究。近些年来点可区别的未必正常的全染色也被研究。点可区别IE-染色在文献[7]中提出。对图G进行点可区别IE-全染色所需要的最少颜色数称为G的点可区别IE-全色数，记为$\chi_{\rm vt}^{\rm ie}(G)$。图$G$的$k$-IE-全染色是指使用了$k$种颜色的图$G$的IE-全染色。

图G的k -点可区别IE-全染色是指图G使用了k种颜色的点可区别IE-全染色(简记为k -VDIETC)。本文研究$K_{4,4,p}$的点可区别IE-全染色，并给出了它们的点可区别IE-全色数。本文述及的完全三部图$K_{m,n,p}$的顶点集合为$V=X\cup Y\cup Z$，其中X={x_1, x_2, …, x_n}，Y={y_1, y_2, …, y_n}，Z={z_1, z_2, …, z_p}，边集合为{x_iy_j |i=1, 2, …, m, j=1, 2, …,n}∪{y_jz_t |j=1, 2, …, n, t=1, 2, …, p}∪{x_iz_t | i=1, 2, …, m, t=1, 2, …, p}。

当4≤p≤1007时$K_{4,4,p}$的点可区别IE-全色数已被完全确定，但是讨论太过冗长，将另文讨论。本文讨论并确定了当p≥1008时$K_{4,4,p}$的点可区别IE-全色数。文献[8]中对点可区别一般全染色进行了讨论。

完全二部图的点可区别正常边色数很容易得出，当把正常边染色过渡到一般边染色后，完全二部图的点可区别一般边染色已经得到了很多结果(见文献[2–6])，但还未最终完全彻底地确定下来。可见，当把染色从正常边染色过渡到一般边染色之后对于点可区别的问题的研究有很重要的意义，也增加了难度。同样的道理，二部图的点可区别正常全色数也很容易得出，那么，把染色从正常全染色过渡到未必正常的全染色，可以发现，关于二部图的点可区别IE-全染色的难度增大了，完全三部图的点可区别IE-全染色问题的难度也增大了，因此对这个问题的讨论也很有意义。

值得一提的是，许进教授等人[9–16]对极大平面图及其着色问题进行了深入研究，Li等人[17–19]对唯一3色平面图得出了重要结果，Zhu等人[19]深入地探索了无圈4色三角剖分图。本文进一步对当p≥1008时，$K_{4,4,p}$点可区别IE-全染色问题进行探讨。

约定：在本文一提及或要给出一个图的k-VDIETC时，总认为所使用的k种颜色为1, 2, …, k。

2 准备工作

引理1 当k≥12且时$p>\sum_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}$–8, $K_{4,4,p}$没

收稿日期：2019-10-28；改回日期：2020-04-27；网络出版：2020-07-24
*通信作者： 陈祥恩 chenxe@nwnu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(11761064, 61163037)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (11761064, 61163037)

有 (k–1)-VDIETC。

证明：用反证法，假设$K_{4,4,p}$有(k-1)-VDIETC。

断言1　任意1-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设1-子集$\{1\}$为X中某点的色集合，则Z中每个点的色集合必含1，故

$p\leq\sum_{i=1}^{8}\binom{k-2}{i}$，与$p>\sum_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}-8$矛盾。

断言2　任意2-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设$C(u_1)=\{1,2\}$，且$g(u_1)=1$，此时Z中每个点的色集合必含1或2。在{1, 2, ···, k–1}中，含1不含2且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum_{i=1}^{8}\binom{k-3}{i}$；含2不含1且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum_{i=0}^{8}\binom{k-3}{i}$；同时含1和2且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum_{i=1}^{7}\binom{k-3}{i}$，$p\leq\sum_{i=1}^{8}\binom{k-3}{i}+\sum_{i=0}^{8}\binom{k-3}{i}+\sum_{i=1}^{7}\binom{k-3}{i}$。但

$$p>\sum_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}-8=\sum_{i=1}^{9}\binom{k-2}{i}+\sum_{i=1}^{9}\binom{k-2}{i-1}-8=\sum_{i=1}^{9}\binom{k-3}{i}+\sum_{i=1}^{9}\binom{k-3}{i-1}+\sum_{i=1}^{9}\binom{k-3}{i-1}+\sum_{i=1}^{9}\binom{k-3}{i-2}-8=\sum_{i=1}^{8}\binom{k-3}{i}+\sum_{j=0}^{8}\binom{k-3}{j}+\sum_{i=2}^{9}\binom{k-3}{i-1}+\sum_{l=0}^{7}\binom{k-3}{l}+\binom{k-3}{9}-7=\sum_{i=1}^{8}\binom{k-3}{i}+\sum_{j=0}^{8}\binom{k-3}{j}+\sum_{l=0}^{7}\binom{k-3}{l}+\sum_{i=2}^{9}\binom{k-3}{i-1}+\binom{k-3}{9}-6$$

这与$p\leq\sum_{i=1}^{8}\binom{k-3}{i}+\sum_{i=0}^{8}\binom{k-3}{i}+\sum_{i=1}^{7}\binom{k-3}{i}$矛盾。

断言3　任意3-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设$C(u_1)=\{1, 2, 3\}$，且$g(u_1)=1$。则Z中每个点的色集合必含1, 2或3。在{1, 2, ···, k–1}中，含1不含2, 3且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum_{i=1}^{8}\binom{k-4}{i}$；含2不含1, 3且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum_{i=0}^{8}\binom{k-4}{i}$；含3不含1, 2且最多含有9个元素的子集的数目$\sum_{i=0}^{8}\binom{k-4}{i}$为；含1, 2不含3且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum_{i=0}^{7}\binom{k-4}{i}$；含1,3不含2且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum_{i=0}^{7}\binom{k-4}{i}$；含2, 3不含1且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum_{i=0}^{7}\binom{k-4}{i}$；同时含1，2，3且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum_{i=1}^{6}\binom{k-4}{i}$, $p\leq 3\sum_{i=1}^{8}\binom{k-4}{i}+3\sum_{i=0}^{7}\binom{k-4}{i}+\sum_{i=1}^{6}\binom{k-4}{i}+2$。

$$p>\sum_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}-8=\sum_{i=1}^{9}\binom{k-2}{i}+\sum_{i=1}^{9}\binom{k-2}{i-1}-8=\sum_{i=1}^{9}\binom{k-3}{i}+\sum_{i=1}^{9}\binom{k-3}{i-1}+\sum_{i=2}^{9}\binom{k-3}{i-1}+\sum_{i=1}^{9}\binom{k-3}{i-2}-7=\sum_{i=1}^{8}\binom{k-3}{i}+\sum_{j=0}^{8}\binom{k-3}{j}+\sum_{i=2}^{9}\binom{k-3}{i-1}+\sum_{l=0}^{7}\binom{k-3}{l}+\binom{k-3}{9}-7=\sum_{i=1}^{8}\binom{k-3}{i}+\sum_{j=0}^{8}\binom{k-3}{j}+\sum_{l=1}^{7}\binom{k-3}{l}+\sum_{i=2}^{9}\binom{k-3}{i-1}+\binom{k-3}{9}-6=\sum_{i=1}^{8}\binom{k-4}{i}+\sum_{i=1}^{8}\binom{k-4}{i-1}+\sum_{i=0}^{8}\binom{k-4}{i}+\sum_{i=0}^{8}\binom{k-4}{i-1}+\sum_{i=1}^{7}\binom{k-4}{i}+\sum_{i=1}^{7}\binom{k-4}{i-1}+\sum_{i=2}^{9}\binom{k-4}{i}+\sum_{i=2}^{9}\binom{k-4}{i-1}+\binom{k-3}{9}-5=\sum_{i=1}^{8}\binom{k-4}{i}+\sum_{j=0}^{7}\binom{k-4}{j}+\sum_{i=0}^{8}\binom{k-4}{i}+\sum_{l=0}^{7}\binom{k-4}{l}+\sum_{i=1}^{7}\binom{k-4}{i}+\sum_{a=0}^{6}\binom{k-4}{a}+\sum_{i=1}^{8}\binom{k-4}{i}+\sum_{b=0}^{7}\binom{k-4}{b}+\binom{k-3}{9}-4=3\sum_{i=1}^{8}\binom{k-4}{i}+3\sum_{i=0}^{7}\binom{k-4}{i}+\sum_{i=1}^{6}\binom{k-4}{i}+\sum_{i=1}^{7}\binom{k-4}{i}+\binom{k-3}{9}-4$$

这与$p\leq 3\sum_{i=1}^{8}\binom{k-4}{i}+3\sum_{i=0}^{7}\binom{k-4}{i}+\sum_{i=1}^{6}\binom{k-4}{i}+2$矛盾。

(1) 当$g(x_i)$, $g(y_j)$, $i,j=1,2,3,4$中至少有3种颜色时，不妨设为1, 2, 3。那么{1, 2, 3}的1-子集，2-

子集，3-子集均不能作为Z中任一点的色集合，$\overline{C(x_i)}$, $\overline{C(y_j)}$ $i,j=1,2,3,4$均不是$\{1, 2, 3\}$，最多有6个是$\{1, 2, 3\}$的1-子集，2-子集。因此这8个集合中至少还有两个，不妨设为$\overline{C(x_i)}$, $\overline{C(y_j)}$且均不在$\{1, 2, 3\}$的1-子集，2-子集，3-子集中，而$\overline{C(x_i)}$, $\overline{C(y_j)}$中至少有一个是空集，不妨设$\overline{C(x_i)}=\varnothing$, $\overline{C(y_j)}\neq\varnothing$。

(a) $\left|\overline{C(y_1)}\right|\le 9$。

共有$\{1, 2, 3\}$的1-子集，2-子集，3-子集及$\overline{C(y_1)}$这8个集合，均不是Z中任一点的色集合，故$p\le\sum_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}-8$与$p>\sum_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}-8$矛盾。

(b) $\left|\overline{C(y_1)}\right|\ge 10$。

$\overline{C(y_1)}$的1-子集，2-子集，…，9-子集均不是Z中任一点的色集合，故$p\le\sum_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}-\sum_{i=1}^{9}\binom{10}{i}$，矛盾。

(2) 当$g(x_i)$, $g(y_j)$, $i,j=1,2,3,4$仅有两种互不相同的颜色时。设$g(x_i)=1$, $i=1,2,3,4$, $g(y_j)=2$, $j=1,2,3,4$。

断言4 在(2)下，$\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$均不能作为Z中任一点的色集合。

断言5 在(2)下，$\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$,⋯, $\{k-\}$至少有2个集合不是Z中任一点的色集合。

否则，至多有1个不是Z中任一点的色集合，不妨设$\{4\}$,$\{5\}$,⋯, $\{k\text{-}1\}$均是Z中任一点的色集合，则$C(x_i)\cap C(y_j)\supseteq\{4, 5, \cdots, k\text{-}1\}$, $i,j=1,2,3,4$，此时$C(x_i)$, $C(y_j)$ $i,j=1,2,3,4$，这8个集合只能是$\{1, 4, 5,\cdots, k-1\}$, $\{2, 4, 5, \cdots, k\text{-}1\}$, $\{1,2,4, 5,\cdots, k-1\}$, $\{1, 3, 4, 5, \cdots, k-1\}$, $\{2, 3, 4, 5,\cdots, k\text{-}1\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, k-1\}$这6个集合之一，矛盾。

由断言5，不妨设$\{3\}$, $\{4\}$不是Z中任一点的色集合，下面考虑$\overline{C(x_i)}$, $\overline{C(y_j)}$, $i,j=1,2,3,4$这8个集合互不相同，至少有3个不是$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$，不妨设$\overline{C(x_1)}$, $\overline{C(x_2)}$, $\overline{C(y_1)}$都不是$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$。$\overline{C(x_1)}$,$\overline{C(x_2)}$不含1，不是X中任一点的色集合，$\overline{C(y_1)}$不含2，不是Y中任一点的色集合，由于相邻两点的色集合之交非空，故$\overline{C(x_1)}$, $\overline{C(x_2)}$不是$Y\cup Z$中任一点的色集合，$\overline{C(y_1)}$不是$X\cup Y$中任一点的色集合，则$\overline{C(x_1)}$, $\overline{C(x_2)}$, $\overline{C(y_1)}$不是任一点的色集合。因此$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$,$\overline{C(x_1)}$, $\overline{C(x_2)}$, $\overline{C(y_1)}$这8个集合互不相同，且均不是Z中任一点的色集合，故$p\le\sum_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}-8$，矛盾。 证毕

引理2 当$k\ge 12$，且$\sum_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}-8<p\le\sum_{i=1}^{9}\binom{k}{i}-8$时，$k$存在$k$-VDIETC。

证明：为了给出$K_{4,4,p}$的k-IE-全染色，先对k的每个顶点对应$\{1, 2, \cdots, k\}$的一个子集，令$D(x_1)=\{1, 2,\cdots,k\}$, $D(x_2)=D(x_1)\setminus\{2\}$, $D(x_3)=D(x_1)\setminus\{3\}$, $D(x_4)=D(x_1)\setminus\{4\}$,$D(y_1)=D(x_1)\setminus\{1\}$ $D(y_2)=D(x_1)\setminus\{5\}$, $D(y_3)=D(x_1)\setminus\{6\}$, $D(y_4)=D(x_1)\setminus\{7\}$, $D(z_i)=\{i+7\}$, $i=1, 2, 3, 4,\cdots,k-7$, $D(z_{k-6})=\{1, 8\}$, $D(z_{k-5})=\{2, 8\}$, $D(z_{k-4})=\{3, 8\}$, $D(z_{k-3})=\{4, 8\}$, $D(z_{k-2})=\{5, 8\}$, $D(z_{k-1})=\{6, 8\}$, $D(z_k)=\{7, 8\}$。

将除$\{1, 8\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 8\}$, $\{5, 8\}$, $\{6, 8\}$, $\{7, 8\}$外的$\{1, 2, 3, 4, \cdots, k\}$的2-子集，3-子集，…，9-子集排成一个序列$\psi_1$。令$D(z_{k+1})$, $D(z_{k+2})$, ⋯, $D(z_p)$依次是ψ_1中的第1, 2, ⋯, p-k项。这样一点是能做到的，因为ψ_1中含有$\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\ldots+\binom{k}{9}-8$项，而$p-k\le\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{9}-8$，即$p\le\sum_{i=1}^{9}\binom{k}{i}-8$。

下面给出$K_{4,4,p}$的k-IE-全染色g。令$g(x_i)=1$, $i=1, 2, 3, 4$, $g(y_j)=2$, $j=1, 2, 3, 4$。用$\max D(z_i)$染点z_i,$i=1, 2, 3, 4,\cdots, p$。当$|D(z_i)|=2$时，$g(uz_i)=\min[D(u)\cap D(z_i)]$, $u\in X\cup Y$, $i=1, 2, \cdots, p$。

当$|D(z_i)|=3$时，$g(uz_i)=\min[D(u)\cap D(z_i)]$, $u\in\{x_2, x_3,x_4, y_j\}$。$g(x_1z_i)=\min[D(x_1)\cap D(z_i)\setminus g(x_2z_i), g(x_3z_i), g(x_4z_i), g(y_jz_i)]$, $i=1, 2, \cdots, p$, $j=1,2,3,4$。

当$|D(z_i)|=4$时，$g(uz_i)=\min[D(u)\cap D(z_i)]$, $u\in\{x_3, x_4, y_j\}$。$g(x_2z_i)=\min[D(x_2)\cap D(z_i)\setminus g(x_3z_i), g(x_4z_i), g(y_jz_i)]$, $g(x_1z_i)=\min[D(x_1)\cap D(z_i)\setminus g(x_2z_i), g(x_3z_i), g(x_4z_i), g(y_jz_i)]$, $i=1, 2,\cdots, p$, $j=1, 2, 3, 4$。

当$|D(z_i)|=5$时，$g(uz_i)=\min[D(u)\cap D(z_i)]$, $u\in\{x_4, y_j\}$。$g(x_3z_i)=\min[D(x_3)\cap D(z_i)\setminus g(x_4z_i), g(y_jz_i)]$, $g(x_2z_i)=\min[D(x_2)\cap D(z_i)\setminus g(x_3z_i), g(x_4z_i), g(y_jz_i)]$, $g(x_1z_i)=\min[D(x_1)\cap D(z_i)\setminus g(x_2z_i), g(x_3z_i), g(x_4z_i), g(y_jz_i)]$, $i=1, 2, \cdots, p$, $j=1, 2, 3, 4$。

当$|D(z_i)|=6$时，$g(uz_i)=\min[D(u)\cap D(z_i)]$, $u\in\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$。$g(x_4z_i)=\min[D(x_4)\cap D(z_i)\setminus g(y_jz_i)]$, $g(x_3z_i)=\min[D(x_3)\cap D(z_i)\setminus g(x_4z_i), g(y_jz_i)]$, $g(x_2z_i)=\min[D(x_2)\cap D(z_i)\setminus g(x_3z_i),$

$g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $g(x_1z_i)=\min[D(x_1)\cap D(z_i)\setminus g(x_2z_i)$, $g(x_3z_i)$, $g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $i=1, 2, \cdots, p$, $j=1, 2, 3, 4$。

当$|D(z_i)|=7$时，$g(uz_i)=\min[D(u)\cap D(z_i)]$, $u\in\{y_2, y_3, y_4\}$。$g(y_1z_i)=\min[D(y_1)\cap D(z_i)\setminus g(y_2z_i)$, $g(y_3z_i)$, $g(y_4z_i)]$, $g(x_4z_i)=\min[D(x_4)\cap D(z_i)\setminus g(y_jz_i)]$, $g(x_3z_i)=\min[D(x_3)\cap D(z_i)\setminus g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $g(x_2z_i)=\min[D(x_2)\cap D(z_i)\setminus g(x_3z_i)$, $g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $g(x_1z_i)=\min[D(x_1)\cap D(z_i)\setminus g(x_2z_i)$, $g(x_3z_i)$, $g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $i=1, 2, \cdots, p$, $j=1,2,3,4$。

当$|D(z_i)|=8$时，$g(uz_i)=\min[D(u)\cap D(z_i)]$, $u\in\{y_3,y_4\}$。$g(y_2z_i)=\min[D(y_2)\cap D(z_i)\setminus g(y_3z_i)$, $g(y_4z_i)]$, $g(y_1z_i)=\min[D(y_1)\cap D(z_i)\setminus g(y_2z_i)$, $g(y_3z_i)$, $g(y_4z_i)]$, $g(x_4z_i)=\min[D(x_4)\cap D(z_i)\setminus g(y_jz_i)]$, $g(x_3z_i)=\min[D(x_3)\cap D(z_i)\setminus g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $g(x_2z_i)=\min[D(x_2)\cap D(z_i)\setminus g(x_3z_i)$, $g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $g(x_1z_i)=\min[D(x_1)\cap D(z_i)\setminus g(x_2z_i)$, $g(x_3z_i)$, $g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $i=1, 2, \cdots, p$, $j=1, 2, 3, 4$。

当$|D(z_i)|=9$时，$g(uz_i)=\min[D(y_4)\cap D(z_i)]$, $g(y_3z_i)=\min[D(y_3)\cap D(z_i)\setminus g(y_4z_i)]$, $g(y_2z_i)=\min[D(y_2)\cap D(z_i)\setminus g(y_3z_i)$, $g(y_4z_i)]$, $g(y_1z_i)=\min[D(y_1)\cap D(z_i)\setminus g(y_2z_i)$, $g(y_3z_i)$, $g(y_4z_i)]$, $g(x_4z_i)=\min[D(x_4)\cap D(z_i)\setminus g(y_jz_i)]$, $g(x_3z_i)=\min[D(x_3)\cap D(z_i)\setminus g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $g(x_2z_i)=\min[D(x_2)\cap D(z_i)\setminus g(x_3z_i)$, $g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $g(x_1z_i)=\min[D(x_1)\cap D(z_i)\setminus g(x_2z_i)$, $g(x_3z_i)$, $g(x_4z_i)$, $g(y_jz_i)]$, $i=1, 2, \cdots, p$, $j=1, 2, 3, 4$。

用$\min[D(x)\cap D(y)]$染边xy, $\forall x\in X, y\forall Y$。

最后得到的$K_{4,4,p}$的k-IE-全染色g是点可区别的，因为$\forall\nu\in V(K_{4,4,p})$，均有$C(\nu)=D(\nu)$。证毕

3 主要结果及其证明

定理1

$$\chi_{ie}^{vt}(K_{4,4,p})=\begin{cases}11,\ 1008\leq p\leq 2027\\ k,\ \sum\limits_{i=1}^{9}\binom{k-1}{i}-8<p\leq\sum\limits_{i=1}^{9}\binom{k}{i}-8\end{cases}$$

证明 当$p\geq 2028$时，由引理1，引理2立得结论成立，以下假设$1008\leq p\leq 2027$。第1步，用反证法证明$K_{4,4,p}$不存在10-VDIETC。第2步具体构造出的11-VDIETC。

(1) 假如$K_{4,4,p}$有10-VDIETC。

断言1 任意1-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设1-子集$\{1\}$为X中某点的色集合，则Z中每个点的色集合必含1，故$p\leq\sum\limits_{i=1}^{8}\binom{9}{i}=510$，矛盾。

断言2 任意2-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设$C(u_1)=\{1, 2\}$，且$g(u_1)=1$。此时Z中每个点的色集合必含1或2. 在$\{1, 2, \cdots, 10\}$中，含1不含2且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=1}^{8}\binom{8}{i}$；含2不含1且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=0}^{8}\binom{8}{i}$；同时含1和2且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=1}^{7}\binom{8}{i}$，故$p\leq\sum\limits_{i=1}^{8}\binom{8}{i}+\sum\limits_{i=0}^{8}\binom{8}{i}+\sum\limits_{i=1}^{7}\binom{8}{i}=765$，矛盾。

断言3 任意3-子集均不是$X\cup Y$中任一点的色集合。

否则，不妨设$C(u_1)=\{1, 2, 3\}$，且$g(u_1)=1$。则Z中每个点的色集合必含1, 2或3.在$\{1, 2, \cdots,10\}$中，含1不含2, 3且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=1}^{7}\binom{7}{i}$；含2不含1, 3且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=0}^{7}\binom{7}{i}$；含3不含1, 2且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=0}^{7}\binom{7}{i}$；含1, 2不含3且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=0}^{7}\binom{7}{i}$；含1, 3不含2且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=0}^{7}\binom{7}{i}$；含2, 3不含1且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=0}^{7}\binom{7}{i}$；同时含1, 2, 3且最多含有9个元素的子集的数目为$\sum\limits_{i=1}^{6}\binom{7}{i}$，故$p\leq\sum\limits_{i=1}^{7}\binom{7}{i}+5\sum\limits_{i=0}^{7}\binom{7}{i}+\sum\limits_{i=1}^{6}\binom{7}{i}=893$，矛盾。

(a) 当$g(x_i)$, $g(y_j)$, $i,j=1, 2, 3, 4$中至少有3种颜色时，不妨设为1, 2, 3。那么$\{1, 2, 3\}$的1-子集，2-子集，3-子集均不能作为Z中任一点的色集合，由断言1, 2, 3, $\{1, 2, 3\}$的1-子集，2-子集，3-子集也均不是$X\cup Y$中任一点的色集合，$\overline{C(x_i)}$, $\overline{C(y_j)}$, $i,j=1, 2, 3, 4$共8个集合均不是$\{1, 2, 3\}$，且至少有1个不是$\{1, 2, 3\}$的1-子集，2-子集及$\varnothing$。不妨设为$\overline{C(x_1)}$，则$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\overline{C(x_1)}$共8个集合均不是任一点的色集合。

当$\overline{C(x_1)}$不是X中任一点的色集合时，$8+p\leq$

$\sum_{i=1}^{10}\binom{10}{i}$–8，即$p$≤1007，矛盾。当$\overline{C(x_1)}$是$X$中某一点的色集合时，此时{4}, {5}, ···, {10}均不是任一点的色集合，故8+p≤$\sum_{i=1}^{10}\binom{10}{i}$–14，即$p$≤1001，矛盾。

(b) 当$g(x_i)$, $g(y_j)$, $i,j=1,2,3,4$仅有两种互不相同的颜色时。设$g(x_i)$=1，$i=1,2,3,4$，$g(y_j)$=2，$j=1,2,3,4$。

断言4 在(b)下，{1}, {2}, {1, 2}均不能作为Z中任一点的色集合。

断言5 在(b)下，{3}, {4}, {5}, ···, {10}至少有2个集合不是Z中任一点的色集合。

否则，至多有1个不是Z中任一点的色集合，不妨设{4}, {5}, ···, {10}均是Z中任一点的色集合，则，$C(x_i)\cap C(y_j)\supseteq\{4,5,\cdots,10\}$，$i,j=1, 2, 3, 4$，此时$C(x_i)$, $C(y_j)$ $i,j=1, 2, 3, 4$，这8个集合只能是{1, 4, 5, ···, 10}, {2, 4, 5, ···, 10}, {1, 2, 4, 5, ···, 10}, {1, 3, 4, 5, ···, 10}, {2, 3, 4, 5, ···, 10}, {1, 2, 3, 4, 5, ···, 10}这6个集合之一，矛盾。

由断言5，不妨设{3}, {4}不是Z中任一点的色集合，则由断言1, 2, 4可知，{1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}均不是任一点的色集合。下面考虑$\overline{C(x_i)}$, $\overline{C(y_j)}$ $i,j=1,2,3,4$这8个集合互不相同，且至少有3个不是∅, {1}, {2}, {3}, {4}，不妨设$\overline{C(x_1)}$, $\overline{C(x_2)}$, $\overline{C(y_1)}$都不是∅, {1}, {2}, {3}, {4}。$\overline{C(x_1)}$, $\overline{C(x_2)}$不含1，不是X中任一点的色集合，$\overline{C(y_1)}$不含2，不是Y中任一点的色集合，由于相邻两点的色集合之交非空，故$\overline{C(x_1)}$, $\overline{C(x_2)}$不是$Y\cup Z$中任一点的色集合，$\overline{C(y_1)}$不是$X\cup Y$中任一点的色集合，则$\overline{C(x_1)}$, $\overline{C(x_2)}$, $\overline{C(y_1)}$不是任一点的色集合。因此{1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}, $\overline{C(x_1)}$, $\overline{C(x_2)}$, $\overline{C(y_1)}$这8个集合互不相同，且均不是任一点的色集合，故8+p≤$\sum_{i=1}^{10}\binom{10}{i}$–8，即$p$≤1007，矛盾。

(2) 下面给出$K_{4,4,2027}$的11-VDIETC。

令$D(x_1)$={1, 2, ···,11}, $D(x_2)=D(x_1)\backslash\{2\}$, $D(x_3)=D(x_1)\backslash\{3\}$, $D(x_4)=D(x_1)\backslash\{4\}$, $D(y_1)=D(x_1)\backslash\{1\}$, $D(y_2)=D(x_1)\backslash\{5\}$, $D(y_3)=D(x_1)\backslash\{6\}$, $D(y_4)=D(x_1)\backslash\{7\}$，将除{1,2}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}外的 {1, 2, ···,11}的1-子集，2-子集，···, 9-子集作为Z中点的色集合。据此可参照引理2的证明过程中第2段所述的染色方法给出$K_{4,4,2027}$的11-VDIETC。 证毕

4 结束语

本文研究了一类完全三部图的点可区别IE-全染色问题，讨论并确定了当p≥1008时$K_{4,4,p}$的点可区别IE-全色数。未来的研究工作将继续对$K_{4,n,p}$ (n≥5)的点可区别IE-全色数做进一步探讨。

参 考 文 献

[1] HARARY F and PLANTHOLT M. The Point-Distinguishing Chromatic Index[M]. HARARY F and MAYBEE J S. Graphs and Application. New York: Wiley, 1985: 147–162.

[2] HORŇÁK M and SOTÁK R. The fifth jump of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$[J]. *ARS Combinatoria-Waterloo then Winnipeg*, 1996, 42: 233–242.

[3] HORŇÁK M and SOTÁK R. Localization of jumps of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$[J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 1997, 17(2): 243–251. doi: 10.7151/dmgt.1051.

[4] HORŇÁK M and ZAGALIA SALVI N. On the point-distinguishing chromatic index of $K_{m,\ n}$[J]. *ARS Combinatoria*, 2006, 80: 75–85.

[5] ZAGAGLIA SALVI N. On the value of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$[J]. *ARS Combinatoria*, 1990, 29B: 235–244.

[6] CHEN Xiang'en. Point-distinguishing chromatic index of the union of paths[J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2014, 64(3): 629–640. doi: 10.1007/s10587-014-0123-8.

[7] CHEN Xiang'en, GAO Yuping, and YAO Bing. Vertex-distinguishing IE-total colorings of complete bipartite graphs $K_{m,n}(m<n)$[J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2013, 33(2): 289–306. doi: 10.7151/dmgt.1659.

[8] LIU Chanjuan and ZHU Enqiang. General vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 2014: 849748.

[9] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(1)色多项式递推公式与四色猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(4): 763–779. doi: 10.11999/JEIT160072.
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs (1)recursion formula of chromatic polynomial and four-color conjecture[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(4): 763–779. doi: 10.11999/JEIT160072.

[10] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(2)多米诺构形与扩缩运算[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1271–1327. doi: 10.11999/JEIT160224.
XU Jin. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (2) Domino configurations and extending-contracting operations[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1271–1327. doi: 10.11999/JEIT160224.

[11] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(3)纯树着色与唯一4-色

极大平面图猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1328–1363. doi: 10.11999/JEIT160409.

XU Jin. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (3) purely tree-colorable and uniquely 4-colorable maximal planar graph conjecture[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1328–1363. doi: 10.11999/JEIT160409.

[12] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(4)σ-运算与Kempe等价类[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.

XU Jin. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (4)σ-operations and Kempe equivalent classes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.

[13] XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. On purely tree-colorable planar graphs[J]. *Information Processing Letters*, 2016, 116(8): 532–536. doi: 10.1016/j.ipl.2016.03.011.

[14] 许进, 李泽鹏, 朱恩强. 极大平面图理论研究进展[J]. 计算机学报, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01680.

XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. Research progress on the theory of maximal planar graphs[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01680.

[15] 陈祥恩, 李婷. (k,l)-递归极大平面图的结构[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(9): 2281–2286. doi: 10.11999/JEIT171021.

CHEN Xiang'en and LI Ting. The structure of (k,l)-recursive maximal planar graph[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(9): 2281–2286. doi: 10.11999/JEIT171021.

[16] 刘小青, 许进. 4-正则图着色的Kempe等价性[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(5): 1233–1244. doi: 10.11999/JEIT160716.

LIU Xiaoqing and XU Jin. Kempe equivalence of colorings of 4-regular graphs[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(5): 1233–1244. doi: 10.11999/JEIT160716.

[17] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, *et al*. Size of edge-critical uniquely 3-colorable planar graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2016, 339(4): 1242–1250. doi: 10.1016/j.disc.2015.11.009.

[18] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, *et al*. A note on uniquely 3-colourable planar graphs[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2017, 94(5): 1028–1035. doi: 10.1080/00207160.2016.1167196.

[19] ZHU Enqiang, LI Zepeng, SHAO Zehui, *et al*. Acyclically 4-colorable triangulations[J]. *Information Processing Letters*, 2016, 116(6): 401–408. doi: 10.1016/j.ipl.2015.12.005.

陈祥恩：男，1965年生，教授，主要研究方向为图论及其应用.
马静静：女，1997年生，硕士生，研究方向为图论及其应用.

责任编辑：马秀强