一种基于半定松弛技术的TDOA-FDOA无源定位算法

孙 霆 董春曦* 毛 昱

(西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071)

摘 要：在运动目标的无源定位场景下，闭式算法在低噪声情况下可以到达克拉美罗下界(CRLB)，但是这些算法往往不能适应较大的测量噪声环境。针对目前闭式算法适应大噪声能力较差这一问题，该文联合到达时间差(TDOA)以及到达频率差(FDOA)，提出一种基于半定松弛(SDR)技术的无源定位算法。该算法首先构建传统闭式解的伪线性方程，其次利用随机鲁棒最小二乘(SRLS)的思想以及目标参数与额外变量之间的非线性关系，将无源定位问题转化为了具有2次等式约束的最小二乘问题；随后，将半定松弛技术应用到这一问题上，约束最小二乘问题松弛为半定规划(SDP)问题，最后，借助优化工具箱可以有效地对目标参数进行求解。该文所提出的算法不需要初始值先验条件，仿真实验表明了所提算法的有效性。

关键词：无源定位；到达时间差；到达频率差；半定松弛；克拉美罗下界

中图分类号：TN97 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2020)07-1599-07

DOI: 10.11999/JEIT190435

A TDOA-FDOA Passive Positioning Algorithm Based on the Semi-Definite Relaxation Technique

SUN Ting DONG Chunxi MAO Yu

(*School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: In the passive location of moving target, the closed-form solution can reach Cramér-Rao Lower Bound (CRLB) under the low noise level, but these algorithms often can not adapt to the large measurement noise condition. For this problem, this paper proposes a passive positioning algorithm based on the Semi-Definite Relaxation (SDR) using Time Difference Of Arrival (TDOA) and Frequency Difference Of Arrival (FDOA). Firstly, this method constructs the pseudo-linear equation of the typical closed-form solution. Secondly, the idea of Stochastic Robust Least Squares (SRLS) and the nonlinear relationship between the target parameters and the additional variables are used to transform the localization problem into the least squares problem with quadratic equality. Using Semi-Definite Programming (SDP) technique, constrained least squares problem is then converted into the SDP problem, which is finally solved by the optimization toolbox. The proposed method does not require an initial priori information and simulations show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Passive localization; Time Difference Of Arrival (TDOA); Frequency Difference Of Arrival (FDOA); Semi-Definite Relaxation (SDR); Cramér-Rao Lower Bound (CRLB)

1 引言

无源定位技术由于其具有不主动发射电磁信号、生存能力强、作用距离远等优点[1]，受到了国内外学者的关注。无源定位已经被广泛应用于传感器网络、雷达、无线通信以及导航[2–8]等领域中。对于运动目标或者是目标与观测站之间存在相互运动时，常见的定位体制是利用到达时间差(Time Difference Of Arrival, TDOA)以及到达频率差(Fequency Difference Of Arrival, FDOA)观测量对目标参数进行估计。

使用TDOA/FDOA对运动目标进行定位最大的困难在于其高度的非线性以及非凸性，为此，国内外学者提出了许多算法。文献[9]利用泰勒级数展开的技术，将非线性等式线性化进行求解。然而这种算法的收敛性受初始值影响较大。随后，文献[10]给出了一种经典的两步加权最小二乘(Two Step Weighted Least Squares, TSWLS)闭式算法。这种算法第1步建立了含有额外变量的伪线性方程并且给出了加权最小二乘解，第2步利用额外变量与目

收稿日期：2019-06-13；改回日期：2019-10-28；网络出版：2020-02-04

*通信作者： 董春曦 chxdong@mail.xidian.edu.cn

标参数的平方关系进一步提高了定位精度。这种算法在低噪声模型下可以得到克拉美罗下界(Cramér-Rao Lower Bound, CRLB)[11]。随后Ho等人在文献[12,13]中将TSWLS算法扩展到观测站存在误差的情况。文献[14]则将多维标度(MultiDimensional Scaling, MDS)的算法引入到TDOA/FDOA的定位体制中并且定位性能优于TSWLS算法。文献[15]指出了当目标与参考站十分接近，也就是它们之间的坐标差很小时，TSWLS算法会出现较大的误差。为此，文献[15]提出了一种改进的定位算法，这种算法的改进主要是在第2步中对TSWLS第1步的误差进行估计，修正定位初始解得到最终的估计值。文献[16]也提出了一种改进传统TSWLS第2步的TDOA/FDOA闭式算法。与文献[15]不同的是，这种算法在第2步建立了新的等式方程对目标位置以及速度直接进行求解。这两种改进的TSWLS算法在低噪声条件下均能够实现CRLB。文献[17]首先将定位问题转化为了2次约束问题，随后简化了约束条件得到了初值解，第2步同样对第1步的初值解进行了修正并且得到了最终的解。

以上这些闭式算法大部分均是将非线性问题转化为了线性问题或者是伪线性问题进行处理。而除了闭式解，将非线性问题转化为凸优化算法应用于定位问题也十分常见。文献[18]基于加权最小二乘(Weighted Least Squares, WLS)，重新阐述了无源定位问题并且使用半定松弛(SeminDefine Relaxation, SDR)的技术将非凸的定位问题转换为凸优化问题。在适当的噪声条件下，这种算法的定位性能优于MDS以及TSWLS算法。文献[19]将半定松弛技术应用于具有站址误差的TDOA定位，将最大似然估计问题转化为凸优化问题进行求解。随后文献[20]将这一算法拓展到运动目标定位场景，首先使用SDR得到初始值，随后给出一种迭代算法更新目标参数估计值，虽然同样具有较好的性能。但是这种算法与文献[18]均需要一个先验的初始估计值，若该值选取较差，这种算法也无法达到CRLB精度；同时文献[20]给出的算法运行时间远远大于文献[18]的运行时间。

虽然闭式解的算法计算量较小，实时性得到了保证。但是当测量噪声较大时，实时性往往无法保证定位精度依旧接近克拉美罗界，有时甚至出现门限效应(threshold effect)[10]。因此，如何使算法更好地适应大的测量噪声，进一步提高定位算法的性能值得研究。此外，对于一般的无源定位算法，其目标函数是基于LS/WLS的代价函数，而观测矩阵以及向量往往都具有不确定性，这些算法并没有从统计模型的角度对目标函数进行处理。而随机鲁棒最小二乘(Stochastic Robust Least Squares, SRLS)[21]的思想将代价函数的期望作为优化的目标函数，这能够更好地处理不确定性。

因此，本文针对运动目标TDOA/FDOA定位场景，利用SRLS思想首先将定位问题转换为具有2次等式约束的最小二乘问题，随后将约束最小二乘问题松弛为半定规划(SeminDefine Programming, SDP)问题，使用凸优化工具箱[22]进行求解，本文算法求解过程不需要先验的初始值。虽然本文所提出的算法需要较长的运行时间，但是仿真实验表明了该算法在适当的噪声条件下可以实现克拉美罗下界并且能够更好地适应大的测量噪声。

文中粗斜体小写和大写字母分别表示向量与矩阵；斜体字母表示标量；另外，向量$\boldsymbol{a}$的第k个元素表示$\boldsymbol{a}(k,1)$, $[\cdot]^{\mathrm{T}}$表示转置，$(\cdot)^{\mathrm{o}}$表示测量值$(\cdot)$的真实值，$\mathrm{tr}(\cdot)$表示迹运算；$\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{0}$分别代表元素均为零的矩阵以及向量；符号$\odot$表示两个矩阵或向量对应元素相乘的运算，即Schur积运算。

2 定位场景

本文考虑在3维空间中使用M个观测站对单一运动目标进行定位。每个观测站的位置以及速度均准确已知并且分别表示为$\boldsymbol{s}_i=[x_i^{\mathrm{o}},y_i^{\mathrm{o}},z_i^{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}$和$\dot{\boldsymbol{s}}_i=[\dot{x}_i^{\mathrm{o}},\dot{y}_i^{\mathrm{o}},\dot{z}_i^{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}$，其中$i=1,2,\cdots,M$。运动目标的速度和位置分别为$\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}=[x^{\mathrm{o}},y^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}$和$\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}=[\dot{x}^{\mathrm{o}},\dot{y}^{\mathrm{o}},\dot{z}^{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}$。不失一般性地，本文选取了第1个观测站为参考站，那么由M个观测站得到的$M-1$个真实的到达时间差(TDOA)，乘以信号传播速度后可以得到式(1)

$$r_{i1}^{\mathrm{o}}=r_i^{\mathrm{o}}-r_1^{\mathrm{o}} \tag{1}$$

式中，r_{i1}^{o}表示第i个观测站与参考站之间的到达距离差，$r_i^{\mathrm{o}}=||\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_i||$表示第$i$个观测站与目标的距离。

对式(1)两边关于时间求导可以得到距离差变化率为

$$\dot{r}_{i1}^{\mathrm{o}}=\dot{r}_i^{\mathrm{o}}-\dot{r}_1^{\mathrm{o}} \tag{2}$$

式中，$\dot{r}_i^{\mathrm{o}}$表示距离变化率，并且有等式(3)

$$\dot{r}_i^{\mathrm{o}}=(\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_i)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_i)/||\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_i|| \tag{3}$$

距离差变化率$\dot{r}_{i1}^{\mathrm{o}}$可由真实的到达频率差(FDOA)计算得到[10]。

所有真实到达距离差及其变化率的向量形式记作$\boldsymbol{r}^{\mathrm{o}}=[r_{21}^{\mathrm{o}},r_{31}^{\mathrm{o}},\cdots,r_{M1}^{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}$以及$\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{o}}=[\dot{r}_{21}^{\mathrm{o}},\dot{r}_{31}^{\mathrm{o}},\cdots,\dot{r}_{M1}^{\mathrm{o}}]^{\mathrm{T}}$。然而，这些真实值在实际中往往无法得到，因此本文定义到达距离差及其变化率的测量值分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}^{\rm o}+\boldsymbol{n}\\ \dot{\boldsymbol{r}}&=\dot{\boldsymbol{r}}^{\rm o}+\dot{\boldsymbol{n}}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{r}=[r_{21},r_{31},\cdots,r_{M1}]^{\rm T}$, $\dot{\boldsymbol{r}}=[\dot{r}_{21},\dot{r}_{31},\cdots,\dot{r}_{M1}]^{\rm T}$。$\boldsymbol{n}=[n_{21},n_{31},\cdots,n_{M1}]^{\rm T}$和$\dot{\boldsymbol{n}}=[\dot{n}_{21},\dot{n}_{31},\cdots,\dot{n}_{M1}]^{\rm T}$分别表示到达距离差及其变化率的测量噪声向量。与文献[17]相同，假设噪声服从零均值高斯分布并且其协方差矩阵分别为$\mathrm{E}[\boldsymbol{n}^{\rm T}\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{Q}_t$, $\mathrm{E}[\dot{\boldsymbol{n}}^{\rm T}\dot{\boldsymbol{n}}]=\boldsymbol{Q}_f$。

3　半定松弛算法

3.1　约束最小二乘问题阐述

将式(1)移项为$r_{i1}^{\rm o}+r_1^{\rm o}=r_i^{\rm o}$，对等式两边平方并且将$r_i^{\rm o}$的定义式代入可以得到TDOA等式为

$$(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_1)^{\rm T}\boldsymbol{u}^{\rm o}+r_{i1}^{\rm o}r_1^{\rm o}=0.5(||\boldsymbol{s}_i||^2-||\boldsymbol{s}_1||^2-r_{i1}^{\rm o2}),\quad i=2,3,\cdots,M\tag{5}$$

对式(5)两边关于时间求导有式(6)的FDOA等式

$$\begin{aligned}&(\dot{\boldsymbol{s}}_i-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\rm T}\boldsymbol{u}^{\rm o}+(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_1)^{\rm T}\dot{\boldsymbol{u}}^{\rm o}+r_{i1}^{\rm o}\dot{r}_1^{\rm o}+\dot{r}_{i1}^{\rm o}r_1^{\rm o}\\&=\dot{\boldsymbol{s}}_i^{\rm T}\boldsymbol{s}_i-\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\rm T}\boldsymbol{s}_1-\dot{r}_{i1}^{\rm o}r_{i1}^{\rm o},\quad i=2,3,\cdots,M\end{aligned}\tag{6}$$

令$\boldsymbol{\theta}^{\rm o}=[\boldsymbol{u}^{\rm oT},\dot{\boldsymbol{u}}^{\rm oT},r_1^{\rm o},\dot{r}_1^{\rm o}]^{\rm T}$表示未知向量，将所有TDOA以及FDOA等式用矩阵形式表示有

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{\theta}^{\rm o}=\boldsymbol{h}\tag{7}$$

式中，

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)^{\rm T} & \boldsymbol{0} & r_{21}^{\rm o} & 0\\ \vdots & \boldsymbol{0} & \vdots & 0\\ (\boldsymbol{s}_M-\boldsymbol{s}_1)^{\rm T} & \boldsymbol{0} & r_{M1}^{\rm o} & 0\\ (\dot{\boldsymbol{s}}_2-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\rm T} & (\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)^{\rm T} & \dot{r}_{21}^{\rm o} & r_{21}^{\rm o}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\dot{\boldsymbol{s}}_M-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\rm T} & (\boldsymbol{s}_M-\boldsymbol{s}_1)^{\rm T} & \dot{r}_{M1}^{\rm o} & r_{M1}^{\rm o}\end{bmatrix}\tag{8}$$

此外，$\boldsymbol{h}=[\boldsymbol{h}_t^{\rm T},\boldsymbol{h}_f^{\rm T}]^{\rm T}$为$2(M-1)$维的列向量，$\boldsymbol{h}_t$以及$\boldsymbol{h}_f$的每一个元素分别表示为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{h}_t(i-1,1)&=0.5(\boldsymbol{s}_i^{\rm T}\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_1^{\rm T}\boldsymbol{s}_1-r_{i1}^{\rm o2})\\ \boldsymbol{h}_f(i-1,1)&=\dot{\boldsymbol{s}}_i^{\rm T}\boldsymbol{s}_i-\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\rm T}\boldsymbol{s}_1-\dot{r}_{i1}^{\rm o}r_{i1}^{\rm o}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

用测量值代替真实值，式(7)可以重写为

$$\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-\tilde{\boldsymbol{h}}=\boldsymbol{\varepsilon}\tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{\varepsilon}$表示等式误差向量，并且有$\tilde{\boldsymbol{h}}=\boldsymbol{h}+\Delta\boldsymbol{h}$, $\tilde{\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{G}$。只保留线性误差项，那么$\Delta\boldsymbol{h}$和$\Delta\boldsymbol{G}$分别表示为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{h}&\approx-\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}^{\rm o}\odot\boldsymbol{n}\\ \dot{\boldsymbol{r}}^{\rm o}\odot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}^{\rm o}\odot\dot{\boldsymbol{n}}\end{bmatrix}\\ \Delta\boldsymbol{G}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_{(M-1)\times 2N} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{1}_{M-1}\\ \boldsymbol{O}_{(M-1)\times 2N} & \dot{\boldsymbol{n}} & \boldsymbol{n}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{11}$$

TSWLS算法[10,16]第1步是基于加权最小二乘将等式误差式(10)的代价函数最小化，而在第2步中考虑未知向量$\boldsymbol{\theta}^{\rm o}$各个分量之间的非线性关系也是基于加权最小二乘方法。显然，式(11)的误差矩阵以及误差向量具有不确定性，而基于随机鲁棒最小二乘[21]的代价函数能够更好地处理这种模型，随机鲁棒最小二乘的思想是最小化上述等式误差二范数平方的期望值。因此，通过引入随机鲁棒最小二乘，定位问题重新构建为式(12)的具有2次等式约束的最小二乘问题

$$\left.\begin{aligned}&\text{s.t.}\ \ r_1^{\rm o}=||\boldsymbol{u}^{\rm o}-\boldsymbol{s}_1||\\ &\min_{\boldsymbol{\theta}^{\rm o}}\mathrm{E}\{||\varepsilon||^2\}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

$$\dot{r}_1^{\rm o}=(\dot{\boldsymbol{u}}^{\rm o}-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\rm T}(\boldsymbol{u}^{\rm o}-\boldsymbol{s}_1)/||\boldsymbol{u}^{\rm o}-\boldsymbol{s}_1||\tag{13}$$

利用式(11)给出目标函数式(12)的具体表达式，将$\tilde{\boldsymbol{h}}=\boldsymbol{h}+\Delta\boldsymbol{h}$以及$\tilde{\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{G}$代入式(10)，则等式误差代价函数2范数为

$$\begin{aligned}||\varepsilon||^2&=||(\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{G})\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-(\boldsymbol{h}+\Delta\boldsymbol{h})||^2\\&=||\boldsymbol{G}\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-\boldsymbol{h}||^2+\boldsymbol{\theta}^{\rm oT}\Delta\boldsymbol{G}^{\rm T}\Delta\boldsymbol{G}\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-2\boldsymbol{\theta}^{\rm oT}\Delta\boldsymbol{G}^{\rm T}\Delta\boldsymbol{h}\\&\quad+\Delta\boldsymbol{h}^{\rm T}\Delta\boldsymbol{h}+2(\Delta\boldsymbol{G}\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-\Delta\boldsymbol{h})^{\rm T}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-\boldsymbol{h})\end{aligned}\tag{14}$$

使用随机鲁棒最小二乘的思想需要对式(14)左右两边取期望，由于噪声服从零均值高斯分布，所以$\mathrm{E}(\Delta\boldsymbol{G}\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-\Delta\boldsymbol{h})=0$，那么式(14)右边最后一项取期望后为0。令$\boldsymbol{C}_h=\mathrm{E}\{\Delta\boldsymbol{h}^{\rm T}\Delta\boldsymbol{h}\}$，由于其在式(14)中为常数项，因此不需要进行计算。另记$\boldsymbol{C}_G=\mathrm{E}(\Delta\boldsymbol{G}^{\rm T}\Delta\boldsymbol{G})$, $\boldsymbol{C}_{Gh}=\mathrm{E}(\Delta\boldsymbol{G}^{\rm T}\Delta\boldsymbol{h})$，那么经过简单的矩阵运算[21]，可以得到$\boldsymbol{C}_G$和$\boldsymbol{C}_{Gh}$的表达式分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_G&=\mathrm{E}\{\Delta\boldsymbol{G}^{\rm T}\Delta\boldsymbol{G}\}\\&=\mathrm{blkdiag}(\boldsymbol{O}_{2N\times 2N},\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t)+\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_f),\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t))\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_{Gh}&=\mathrm{E}\{\Delta\boldsymbol{G}^{\rm T}\Delta\boldsymbol{h}\}\\&=-[\boldsymbol{0}_{2N}^{\rm T},\mathrm{tr}(\mathrm{diag}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{Q}_t),\mathrm{tr}(\mathrm{diag}(\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{Q}_f)]^{\rm T}\end{aligned}\tag{16}$$

因此，对式(14)取期望可以得到目标函数的具体表达式为

$$\mathrm{E}\{||\varepsilon||^2\}=||\boldsymbol{G}\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-\boldsymbol{h}||^2+\boldsymbol{\theta}^{\rm oT}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-2\boldsymbol{\theta}^{\rm oT}\boldsymbol{C}_{Gh}+\boldsymbol{C}_h\tag{17}$$

至此，定位问题转化为了具有2次等式约束的最小二乘问题，接下来将给出具体求解过程。

3.2　半定松弛解

经过一些简单的矩阵变化，约束最小二乘问题可以改写为

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{\theta}^{\rm o}}||\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}^{\rm o}-\boldsymbol{b}||^2\\ &\text{s.t.}\ \ r_1^{\rm o}=||\boldsymbol{u}^{\rm o}-\boldsymbol{s}_1||\\ &\qquad\dot{r}_1^{\rm o}=(\dot{\boldsymbol{u}}^{\rm o}-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\rm T}(\boldsymbol{u}^{\rm o}-\boldsymbol{s}_1)/||\boldsymbol{u}^{\rm o}-\boldsymbol{s}_1||\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

式中，矩阵$\boldsymbol{A}$表示$\boldsymbol{G}^{\rm T}\boldsymbol{G}+\boldsymbol{C}_G$的平方根，即有$\boldsymbol{A}^{\rm T}\boldsymbol{A}=$

$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}+\boldsymbol{C}_G$成立，并且$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}-\boldsymbol{C}_{Gh})$，添加的常数项为$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$。

优化问题式(18)的目标函数是凸函数，但是其约束条件是非凸的，因此这一类问题属于非凸的2次约束2次规划(Quadratically Constrained Quadratic Programming, QCQP)[21]问题，本文使用半定松弛(SDR)技术来求解这一问题。

优化问题式(18)的目标函数等价于

$$||\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{b}||^2=\mathrm{tr}\left(\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{oT}}\\ \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}} & 1\end{array}\right]\boldsymbol{W}\right) \tag{19}$$

式中，

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{oT}},\ \boldsymbol{W}=\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\end{array}\right] \tag{20}$$

那么约束条件式(13)可以写为

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{Y}(7,7)=\mathrm{tr}\{\boldsymbol{Y}(1:3,1:3)\}-2\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}(1:3)+\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1\\ \boldsymbol{Y}(7,8)=\mathrm{tr}\{\boldsymbol{Y}(1:3,4:6)\}-\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}(1:3)\\ \qquad\qquad -\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{o}}(4:6)+\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1\end{array}\right\} \tag{21}$$

显然，新的约束条件式(21)两边是关于$\boldsymbol{Y}$和$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}$的仿射函数，因此是凸的[21]。此外，对距离变化率$\dot{r}_1^{\mathrm{o}}=(\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}-\dot{\boldsymbol{s}}_1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_1)/||\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}-\boldsymbol{s}_1||$利用Schwartz不等式有$\dot{r}_1^{\mathrm{o}2}\le||\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}-\dot{\boldsymbol{s}}_1||^2$，即

$$\boldsymbol{Y}(8,8)\le\mathrm{tr}\{\boldsymbol{Y}(4:6,4:6)\}-2\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}(4:6)+\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{s}}_1 \tag{22}$$

而表达式$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{oT}}$可以松弛为$\boldsymbol{Y}\succcurlyeq\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{oT}}$，并且$\boldsymbol{Y}$的秩为1。因此，约束最小二乘问题最终可以转换为

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}}\mathrm{tr}\left(\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{oT}}\\ \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}} & 1\end{array}\right]\boldsymbol{W}\right)\\ \mathrm{s.t.}\\ \boldsymbol{Y}(7,7)=\mathrm{tr}\{\boldsymbol{Y}(1:3,1:3)\}-2\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}(1:3)+\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1\\ \boldsymbol{Y}(7,8)=\mathrm{tr}\{\boldsymbol{Y}(1:3,4:6)\}-\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}(1:3)\\ \qquad\qquad -\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{o}}(4:6)+\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_1\\ \boldsymbol{Y}(8,8)\le\mathrm{tr}\{\boldsymbol{Y}(4:6,4:6)\}-2\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}}(4:6)+\dot{\boldsymbol{s}}_1^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{s}}_1\\ [\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{oT}};\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{o}},1]^{\mathrm{T}}\succcurlyeq 0\end{array}\right\} \tag{23}$$

式(23)的优化问题可以通过凸优化工具箱进行求解。

值得注意的一点是，本文算法最终得到的凸优化问题式(23)与文献[18]中的凸优化问题式(32)虽然形式相同，但是本质上构造凸优化问题的过程却是截然不同：文献[18]是利用等式误差矩阵式(10)将最大似然估计问题近似为加权最小二乘问题，随后通过简单的数学变化以及适当的松弛构造凸优化问题，但是文献[18]的这种算法并没有充分考虑观测矩阵和向量中存在的随机误差；本文将随机鲁棒最小二乘技术应用于定位问题，将等式误差式(10) 2范数的期望作为目标函数，进而构造凸优化问题。根据文献[21]，本文这种技术能够更好地处理观测矩阵和向量中存在的随机误差，后续仿真实验也证明了这一点。

4 算法计算复杂度分析

本节主要对本文所提出算法的计算复杂性进行了简要分析，为了分析简便，主要以实数乘法进行分析；本文所提出的算法主要的计算复杂度集中在求解SDP问题上，根据文献[18]，最差的求解SDP问题的复杂度为$O\left(\sqrt{\mu}(m^3+m^2\mu^2+m\mu^3)\right)$，其中本文算法中$m=4$为SDP标准形式下约束条件的个数并且$\mu=2N+3$为优化问题空间(本文中$N=3$)，因此本文算法复杂度近似为$O(4(2N+3)^{4.5})$，相比较[18]中SDR的算法，不需要进行初始值的求解，因此本文算法的复杂度略小于文献[18]的复杂度。

5 仿真实验

本节给出了仿真实验进一步验证本文算法的定位性能。不失一般性，假设TDOA与FDOA测量误差之间相互独立，并且距离差及其变化率测量误差分别设置为$\boldsymbol{Q}_t=\sigma^2\boldsymbol{R}$以及$\boldsymbol{Q}_f=0.1\sigma^2\boldsymbol{R}$[10]。这里，$\sigma^2$为测量噪声的方差，$\boldsymbol{R}$是对角线元素均为1，其余元素为0.5的矩阵。算法性能由多次蒙特卡罗实验得到的目标位置和速度估计值的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)取平均后评估，蒙特卡罗仿真次数设置为$l=5000$次，均方根误差指标定义为

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{RMSE}(\boldsymbol{u})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{l}||\hat{\boldsymbol{u}}_i-\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}||^2/l}\\ \mathrm{RMSE}(\dot{\boldsymbol{u}})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{l}||\hat{\dot{\boldsymbol{u}}}_i-\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}||^2/l}\end{array}\right\} \tag{24}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{u}}_i$和$\hat{\dot{\boldsymbol{u}}}_i$为每次蒙特卡罗实验得到的目标位置与速度估计值。

本文考虑3种仿真情形：前2种仿真情形分别对近场目标以及远场目标的位置与速度进行了估计。场景3给出了对一个运动目标在不同时刻的位置以及速度进行了估计。其中，对比算法包括文献[16]中改进的TSWLS算法、文献[17]中改进的非完全约束WLS算法以及文献[18]中的SDR算法。此外，CRLB作为检验估计性能的标准在仿真中也给出。

场景1中近场目标的位置与速度分别设置为$\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}=[400,\ 500,550]^{\mathrm{T}}$与$\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}=[20,\ 25,\ 30]^{\mathrm{T}}$，远场目标

的位置与速度分别设置为$\boldsymbol{u}^{\mathrm{o}}=[2000,\ 1800,\ 2400]^{\mathrm{T}}$与$\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{o}}=[20,\ 25,\ 30]^{\mathrm{T}}$，观测站的位置与速度在表1中给出。另外，本文算法使用的是凸优化工具箱中的SeDuMi求解器[22]。图1(a)与图1(b)分别给出了近场条件下，不同定位算法对目标参数估计性能随着测量噪声增加的变化曲线。图2(a)和图2(b)则是远场条件下，不同定位算法对目标参数估计性能随着测量噪声增加的变化曲线。

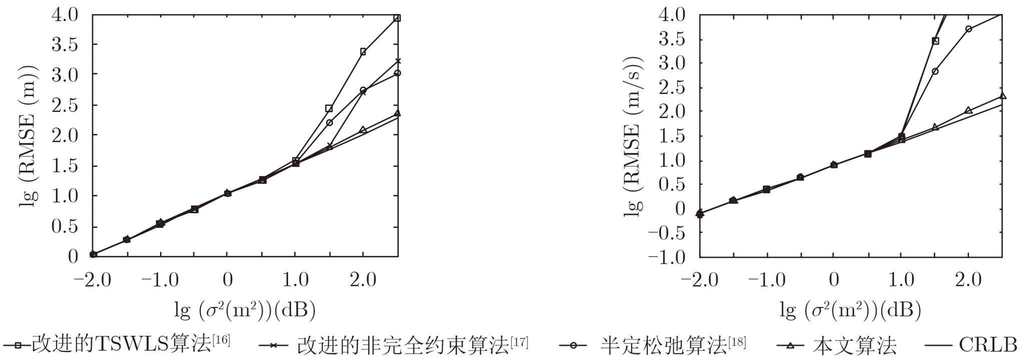
如图1(a)所示，对于近场目标位置估计，文献[16]改进的TSWLS算法、文献[17]中改进的非完全约束WLS算法、文献[18]中SDR算法及本文所提出的算法均能够实现CRLB；当测量噪声大于1 dB时改进的TSWLS方法出现了“门限效应”，定位性能下降，文献[18]中的SDR算法也开始偏离CRLB。而文献[17]中改进的非完全约束算法第1步需要求解高次方程，当测量噪声大于1.5 dB定位性能下降较快，偏离CRLB程度较大；本文方法即使在测量噪声达到2 dB时也十分接近CRLB。当测量噪声达到2 dB时，本文方法得到的均方根误差比改进的非完全约束WLS算法[17]以及SDR算法[18]大约可以降低0.7 dB。

如图1(b)所示，近场目标速度的估计与位置估计情况大致相同，低噪声时所有算法的估计性能均能达到CRLB。当噪声达到1 dB时，对比算法均开始偏离CRLB，但是本文提出的方法在测量噪声大于1.5 dB才开始偏离CRLB，仿真实验表明该算法能够更好地适应大的测量噪声，具有更好的鲁棒性，而且本文所提的算法不需要初始值这个先验条件。

在远场条件下目标参数估计性能与近场目标参数估计性能相似：对于远场目标位置估计，如图2(a)所示，当测量噪声较小时所有算法均能够达到CRLB。当噪声到达–5 dB时，改进的TSWLS算法以及SDR算法开始偏离CRLB，当噪声达到0 dB，改进的非完全约束WLS的算法也会发生同样的情况。而本文算法在0 dB时虽然也会开始偏离CRLB，但其偏离程度较小，具有更好的鲁棒性。对于远场目标速度估计性能，如图2(b)所示，低噪声时所有算法可以实现CRLB；当噪声大于–0.5 dB，所有

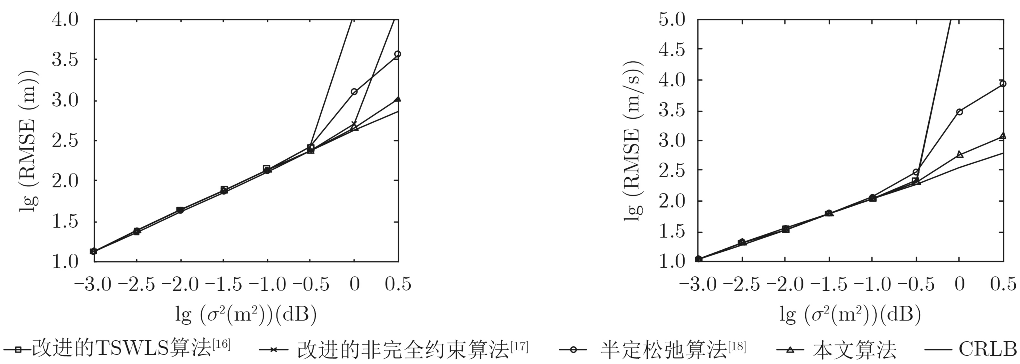
表 1　观测站的位置与速度

序号	位置(m)			速度(m/s)		
1	300	100	150	30	–20	20
2	400	150	100	–30	10	20
3	300	500	200	10	–20	10
4	350	200	100	10	20	30
5	–100	–100	–100	–20	20	20



(a) 近场目标位置估计均方根误差　　(b) 近场目标速度估计均方根误差

图 1 近场目标估计均方根误差对比



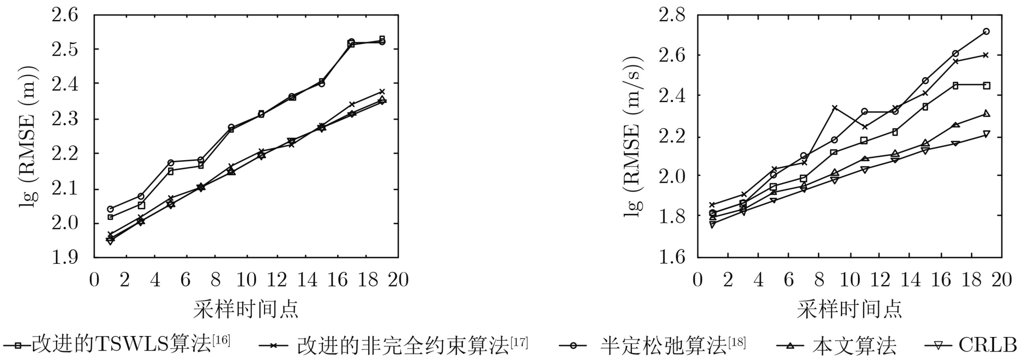
(a) 远场目标位置估计均方根误差　　(b) 远场目标速度估计均方根误差

图 2 远场目标估计均方根误差对比

算法均开始偏离CRLB，但是本文方法偏离程度较小，能够更好的适应大的测量噪声。

在场景3的仿真中，我们对运动目标在不同时间节点进行参数估计，目标初始位置为$\boldsymbol{u}_{\rm ini}^{\rm o}=[1000,\ 1000,\ 1000]^{\rm T}$，速度为$\dot{\boldsymbol{u}}^{\rm o}=[20,\ 25,\ 30]^{\rm T}$，每隔2个单位时间长度进行1次定位，观测时间总长度为19个单位时间长度，因此目标位置随时间变化的关系式为$\boldsymbol{u}^{\rm o}=\boldsymbol{u}_{\rm ini}^{\rm o}+t\dot{\boldsymbol{u}}^{\rm o}$，$t=1,3,\cdots,19$。测量噪声方差设置为0 dB，图3(a)和图3(b)为在这个过程中不同算法对目标位置以及速度的估计性能的比较。

对于目标位置的估计，从图3(a)看出本文算法在整个观测时间内始终有着最小的均方根误差，比文献[16]以及文献[18]中的算法大约能改善0.2 dB，而改进的非完全约束WLS算法虽然与本文算法相对接近，但是从图3(b)中可以看出该方法对于速度的估计性能较差，本文算法对于速度估计依旧有最小的均方根误差。



(a) 观测时间内位置估计均方根误差 (b) 观测时间内速度估计均方根误差

图 3 不同时刻目标估计均方根误差对比

另外，图3仿真情景中值得注意的一点是所提算法的优势随着采样时间点的增加而增大，这里给出一种比较合理的解释：通常而言对于定位问题，当噪声一定时，不同算法在远距离目标估计的场景下偏离CRLB的程度会比近距离目标大(除非出现阈值效应)，这一点在文献[10,18]仿真实验中均有体现；在本文仿真实验中，随着时间的增加，目标与参考观测站之间的距离逐渐变大，不同算法偏离CRLB的程度也会变大，估计均方根误差也会变大。而正如前文中所述，所提算法具有较好的鲁棒性，因此偏离CRLB的程度与其他算法相比较小，即算法优势逐渐增大(尤其速度估计优势)。

最后，表2给出了4种算法的平均CPU运行时间，本文提出的算法执行时间略小于文献[18]方法，这也证明了第4节理论分析的正确性，并且本文提出的算法不需要初始值的先验条件；而相比于闭式解[16,17]，本文算法执行运行时间较长，计算量较大，但是却具有更好的适应大的测量噪声能力。

表 2 不同算法平均CPU运行时间(s)

算法	平均CPU运行时间(s)
改进TSWLS[16]	0.0016
改进的非完全约束算法[17]	0.0080
SDR算法[18]	0.1720
本文方法	0.1600

6 结束语

在目标处于运动状态的无源定位场景下，针对闭式算法无法更好适应大的测量噪声的问题，本文联合TDOA以及FDOA，提出一种基于半定松弛技术的无源定位算法。首先利用TSWLS的伪线性方程以及随机鲁棒最小二乘的思想，将定位问题重新构建为了具有2次等式约束的最小二乘问题，随后将约束最小二乘问题转化为半定规划问题，使用优化工具箱进行求解。仿真实验表明了虽然本文算法无法保证实时性，但是测量噪声较大时，实时性并不能带来较好的定位性能，而本文算法在适当的噪声条件下可以实现克拉美罗下界并且能够更好地适应大的测量噪声。

参 考 文 献

[1] 王鼎, 胡涛. 无源定位技术-二次等式约束最小二乘估计理论与方法[M]. 北京: 电子工业出版社, 2018: 3–9.
WANG Ding and HU Tao. Least-Squares Estimation Theory and Method in Passive Location with Quadratic Equality Constraints[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2018: 3–9.

[2] 朱国辉, 冯大政, 聂卫科. 传感器位置误差情况下基于多维标度分析的时差定位算法[J]. 电子学报, 2016, 44(1): 21–26. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.01.004.
ZHU Guohui, FENG Dazheng, and NIE Weike. Multidimensional scaling based TDOA localization algorithm with sensor location errors[J]. *Acta Electronica*

Sinica, 2016, 44(1): 21–26. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.01.004.

[3] WANG Yue and HO K C. An asymptotically efficient estimator in closed-form for 3-D AOA localization using a sensor network[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2015, 14(12): 6524–6535. doi: 10.1109/twc.2015.2456057.

[4] 赵勇胜, 赵拥军, 赵闯. 基于双基地距离的多站多外辐射源无源定位算法[J]. 电子学报, 2018, 46(12): 2840–2847. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.12.004.
ZHAO Yongsheng, ZHAO Yongjun, and ZHAO Chuang. Multi-transmitter multi-receiver passive location using bistatic range measurements[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(12): 2840–2847. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.12.004.

[5] 周龙健, 罗景青, 孔辉. 基于虚拟时差的运动阵列空间无源定位算法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(7): 1759–1763. doi: 10.11999/JEIT160860.
ZHOU Longjian, LUO Jingqing, and KONG Hui. A passive location algorithm based on the virtual TDOAs of moving array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(7): 1759–1763. doi: 10.11999/JEIT160860.

[6] TAHAT A, KADDOUM G, YOUSEFI S, *et al.* A look at the recent wireless positioning techniques with a focus on algorithms for moving receivers[J]. *IEEE Access*, 2017, 4: 6652–6680. doi: 10.1109/ACCESS.2016.2606486.

[7] INDELMAN V, GURFIL P, RIVLIN E, *et al.* Real-time vision-aided localization and navigation based on three - view geometry[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, 48(3): 2239–2259. doi: 10.1109/TAES.2012.6237590.

[8] DEMPSTER A G and CETIN E. Interference localization for satellite navigation systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2016, 104(6): 1318–1326. doi: 10.1109/jproc.2016.2530814.

[9] FOY W H. Position-location solutions by taylor-series estimation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1976, AES-12(2): 187–194. doi: 10.1109/TAES.1976.308294.

[10] HO K C and XU Wenwei. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(9): 2453–2463. doi: 10.1109/tsp.2004.831921.

[11] KAY S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing Volume I: Estimation Theory[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1993: 23–45.

[12] HO K C, LU Xiaoning, and KOVAVISARUCH L. Source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors: Analysis and solution[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(2): 684–696. doi: 10.1109/tsp.2006.885744.

[13] SUM Ming and HO K C. An asymptotically efficient estimator for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources in the presence of sensor location uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(7): 3434–3440. doi: 10.1109/TSP.2011.2131135.

[14] WEI Hewen, PENG Rong, WAN Qun, *et al.* Multidimensional scaling analysis for passive moving target localization with TDOA and FDOA measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(3): 1677–1688. doi: 10.1109/TSP.2009.2037666.

[15] 刘洋, 杨乐, 郭福成, 等. 基于定位误差修正的运动目标TDOA/FDOA无源定位方法[J]. 航空学报, 2015, 36(5): 1617–1626. doi: 10.7527/S1000-6893.2015.0010.
LIU Yang, YANG Le, GUO Fucheng, *et al.* Moving targets TDOA/FDOA passive localization algorithm based on localization error refinement[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, 36(5): 1617–1626. doi: 10.7527/S1000-6893.2015.0010.

[16] NOROOZI A, OVEIS A H, HOSSEINI S M R, *et al.* Improved algebraic solution for source localization from TDOA and FDOA measurements[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2018, 7(3): 352–355. doi: 10.1109/LWC.2017.2777995.

[17] 周恭谦, 杨露菁, 刘忠. 改进的非完全约束加权最小二乘TDOA/FDOA无源定位方法[J]. 系统工程与电子技术, 2018, 40(8): 1686–1692. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2018.08.03.
ZHOU Gongqian, YANG Luqing, and LIU Zhong. Improved incomplete constrained weighted least squares TDOA/FDOA passive location method[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2018, 40(8): 1686–1692. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2018.08.03.

[18] WANG Gang, LI Youming, and ANSARI N. A semidefinite relaxation method for source localization using TDOA and FDOA measurements[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2013, 62(2): 853–862. doi: 10.1109/TVT.2012.2225074.

[19] ZOU Yanbin, LIU Huaping, XIE Wei, *et al.* Semidefinite programming methods for alleviating sensor position error in TDOA localization[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 23111–23120. doi: 10.1109/ACCESS.2017.2752206.

[20] ZOU Yanbin, LIU Huaping, and WAN Qun. An iterative method for moving target localization using TDOA and FDOA Measurements[J]. *IEEE Access*, 2017, 6: 2746–2754. doi: 10.1109/ACCESS.2017.2785182.

[21] BOYD S and VANDENBERGHE L. Convex Optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 152–160.

[22] GRANT M, BOYD S, and YE Y. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming[EB/OL]. http://cvxr.com/cvx/, 2018.

孙 霆：男，1994年生，博士生，研究方向为无源定位.

董春曦：男，1970年生，教授，博士生导师，研究方向为雷达/通信辐射源无源定位技术、高分辨雷达干扰技术、雷达/雷达对抗系统仿真等.

毛 昱：男，1994年生，博士生，研究方向为辐射源识别.

责任编辑：陈 倩