第41卷 第7期 电 子 与 信 息 学 报 Vol. 41No. 7
2019年7月 Journal of Electronics & Information Technology Jul. 2019

基于分布式压缩感知的宽带欠定信号DOA估计

蒋 莹[①] 王冰切[①] 韩 俊[①] 何 翼*[②]

[①](空军预警学院 武汉 430000)

[②](海军研究院 北京 100161)

摘 要：为解决基于稀疏阵列的宽带欠定信号到达角(DOA)估计问题，该文提出基于分布式压缩感知(DCS)的宽带DOA估计算法。首先，对稀疏阵列宽带信号处理模型进行理论推导与分析，将宽带信号DOA估计建模成DCS问题；其次，利用经典DCS算法实现稀疏阵列上的宽带欠定信号DOA估计；最后，引入网格失配误差，建立包含网格失配参数的DCS模型，并进行迭代求解，实现对DOA和网格失配参数的联合估计。仿真结果表明，该算法能够实现宽带欠定信号DOA估计，较现有成果而言，在保证测向精度的同时，具备分辨率高、运算速度快的优点。

关键词：到达角估计；分布式压缩感知；稀疏阵列；联合稀疏；网格失配

中图分类号：TN971 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2019)07-1690-08

DOI: 10.11999/JEIT180723

Underdetermined Wideband DOA Estimation Based on Distributed Compressive Sensing

JIANG Ying[①] WANG Bingqie[①] HAN Jun[①] HE Yi[②]

[①](*Air Force Early Warning Academy*, *Wuhan* 430000, *China*)

[②](*Naval Research Academy*, *Beijing* 100161, *China*)

Abstract: In order to realize underdetermined wideband Direction Of Arrival(DOA) estimation based on sparse array, an algorithm on account of Distributed Compressive Sensing(DCS) is proposed. Firstly, wideband signal processing model based on sparse array is deduced and the underdetermined wideband DOA estimation is formulated as a DCS problem. Then, the DCS-Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit(DCS-SOMP) algorithm is utilized to solve this problem. Finally, the off-grid problem is considered and a joint DCS model containing off-grid parameters is established. Estimations of DOAs and off-grid parameters are achieved through iterative solution. Simulation results show that the proposed algorithm is effective and have advantages in resolution and computational complexity.

Key words: Direction Of Arrival(DOA) estimation; Distributed Compressive Sensing(DCS); Sparse array; Joint sparsity; Off-grid problem

1 引言

到达角(Direction Of Arrival, DOA)估计作为阵列信号处理的重要组成，在众多领域均得到了广泛应用，如雷达、声呐、射电天文学等[1–5]。随着信号环境的日益复杂，目标个数大于阵列阵元个数的欠定DOA估计需求日益紧迫，一度成为研究的热点。稀疏阵列结构的出现，如嵌套阵列[6]、互质阵列[7,8]，为解决欠定DOA估计提供了新的思路，基于稀疏阵列接收数据的2阶统计特性，构造差值虚拟阵列，可实现测向自由度的扩展。当前，基于稀疏阵列的欠定信号DOA估计大多围绕窄带信号展开，而宽带信号凭借其抗干扰能力强等优势，应用范围更加广泛，因此，基于稀疏阵列进行宽带欠定信号DOA估计具有十分重要的意义。

针对此问题，现有成果可分为两类，一是子空间类算法，其中最具代表性的是宽带空间平滑MUSIC (Spatial Smoothing MUSIC, SS-MUSIC)算法[9,10]，该算法基于嵌套阵列，通过虚拟阵列扩展

收稿日期：2018-07-18；改回日期：2019-01-11；网络出版：2019-01-22
*通信作者： 何翼 jty614@163.com
基金项目：国家自然科学基金(61771484)，湖北省自然科学基金(2016CFB288)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(61771484), The Natural Science Foundation of Hubei Province (2016CFB288)

实现了欠定条件下的宽带DOA估计，但SS-MUSIC对各个频点进行单独处理，没有利用频点之间的关联信息，且空间平滑处理会造成测向自由度的损失；二是稀疏重构类算法，该类算法利用信号在空域的稀疏性，将DOA估计问题建模成稀疏重构问题加以解决。文献[11]利用各个频点的联合稀疏性，通过凸优化方法实现了互质阵列上的宽带DOA估计；文献[12]在文献[11]的基础上通过重构子阵互相关矩阵和去除噪声估计项两种方式降低了算法的复杂度；文献[13]基于稀疏阵列提出了宽带稀疏频谱拟合(Wideband Sparse Spectrum Fitting, W-SpSF)算法，较文献[11]而言阵列模型不变，同样利用凸优化方法求解稀疏重构问题，引入降噪及白化处理消除噪声的影响，并研究了规范化先验参数的选择，但依然存在性能受参数影响较大的问题。文献[14]将非负稀疏贝叶斯学习(Nonnegative SBL, N-SBL)算法[15]用于稀疏阵列的宽带DOA估计问题，该算法将宽带DOA估计问题转换为基于多量测矢量的联合稀疏重构问题，较W-SpSF算法具有更高的DOA估计精度，但较窄带N-SBL算法而言，宽带中未考虑网格失配因素的影响。文献[16]提出了一种基于网格失配迭代最小化稀疏学习(Off-Grid Sparse Learning via Iterative Minimization, OGSLIM)的宽带DOA估计算法，在降噪及白化处理之后，将SLIM算法应用至宽带欠定信号DOA估计问题中，并考虑了网格失配的影响，有效提升了测向精度。综上可见，现有研究主要聚焦于模型的求解，针对稀疏阵列宽带信号模型的深入研究尚无成果可考。

基于此，本文从稀疏阵列出发，对宽带阵列信号处理模型进行推导分析，并提出基于分布式压缩感知的宽带欠定DOA估计算法。具体而言，本文经过对宽带信号模型的理论推导和对比分析，将稀疏阵列基础上的宽带DOA估计问题建模成分布式压缩感知(Distributed Compressed Sensing, DCS)模型；以基于分布式压缩感知的同步正交匹配跟踪(DCS Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit, DCS-SOMP)算法为例，探索了分布式压缩感知算法对宽带欠定信号的DOA估计能力；并针对网格失配问题，提出基于分布式压缩感知的联合同步正交匹配跟踪(DCS Joint Simultaneous Orthogonal Matching Persuit, DCS-JSOMP)算法，引入网格失配参数更新DCS模型，对DOA和网格失配参数进行联合估计，提高了DOA估计精度。仿真结果表明，基于分布式压缩感知的宽带DOA估计算法可实现宽带欠定信号DOA估计，本文算法在运算复杂度、测向精度、测向分辨率等方面均具有较好的性能。

2 稀疏阵列宽带信号模型

以CACIS型互质阵列为例，阵列由$L=M+N-1$个阵元组成，其中M和N互质，且$M=p\tilde{M}$, p为压缩因子，在2～M之间取值，显然$\tilde{M}$和N也是互质的，阵列结构如图1所示。

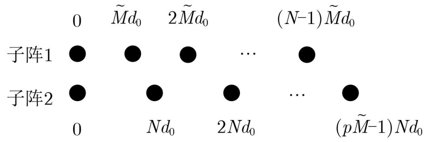


图 1 CACIS型互质阵列结构

由图1可知，子阵1包含N个阵元，阵元间距为$\tilde{M}d_0$；子阵2包含$p\tilde{M}$个阵元，阵元间距为Nd_0, d_0为单位阵元间距。两个子阵共用第1个阵元，阵元位置由$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_L\}$标识，且满足

$$\begin{aligned} d_l \in &\left\{\tilde{M}nd_0 \middle| 0\le n\le N-1\right\} \\ &\cup\left\{Nmd_0\middle| 0\le m\le p\tilde{M}-1\right\}, \\ &l=1,2,\cdots,L \end{aligned} \tag{1}$$

设K个宽带远场信号入射到该阵列上，到达角为$\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_K\}$，信号的中心频率和带宽均相同，分别为$f_c$和$B$，第$l$个阵元在时刻$t$接收到的信号为

$$\begin{aligned} y_l(t) &= \sum_{k=1}^{K} x_k(t-\tau_{lk})+n_l(t) \\ &\approx \sum_{k=1}^{K} x_k(t)\exp(-\mathrm{j}2\pi f_t\tau_{l,k})+n_l(t), \\ &\quad 0\le t\le T \end{aligned} \tag{2}$$

其中，$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$, $x_k(t)$为第k个信号的时域波形，$f_t\in[f_c-B/2,f_c+B/2]$为信号在时刻t的瞬时频率，$\tau_{l,k}=d_l\sin\theta_k/c$为第$k$个信号到达第$l$个阵元的时延，$n_l(t)$为第$l$个阵元接收的加性噪声。

从式(2)中可以看出，时延$\tau_{l,k}$将导致不同阵元接收信号之间存在相位差别，而与窄带不同的是，宽带阵列信号处理模型中这一相位差别不仅与阵元位置d_l和信号入射方向θ_k有关，还取决于信号的瞬时频率f_t。宽带信号频段较宽，频率随着时间变化，不同时刻信号频率不同，因此，窄带模型不能适用于宽带信号DOA估计，为此，通常对宽带信号进行离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)，将带宽B划分成多个子带，等效为多个窄带信号进行处理。

将观察时间T分成Q个子段，对每个子段的阵列接收数据进行H点离散傅里叶变换，等效为接收到H个窄带信号的Q次频域快拍数据，频域宽带模型为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Y}_q(f_h)=\boldsymbol{A}_h(\Theta)\,\boldsymbol{X}_q(f_h)+\boldsymbol{N}_q(f_h),\\&\qquad q=1,2,\cdots,Q;h=1,2,\cdots,H\end{aligned}\tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{Y}_q(f_h),\boldsymbol{X}_q(f_h),\boldsymbol{N}_q(f_h)$分别对应阵列接收数据、信号及噪声的DFT变换，$f_h$为第$h$个子带的等效频率值；$\left[\boldsymbol{a}_h(\theta_1)\ \ \boldsymbol{a}_h(\theta_2)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_h(\theta_K)\right]$为频点$f_h$处的阵列流形矩阵，其中$\boldsymbol{a}_h(\theta_k)$为对应第$k$个信号的导向矢量

$$\boldsymbol{a}_h(\theta_k)=\begin{bmatrix}\exp(-\mathrm{j}\omega_h\tau_{k1})\\\exp(-\mathrm{j}\omega_h\tau_{k2})\\\vdots\\\exp(-\mathrm{j}\omega_h\tau_{kL})\end{bmatrix}\tag{4}$$

其中，第l个元素为$\exp(-\mathrm{j}\omega_h\tau_{l,k})=\exp(-\mathrm{j}2\pi f_h d_l\sin\theta_k/\mathrm{c})=\exp(-\mathrm{j}2\pi f_h N_l d_0\sin\theta_k/\mathrm{c})$。设阵列设计频率为$f_0$，且单位阵元间距为半波长，即$d_0=\lambda_0/2=\mathrm{c}/2f_0$，则有

$$\exp(-\mathrm{j}\omega_h\tau_{l,k})=\exp\left(-\mathrm{j}\pi N_l\frac{f_h}{f_0}\sin\theta_k\right)\tag{5}$$

设噪声和信号相互独立，且噪声为高斯白噪声，那么频点f_h处阵列接收数据的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_Y(f_h)&=\mathrm{E}\left[\boldsymbol{Y}_q(f_h)\,\boldsymbol{Y}_q^{\mathrm{H}}(f_h)\right]\\&=\boldsymbol{A}_h(\Theta)\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{p}_h)\,\boldsymbol{A}_h^{\mathrm{H}}(\Theta)+\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\sigma}_h^2\right)\end{aligned}\tag{6}$$

其中，$\mathrm{E}[\cdot]$表示数学期望，$\mathrm{diag}(\cdot)$表示斜对角矩阵，$\boldsymbol{p}_h=[p_{h,1}\ p_{h,2}\ \cdots\ p_{h,K}]^{\mathrm{T}}$表示$K$个信号在频点$f_h$处的功率；$\boldsymbol{\sigma}_h^2=\left[\sigma_{h,1}^2\ \sigma_{h,1}^2\ \cdots\ \sigma_{h,L}^2\right]$表示频点$f_h$处$L$个阵元接收的噪声功率。实际计算时，由于频域快拍数有限，通常用有限次快拍的均值来近似数学期望，即

$$\hat{\boldsymbol{R}}_Y(f_h)\approx\frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q}\boldsymbol{Y}_q(f_h)\,\boldsymbol{Y}_q^{\mathrm{H}}(f_h)\tag{7}$$

为实现欠定估计，分别对每一个频点的协方差矩阵进行矢量化，可得

$$\boldsymbol{z}_h=\mathrm{vec}\left[\boldsymbol{R}_Y(f_h)\right]=\boldsymbol{\Phi}_h(\Theta)\,\boldsymbol{p}_h+\boldsymbol{1}_h\tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}_h(\Theta)=\left[\boldsymbol{a}_h^*(\theta_1)\otimes\boldsymbol{a}_h(\theta_1)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_h^*(\theta_K)\otimes\boldsymbol{a}_h(\theta_K)\right]$，$\otimes$表示Kronecker积；$\boldsymbol{1}_h=\left[\sigma_{h,1}^2\boldsymbol{e}_1\ \sigma_{h,1}^2\boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \sigma_{h,L}^2\boldsymbol{e}_L\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_l$表示第$l$个元素为1、其余元素为0的$L\times1$维行矢量。矢量化处理即虚拟阵列扩展的过程，$\boldsymbol{z}_h$可以等效为差值虚拟阵列接收的单次快拍数据，差值虚拟阵列的阵元位置为$d_{\mathrm{diff}}=d_i-d_j$，$0\le i,j\le L$，$\boldsymbol{\Phi}_h(\Theta)$为等效阵列流形。

将探测区间划分成G个网格$\psi=\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_G\}$，在$H$个频点处分别构造过完备字典集$\boldsymbol{\Phi}_h(\psi)=\left[\boldsymbol{a}_h^*(\psi_1)\otimes\boldsymbol{a}_h(\psi_1)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_h^*(\psi_G)\otimes\boldsymbol{a}_h(\psi_G)\right]$，便可以对矢量化以后的式(8)进行稀疏表示

$$\boldsymbol{z}_h=\boldsymbol{\Phi}_h(\psi)\,\boldsymbol{s}_h+\boldsymbol{1}_h\tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{s}_h=\left[s_{h,1}\ s_{h,2}\ \cdots\ s_{h,G}\right]^{\mathrm{T}}$表示$G$个网格对应方向的来波信号功率，且满足

$$s_{h,g}=\begin{cases}p_{h,k}, & \theta_k=\psi_g\\0, & \text{其他}\end{cases},1\le g\le G\tag{10}$$

因此，$s_{h,g}$是K稀疏的，又因为信号中心频率和带宽均相同，在这一假设条件下，不同频点处的$\boldsymbol{s}_h$均是K稀疏的，且非零元素的位置均相同，仅非零值不同。

在式(9)的基础上，利用稀疏重构的方法进行求解，可以实现DOA估计。观察式(9)可以发现，与多量测矢量(Multiple Measurement Vectors, MMV)问题相比，式(9)中H个等效观测矢量的过完备字典集互不相同，这就形成了一个多感知矩阵(Multiple Sensing Matrices, MSM)问题，常规的MMV算法无法直接适用，必须探索新的方法加以解决。

3 分布式压缩感知

分布式压缩感知理论由文献[17]于2005年提出，主要目标是解决多信号的压缩感知问题。传统的压缩感知针对的是单一信号，即对于一个K稀疏的信号$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^N$，基于一个传感器，即通过一个量测矩阵$\boldsymbol{\Phi}$，获取了$M$个线性观测值，那么这一采样过程可以描述为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}\tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^M,\boldsymbol{\Phi}$是一个$M\times N$的矩阵，且满足$K<M\ll N$。这样一个欠采样问题，在量测矩阵$\boldsymbol{\Phi}$满足特定条件的情况下可以通过稀疏重构算法，实现对原始稀疏信号的恢复。

利用多个传感器对多个信号进行压缩感知时，通常有两种做法，一种是令传感器独立工作，分别对多个信号进行量测与恢复；另一种则是传感器联合工作，同时对多个信号进行联合量测，即采用同一个量测矩阵对信号进行处理，也就形成了常规意义中的MMV问题。联合量测利用了信号之间的相关性，能够提高稀疏重构的精度，但是其对量测矩阵的要求较高，在很多应用场景下难以满足。

为此，分布式压缩感知理论应运而生，针对多个传感器对多个信号进行压缩感知的场景，令每个传感器独立对信号进行量测，然后基于量测结果，综合利用信号内部以及信号之间的关联结构实现稀疏信号的恢复。但是，分布式压缩感知理论能够准确实现信号恢复的前提是原始信号之间具有联合稀疏性。具体而言，设有J个稀疏信号$\boldsymbol{x}_j \in \mathbb{C}^N$，$1 \le j \le J$，分别利用$J$个量测矩阵对信号进行采样，得到观测数据

$$\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{\Phi}_j \boldsymbol{x}_j, 1 \le j \le J \tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}_j$是一个$M_j \times N$的矩阵，$\boldsymbol{y}_j \in \mathbb{C}^{M_j}$。

联合稀疏模型假设信号$\boldsymbol{x}_j$由两个部分组成，其一是所有信号共有的成分$\boldsymbol{z}_c$，其二是每个信号特有的成分$\boldsymbol{z}_j$，即

$$\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{z}_c + \boldsymbol{z}_j \tag{13}$$

在此基础之上，基于$\boldsymbol{z}_c$和$\boldsymbol{z}_j$的稀疏性，可以定义3种联合稀疏模型：

(1) JSM-1：共有成分$\boldsymbol{z}_c$和特有成分$\boldsymbol{z}_j$均是稀疏的；

(2) JSM-2：共有成分$\boldsymbol{z}_c$为0，而特有成分$\boldsymbol{z}_j$是稀疏的，且所有$\boldsymbol{z}_j$的稀疏度相同，均为K，非零元素的位置也相同，仅取值不同；

(3) JSM-3：共有成分$\boldsymbol{z}_c$非稀疏，而特有成分$\boldsymbol{z}_j$是稀疏的。

4　基于分布式压缩感知的宽带DOA估计

比较式(9)、式(12)和JSM-2可以发现，单一频点f_h下的多快拍数据$\boldsymbol{Y}_q(f_h), 1 \le q \le Q$经过协方差运算并矢量化以后，转换成了虚拟阵列上的单快拍数据$\boldsymbol{z}_h$，将这一单快拍数据看作K稀疏信号$\boldsymbol{s}_h$在量测矩阵$\boldsymbol{\Phi}_h(\boldsymbol{\Psi})$下的观测值，那么$H$个频点的矢量化数据就可以看作是，利用不同的量测矩阵对H个K稀疏信号进行采样得到的观测结果。由此看来，稀疏阵列基础上的宽带DOA估计模型与JSM-2型联合稀疏模型是完全契合的。因此，式(9)描述的是一个基本的分布式压缩感知问题。基于这一结论，众多DCS算法均可以用于求解该问题，以实现宽带欠定信号的DOA估计。而DCS算法中最为典型的是DCS-SOMP算法，本文以该算法为例，探究DCS算法在宽带欠定信号DOA估计中的应用，并围绕稀疏重构类DOA估计算法中普遍存在的网格失配问题对算法进行改进。

4.1　DCS-SOMP算法

SOMP[18]是求解MMV问题的一种经典迭代算法。每次迭代过程中，通过搜索字典集中与残差相关性最大的列来获取支撑基，而残差与字典集的正交性使得迭代次数显著减少，因而算法具有运算复杂度低的优点。DCS-SOMP算法[17]将SOMP算法拓展至MSM模型，其中最为关键的步骤在于支撑基的选择。

针对式(9)，考虑到$\boldsymbol{\Phi}_h(\psi)$在不同频点条件下是变化的，因此支撑基选择时在不同频点下分别计算$\boldsymbol{\Phi}_h(\psi)$中每一列与残差的相关系数，然后将同一列标下不同频点的相关系数求和，总和最大的列标即为本次迭代选择出的支撑基坐标，具体算法如表1所示。表中，$\boldsymbol{\varphi}_{h,g}$表示$\boldsymbol{\Phi}_h(\psi)$的第$g$列，$\hat{\boldsymbol{s}}_h, \boldsymbol{s}_h$是最小二乘问题$\boldsymbol{s}_h = \arg\min\limits_{\boldsymbol{s}_h} \|\boldsymbol{z}_h - \boldsymbol{\Phi}_\Omega \boldsymbol{s}_h\|_2^2$的解。

表 1　DCS-SOMP算法

输入： 虚拟阵列接收数据$\boldsymbol{z}_h$，过完备字典集$\boldsymbol{\Phi}_h(\psi)$，信号个数$K$。

输出： 重构信号$\boldsymbol{s}_h$，支撑基列标集合Ω。

初始化： 迭代计数$i=1, \Omega_0 = \varnothing, \hat{\boldsymbol{s}}_h = \boldsymbol{0}$，残差初值$\boldsymbol{r}_{h,0} = \boldsymbol{z}_h$。

步骤 1　支撑基选择：

$$g_i = \arg\max_{g \in \{1,2,\cdots,G\}} \sum_{h=1}^{H} \frac{|\langle \boldsymbol{r}_{h,i-1}, \boldsymbol{\phi}_{h,g} \rangle|}{\|\boldsymbol{\phi}_{h,g}\|_2}, \Omega_i = \Omega_{i-1} \cup \{g_i\};$$

步骤 2　残差更新：$\hat{\boldsymbol{s}}_h = \boldsymbol{\Phi}_{\Omega_i}{}^{\dagger} \boldsymbol{z}_h, \boldsymbol{r}_{h,i} = \boldsymbol{z}_h - \boldsymbol{\Phi}_{\Omega_i} \hat{\boldsymbol{s}}_h$；

步骤 3　条件判断：若$i < K$，则$i = i+1$跳至步骤1，否则跳至步骤4；

步骤 4　结果结算：$\Omega = \Omega_i, \boldsymbol{s}_h = \boldsymbol{\Phi}_\Omega{}^{\dagger} \boldsymbol{z}_h$。

4.2　网格失配条件下的改进算法

稀疏重构算法中，当网格划分存在偏差，即$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_K\}$不包含在$\psi = \{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_G\}$中时，称作存在网格失配误差。假设包含信号到达角的正确网格划分为$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_G\}$，那么精确的稀疏表示模型为

$$\boldsymbol{z}_h = \boldsymbol{\Phi}_h(\Lambda)\, \boldsymbol{s}_h + \boldsymbol{1}_h \tag{14}$$

网格失配补偿的常规思路[19]是用1阶泰勒展开对$\boldsymbol{\Phi}_h(\Lambda)$进行估计，即

$$\boldsymbol{\Phi}_h(\Lambda) \approx \boldsymbol{\Phi}_h(\psi) + \boldsymbol{\Gamma}_h(\psi)\, \boldsymbol{\Delta} \tag{15}$$

其中，

$$\boldsymbol{\Gamma}_h(\psi) = \left[\begin{matrix} \dfrac{a_h{}^*(\psi_1) \otimes a_h(\psi_1)}{\partial \psi_1} & \dfrac{a_h{}^*(\psi_2) \otimes a_h(\psi_2)}{\partial \psi_2} & \cdots & \dfrac{a_h{}^*(\psi_G) \otimes a_h(\psi_G)}{\partial \psi_G} \end{matrix}\right] \tag{16}$$

$\boldsymbol{\Delta} = \mathrm{diag}(\delta), \delta = \Lambda - \psi$。此时稀疏表示式(14)就可以近似为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_h &\approx [\boldsymbol{\Phi}_h(\boldsymbol{\Psi}) + \boldsymbol{\Gamma}_h(\boldsymbol{\Psi})\, \boldsymbol{\Delta}]\, \boldsymbol{s}_h + \boldsymbol{1}_h \\ &= \boldsymbol{\Phi}_h(\boldsymbol{\Psi})\, \boldsymbol{s}_h + \boldsymbol{\Gamma}_h(\boldsymbol{\Psi})\, \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{s}_h + \boldsymbol{1}_h \end{aligned} \tag{17}$$

令$\boldsymbol{\beta}_h = \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{s}_h$，显然$\boldsymbol{\beta}_h$和$\boldsymbol{s}_h$具有一样的稀疏性，那么稀疏表示模型为

$$\boldsymbol{z}_h = \boldsymbol{\Phi}_h(\boldsymbol{\Psi})\, \boldsymbol{s}_h + \boldsymbol{\Gamma}_h(\boldsymbol{\Psi})\, \boldsymbol{\beta}_h + \boldsymbol{1}_h \tag{18}$$

考虑网格失配后，基于分布式压缩感知模型式

(18)，本文提出一种新的算法DCS-JSOMP，对信号到达角及网格失配参数进行联合估计，具体算法流程如表2所示。表中，$\boldsymbol{\phi}_{h,g}, \boldsymbol{\gamma}_{h,g}$分别表示$\boldsymbol{\Phi}_h(\boldsymbol{\Psi})$和$\boldsymbol{\Gamma}_h(\boldsymbol{\Psi})$的第$g$列；$\hat{\boldsymbol{s}}_h, \boldsymbol{s}_h, \hat{\boldsymbol{\beta}}_h, \boldsymbol{\beta}_h$是最小二乘问题$[\boldsymbol{s}_h\ \boldsymbol{\beta}_h] = \operatorname{argmin}\left\|\boldsymbol{z}_h - \boldsymbol{\Phi}_\Omega \boldsymbol{s}_h - \boldsymbol{\Gamma}_\Omega \hat{\boldsymbol{\beta}}_h\right\|_2^2$的解。

DCS-JSOMP属稀疏重构中的贪婪算法，较子空间类算法而言，不需要进行空间平滑，避免了测向自由度的损失；较稀疏重构类凸优化算法和贝叶斯算法而言，由于其迭代次数为信号个数，且残差与字典集存在正交性，使得其在运算复杂度较低的条件下依旧可以获得较为理想的重构结果。但是该算法也存在一个缺点，即需要信号个数K作为先验信息。针对这一问题，在信号个数未知的条件下，可以将算法中步骤3的条件判断修改成“若$\|\boldsymbol{r}_{h,i}\|_2 > \varepsilon\|\boldsymbol{z}_h\|_2$对于所有频点都满足，则继续迭代，否则结束迭代进行结果计算”，其中ε为控制变量。

表 2 DCS-JSOMP算法

输入：虚拟阵列接收数据$\boldsymbol{z}_h$，过完备字典集$\boldsymbol{\Phi}_h(\boldsymbol{\Psi})$，网格失配字典$\boldsymbol{\Gamma}_h(\boldsymbol{\Psi})$，信号个数$K$。

输出：重构信号$\boldsymbol{s}_h$，支撑基列标集合Ω，网格失配误差$\boldsymbol{\Delta}$。

初始化：迭代计数$i=1, \Omega_0=\varnothing$，$\hat{\boldsymbol{s}}_h=\boldsymbol{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_h=\boldsymbol{0}$，残差$\boldsymbol{r}_{h,0}=\boldsymbol{z}_h$。

步骤 1 支撑基选择：$c_g=\sum_{h=1}^{H}\dfrac{|\langle \boldsymbol{r}_{h,i-1}, \boldsymbol{\phi}_{h,g}\rangle|}{\|\boldsymbol{\phi}_{h,g}\|_2}, d_g=\sum_{h=1}^{H}\dfrac{|\langle \boldsymbol{r}_{h,i-1}, \boldsymbol{\gamma}_{h,g}\rangle|}{\|\boldsymbol{\gamma}_{h,g}\|_2}, g_i=\underset{g\in\{1,2,\cdots,G\}}{\arg\max}\sqrt{{c_g}^2+{d_g}^2}, \Omega_i=\Omega_{i-1}\cup\{g_i\}$；

步骤 2 残差更新：$\hat{\boldsymbol{s}}_h=\boldsymbol{\Phi}_{\Omega_i}{}^{\dagger}\left(\boldsymbol{z}_h-\boldsymbol{\Gamma}_{\Omega_i}\hat{\boldsymbol{\beta}}_h\right), \hat{\boldsymbol{\beta}}_h=\boldsymbol{\Gamma}_{\Omega_i}{}^{\dagger}\left(\boldsymbol{z}_h-\boldsymbol{\Phi}_{\Omega_i}\hat{\boldsymbol{s}}_h\right), \boldsymbol{r}_{h,i}=\boldsymbol{z}_h-\boldsymbol{\Phi}_{\Omega_i}\hat{\boldsymbol{s}}_h-\boldsymbol{\Gamma}_{\Omega_i}\hat{\boldsymbol{\beta}}_h$；

步骤 3 条件判断：若$i<K$，则$i=i+1$跳至步骤1，否则跳至步骤4；

步骤 4 结果结算：$\Omega=\Omega_i, \boldsymbol{s}_h=\boldsymbol{\Phi}_\Omega{}^{\dagger}\left(\boldsymbol{z}_h-\boldsymbol{\Gamma}_\Omega\hat{\boldsymbol{\beta}}_h\right), \boldsymbol{\beta}_h=\boldsymbol{\Gamma}_\Omega{}^{\dagger}\left(\boldsymbol{z}_h-\boldsymbol{\Phi}_\Omega\boldsymbol{s}_h\right), \boldsymbol{\Delta}=\dfrac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\dfrac{\boldsymbol{\beta}_h}{\boldsymbol{s}_h}$。

5 仿真分析

为验证基于DCS的宽带欠定信号DOA估计算法的有效性，本节设计3组仿真实验，分别对算法在欠定条件下的宽带测向能力、受信噪比及频域快拍数变化影响程度、到达角临近条件下的测向能力进行检验，并与现有算法进行比较。实验1比较了DCS-SOMP, DCS-JSOMP及SS-MUSIC[9,10]算法在欠定条件下的测向能力；实验2比较了DCS-SOMP, DCS-JSOMP, SS-MUSIC[9,10]，WNNSBL[14]及OGSLIM[16]算法的测向性能随信噪比和频域快拍数的变化情况，其中WNNSBL和OGSLIM的迭代终止条件为$\varepsilon=1\times10^{-3}$，最大迭代次数为100；实验3比较了实验2中5种算法在到达角临近时的测向能力。考虑到算法运算复杂度过高且受正则化先验参数影响较大等因素，本节未将W-SpSF算法列为比较算法。

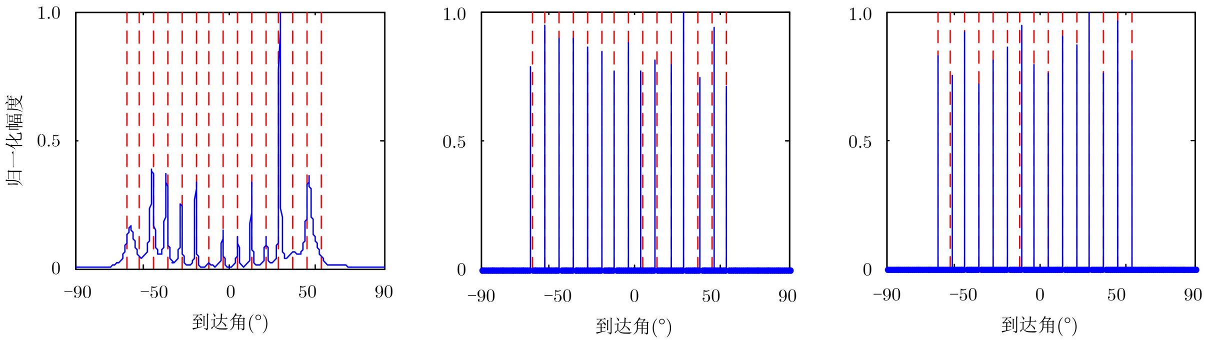
5.1 欠定信号测向能力

设CACIS型互质阵列参数为$P=2, \tilde{M}=3, N=5$，有15个高斯宽带信号入射到该阵列上，来波方向均匀分布在$-60.1°$～$53.3°$之间，信号中心频率$f_c=2$ GHz，带宽$B=30$ MHz，传播速度$c=3\times10^8$ m/s，阵列设计频率与信号中心频率相等；中频处理时中心频率$f_m=35$ MHz，采样频率$f_s=150$ MHz，信噪比SNR $=0$ dB；将阵列输出信号划分成$Q=100$段，每段进行$H=32$点DFT，即转换到频域有$H=32$个频点，每个频点有$Q=100$次频域快拍；对探测区间$-90°\sim90°$进行网格划分，网格间距为$1°$。基于频域数据，利用DCS-SOMP, DCS-JSOMP和SS-MUSIC算法进行DOA估计，得到的空间谱如图2所示。

图2中红色虚线表示目标信号的真实到达角，由图可知，欠定条件下，SS-MUSIC的空间谱只有13个谱峰，未能实现准确的欠定DOA估计；而DCS-SOMP和DCS-JSOMP的重构谱中均存在15个峰值，谱峰位置接近真实到达角，表明基于分布式压缩感知的DOA估计算法具备宽带欠定信号估计能力；此外，较DCS-SOMP而言，DCS-JSOMP算法加入了对网格失配参数的估计，谱峰位置更为趋近真实值，验证了改进算法的有效性。

5.2 条件变化对测向精度的影响

本节分析信噪比及频域快拍数变化对测向精度的影响，设有8个高斯宽带信号入射到阵列上，来波方向均匀分布在$-60.1°$～$53.3°$之间，其他参数设置同实验1。信噪比变化时，设频域快拍数为$Q=100$, SNR在-15～15 dB之间变化，步长为1 dB；频域快拍数变化时，设SNR $=0$ dB，频域快拍数Q在20～200之间变化，步长为20。基于频域数据，利用DCS-SOMP, DCS-JSOMP, SS-MUSIC[9,10]，WNNSBL[14]及OGSLIM[16]算法进行DOA估计，每组参数条件下进行200次蒙特卡洛实



(a) SS-MUSIC　(b) DCS-SOMP　(c) DCS-JSOMP

图 2 SS-MUSIC, DCS-SOMP和DCS-JSOMP算法的空间谱

验，计算均方根误差并记录算法执行时间，得到结果如图3、图4及表3所示。

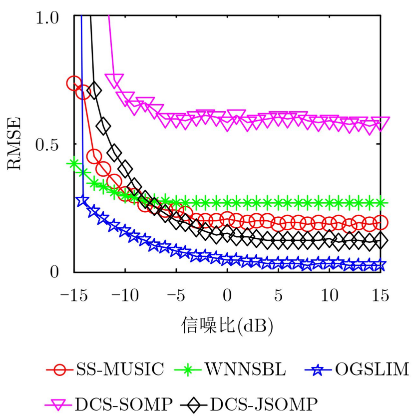


图 3 信噪比变化对测向精度的影响

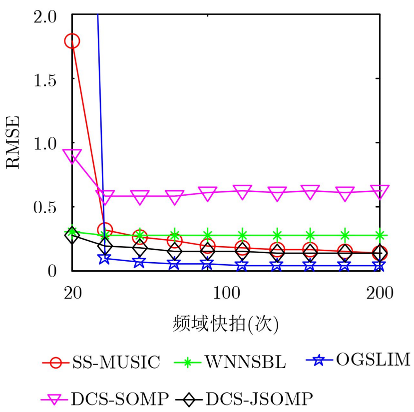


图 4 频域快拍次数变化对测向精度的影响

表 3　5种算法单次蒙特卡洛实验用时(s)

算法	信噪比变化	频域快拍次数变化
DCS-SOMP	0.1747	0.1943
DCS-JSOMP	0.3439	0.3784
SS-MUSIC	0.5021	0.5207
WNNSBL	3.3751	3.0231
OGSLIM	0.6068	0.6678

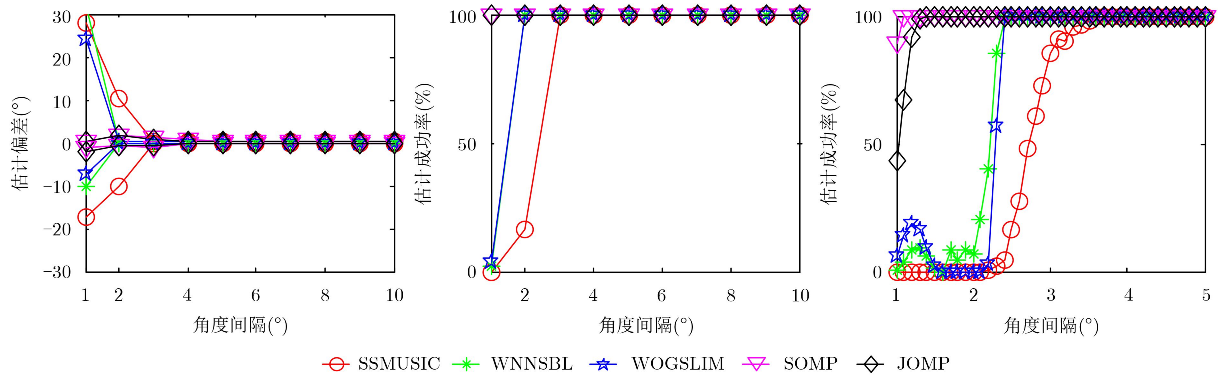
由图3、图4可知，同SS-MUSIC, DCS-JSOMP和OGSLIM算法相比，DCS-SOMP和WNNSBL算法存在网格失配问题，且未进行网格失配补偿，因此RMSE较高，表明网格失配误差的存在对测向精度影响显著；较DCS-SOMP算法而言，在不同信噪比、不同频域快拍数条件下，DCS-JSOMP算法的测向精度均得到了显著改善，仅次于OGSLIM算法，再次表明算法改进是有效的；而在频域快拍数为20次时，OGSLIM算法的RMSE结果明显高于其他4种算法，而DCS-JSOMP算法得到的RMSE结果依然保持在较低的水平，表明小样本条件下DCS-JSOMP算法较OGSLIM算法有优势。

由表3可知，DCS-SOMP和DCS-JSOMP算法在运算速度上优于其他3种算法，尤其是较WNNSBL算法而言，优势明显；较DCS-SOMP而言，DCS-JSOMP算法额外增加了对网格失配参数的估计，运算复杂度有所提高，但是其运算时间仍然低于其他3种算法，验证了DCS-JSOMP算法具有运算速度快的优势。

5.3　到达角临近信号估计能力

设有到达角临近的两个宽带信号，信号1的到达角为12.8°，信号2的到达角为12.8°+$\Delta\theta$，其他参数设置同实验1。(1)令$\Delta\theta$在1°～10°之间变化，步长为1°；(2)令$\Delta\theta$在1°～5°之间变化，步长为0.1°。每个参数条件下进行200次蒙特卡洛实验，计算估计偏差及偏差绝对值之和，并在偏差和不大于4°时认为DOA估计成功，统计估计成功率，得到结果如图5所示。图5(a)中，大于0的曲线为信号1的角度估计偏差，小于0的曲线为信号2的角度估计偏差。

从图5中可知，DCS-SOMP及DCS-JSOMP算法具有较好的测向分辨率。DCS-SOMP算法在角度间隔为1.1°时估计成功率逼近100%, DCS-JSOMP算法在角度间隔为1.4°时估计成功率接近100%，而其他3种算法在角度间隔为2°时，估计成功率仍近



(a)估计偏差随角度间隔变化 (b)估计成功率随角度间隔变化1°~10° (c)估计成功率随角度间隔变化1°~4°

图 5 到达角临近信号估计能力

似为0; OGSLIM算法和WNNSBL算法在角度间隔大于2.4°以后估计成功率接近100%; SS-MUSIC算法则在角度间隔大于3.5°以后估计成功率才接近100%。可见，基于DCS的宽带DOA估计算法对于到达角临近信号具有较强的分辨能力，较比较算法而言具有明显优势。

6 结束语

宽带欠定信号到达角估计问题亟待解决，而稀疏阵列的出现恰好提供了新的思路，因此，本文基于稀疏阵列开展了宽带欠定信号DOA估计方法研究，将宽带DOA估计建模成分布式压缩感知问题，利用经典分布式压缩感知算法DCS-SOMP加以求解，并针对网格失配问题提出DCS-JSOMP算法。经实验验证，本文算法具备宽带欠定信号估计能力，且运算速度快，受条件变化影响小，对到达角临近信号具有较强的分辨能力。本文的研究从稀疏阵列宽带信号处理模型出发，探究了利用分布式压缩感知理论解决宽带欠定信号DOA估计问题的可能性，研究结果证明该思路是有效的，但测向精度仍然存在可提升空间，后续可基于此继续展开深入的研究。

参 考 文 献

[1] SELVA J. Efficient wideband DOA estimation through function evaluation techniques[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(12): 3112–3123. doi: 10.1109/TSP.2018.2824256.

[2] DAS A and SEJNOWSKI T J. Narrowband and wideband off-grid direction-of-arrival estimation via sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2018, 43(1): 108–118. doi: 10.1109/JOE.2017.2660278.

[3] ZHANG Ailian and XU Wen. A new sparse subspace method for wideband DOA estimation[C]. OCEANS, Aberdeen, UK, 2017: 1–7. doi: 10.1109/ocease.2017.8085018.

[4] LIU Jianyan, LU Yilong, ZHANG Yanmei, *et al*. DOA estimation with enhanced DOFs by exploiting cyclostationarity[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(6): 1486–1496. doi: 10.1109/TSP.2016.2645542.

[5] SHEN Qing, CUI Wei, LIU Wei, *et al*. Underdetermined wideband DOA estimation of off-grid sources employing the difference co-array concept[J]. *Signal Processing*, 2017, 130: 299–304. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.07.022.

[6] PAL P and VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167–4181. doi: 10.1109/TSP.2010.2049264.

[7] VAIDYANATHAN P P and PAL P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586. doi: 10.1109/TSP.2010.2089682.

[8] VAIDYANATHAN P P and PAL P. Sparse sensing with coprime arrays[C]. Proceedings of the 2010 Conference Record of the 44th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, USA, 2010: 1405–1409. doi: 10.1109/acssc.2010.5757766.

[9] HAN Keyong and NEHORAI A. Wideband direction of arrival estimation using nested arrays[C]. Proceedings of the 20135th IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, St. Martin, France, 2013: 188–191. doi: 10.1109/camsap.2013.6714039.

[10] HAN Keyong and NEHORAI A. Wideband Gaussian source processing using a linear nested array[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2013, 20(11): 1110–1113. doi: 10.1109/LSP.2013.2281514.

[11] SHEN Qing, LIU Wei, CUI Wei, *et al*. Group sparsity based wideband DOA estimation for co-prime arrays[C]. Proceedings of 2014 IEEE China Summit & International Conference on Signal and Information Processing, Xi'an, China, 2014: 252–256. doi: 10.1109/chinasip.2014.6889242.

[12] SHEN Qing, LIU Wei, CUI Wei, *et al*. Low-complexity

direction-of-arrival estimation based on wideband co-prime arrays[J]. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2015, 23(9): 1445–1456. doi: 10.1109/TASLP.2015.2436214.

[13] HE Zhenqing, SHI Zhiping, HUANG Lei, *et al*. Underdetermined DOA estimation for wideband signals using robust sparse covariance fitting[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(4): 435–439. doi: 10.1109/LSP.2014.2358084.

[14] HU Nan, SUN Bing, ZHANG Yi, *et al*. Underdetermined DOA estimation method for wideband signals using joint nonnegative sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(5): 535–539. doi: 10.1109/LSP.2017.2673850.

[15] HU Nan, SUN Bing, WANG Jiajun, *et al*. Source localization for sparse array using nonnegative sparse Bayesian learning[J]. *Signal Processing*, 2016, 127: 37–43. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.02.025.

[16] 冯明月, 何明浩, 徐璟, 等. 低信噪比条件下宽带欠定信号高精度DOA估计[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(6): 1340–1347. doi: 10.11999/JEIT160921.

FENG Mingyue, HE Minghao, XU Jing, *et al*. High accuracy DOA estimation under low SNR condition for wideband underdetermined signals[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(6): 1340–1347. doi: 10.11999/JEIT160921.

[17] DUARTE M F, SARVOTHAM S, BARON D, *et al*. Distributed compressed sensing of jointly sparse signals[C]. Proceedings of the Conference Record of the 39th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, USA, 2005: 1537–1541. doi: 10.1109/acssc.2005.1600024.

[18] TROPP J A, GILBERT A C, and STRAUSS M J. Simultaneous sparse approximation via greedy pursuit[C]. Proceedings of 2005 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Philadelphia, USA, 2005: 721–724. doi: 10.1109/icassp.2005.1416405.

[19] TAN Zhao and NEHORAI A. Sparse direction of arrival estimation using co-prime arrays with off-grid targets[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(1): 26–29. doi: 10.1109/LSP.2013.2289740.

蒋　莹：女，1991年生，博士生，研究方向为电子对抗信息处理.

王冰切：男，1972年生，副教授，硕士生导师，研究方向为雷达系统与雷达对抗.

韩　俊：男，1983年生，讲师，研究方向为雷达对抗.

何　翼：男，1989年生，助理研究员，研究方向为视频图像处理及模式识别与人工智能.