第41卷 第5期 电子与信息学报 Vol. 41No. 5
2019年5月 Journal of Electronics & Information Technology May 2019

基于差族构造高斯整数周期互补序列

刘 涛 许成谦* 李玉博

(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

(河北省信息传输与信号处理重点实验室 秦皇岛 066004)

摘 要：该文给出了基于差族的高斯整数互补序列构造方法。利用差族与互补序列之间的联系，首先推导出高斯整数互补序列存在的充分条件，进而直接构造了阶数为2的高斯整数互补序列。为进一步增加高斯整数互补序列数目，又利用映射方法构造了阶数为4的高斯整数互补序列。同传统的2元互补序列相比，高斯整数互补序列的存在数目很多，因此该文方法可以为通信系统提供大量的互补序列。

关键词：高斯整数序列；差族；周期互补；互补序列对

中图分类号：TN911.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2019)05-1167-06

DOI: 10.11999/JEIT180646

Constructions of Gaussian Integer Periodic Complementary Sequences Based on Difference Families

LIU Tao XU Chengqian LI Yubo

(*School of Information Science & Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

(*Hebei Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: Constructions of Gaussian integer periodic complementary sequences are presented in this paper. Based on the relationship between periodic complementary sequences and difference families, the sufficient condition of the existence of Gaussian integer periodic complementary sequences is proposed at first, then Gaussian integer periodic complementary sequences with degree 2 are constructed directly. To extend the number of Gaussian integer complementary sequences, Gaussian integer complementary sequences with degree 4 are constructed based on mappings. Compared with binary complementary sequences, there are more Gaussian integer complementary sequences, as a result, the presented methods will propose an abundance of complementary sequences for communication systems.

Key words: Gaussian integer sequence; Difference family; Periodic complementary; Complementary pair

1 引言

高斯整数序列是一类特殊的离散信号，其元素取值于高斯整数集合。高斯整数序列中每个元素具有$a+b\mathrm{i}$的形式，其中a和b都是整数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$为虚数单位。与传统的多相序列不同，高斯整数序列元素的幅值不一定相等，属于非恒定幅度序列。通信系统中常用的4相序列、QAM序列都属于高斯整数序列。与传统的多相序列相比，高斯整数序列设计成果较少。高斯整数序列在高数据率通信系统中具有潜在的应用价值，如码分多址系统(CDMA)中可以采用高斯整数序列作为多用户地址码[1,2]，OFDM系统中利用完备高斯整数序列来降低信号峰均功率比(PMPR)[3,4]。因此高斯整数集合上的序列设计成为无线通信领域的研究热点问题之一。高斯整数序列的阶数(degree)定义为一个序列周期内不同的非零元素个数，如元素取值于集合$\{0,\ 1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, -1+\mathrm{i},\ -1-\mathrm{i}\}$的序列是一个4阶高斯整数序列。在基于高斯整数序列的无线通信系统如PGIS-CDMA中，系统的载波-干扰比(carrier-to-interference ratio)与高斯整数序列的阶数有关[2]。由文献[2]的仿真结果可知，基于具有高阶数完备高斯整数序列的PGIS-CDMA系统相比基于m序列或Gold序列的传统DS-CDMA性能更加优良。因此，完备高斯整数序列构造方法的研究得到广泛关注，并取得一系列的成果。2012年，文献[5]利用8个定义在集合$\{0,\ \pm1,\ \pm\mathrm{i}\}$的基序列线性组合，构造了偶数长度的具有理想自相关性能的完备高斯整数序列。Yang等人[6]利用传统分圆法构造了长度为素数的完备高

收稿日期：2018-07-02；改回日期：2018-12-17；网络出版：2019-01-07

*通信作者： 许成谦 cqxu@ysu.edu.cn

基金项目：国家自然科学基金项目(61501395, 61671402)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501395, 61671402)

斯整数序列。文献[7]则利用广义分圆法构造了一类具有长度为pq形式的完备高斯整数序列。Pei和Chang等人[8,9]则分别构造了任意长度的完备高斯整数序列。最近，组合设计领域的差集被应用到高斯整数序列设计中，得到了一些阶数为2和4的完备高斯整数序列[10–12]。还有另外一些方法，如文献[13]利用整数集上的多电平完备序列构造了完备高斯整数序列。最近，文献[14]利用有限域上的伪随机序列构造了几乎完备自相关高斯整数序列，文献[15,16]利用分圆法构造了完备高斯整数序列。文献[17,18]构造了参数达到理论界限的零相关区高斯整数序列集。以上所述的高斯整数序列都属于单码序列。互补序列是一类不同于单码序列的序列形式，每条互补序列由多个子序列组成，其相关函数由相应子序列的相关函数求和来表征。目前已有的互补序列都是传统的2元、多相互补序列[19,20]，关于高斯整数集上的互补序列设计的成果很少。做为一种重要的序列形式，将互补序列设计推广到高斯整数集上是一个很有意义的研究方向。

早在1990年，文献[19]建立了差族与2元周期互补序列之间的联系。为进一步扩展周期互补序列存在数目，Li等人[21]对文献[19]进行了推广，构造了2值(two-valued)周期互补序列。本文致力于高斯整数集上的周期互补序列设计问题。基于文献[19]思想，建立起差族与高斯整数周期互补序列的联系，推导出高斯整数周期互补序列存在的充分条件，进而基于差族构造了阶数为2的高斯整数周期互补序列。为扩展高斯序列的数目，进一步利用映射的方法构造了阶数为4的高斯整数周期互补序列。

2 基本概念

定 义 1 设 $\boldsymbol{u}_i=(u_i(0),u_i(1),\cdots,u_i(N-1))$，$\boldsymbol{u}_j=(u_j(0),u_j(1),\cdots,u_j(N-1))$是两个长度为$N$复数序列，序列$\boldsymbol{u}_i$和$\boldsymbol{u}_j$的周期互相关函数定义为

$$R_{\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}u_i(t)\cdot u_j^*(t+\tau) \tag{1}$$

其中，$0\le\tau<L$，加法$t+\tau$模L运算，$(\cdot)^*$表示取复共轭。当$i=j$时，称为序列$\boldsymbol{u}_i$的自相关函数，可以用$R_{\boldsymbol{u}_i}(\tau)$表示。

定义2[19] 设$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\cdots,\boldsymbol{S}_{M-1})$包含$M$个子序列，每个子序列长度为$N$，$\boldsymbol{S}_m=(s_m(0),s_m(1),\cdots,s_m(N-1))$。如果序列的周期互补自相关函数(Auto Correlation Function, ACF)满足

$$R_{\boldsymbol{S}}(\tau)=\sum_{m=0}^{M-1}R_{\boldsymbol{S}_m}(\tau)=\begin{cases}MN, & \tau=0\\ 0, & 1\le\tau\le N-1\end{cases} \tag{2}$$

则称$\boldsymbol{S}$为周期互补序列，表示为PCS_M^N。式(2)用$R_{\boldsymbol{S}}(\tau)$表示互补序列的自相关函数。特别地，当$M=2$时，称$\boldsymbol{S}$为周期互补序列对。

定义3 设$\boldsymbol{A}=(a(0),a(1),\cdots,a(N-1))$表示一个长度为$N$的序列，其中$a(t)\in\{x+y\mathrm{i}\}$，$x$与$y$都为整数，则称序列$\boldsymbol{A}$为高斯整数序列。若每个周期中不同的非零元素个数为$p$，则称$\boldsymbol{A}$为阶数为$p$的高斯整数序列。

定义4 令Z_v表示一个模v的整数环，$Z_v=\{0,1,\cdots,v-1\}$。设X_m表示Z_v的一个子集，其含有k_m个元素，$|X_m|=k_m$，$\overline{X_m}=Z_v/X_m$。定义一个集合$\chi=\{X_0,X_1,\cdots,X_{M-1}\}$，如果对于任意非零整数$\tau\in Z_v$满足

$$\sum_{m=0}^{M-1}|(\tau+X_m)\cap X_m|=\lambda \tag{3}$$

则称χ为一个差族(Difference Family, DF)[22]，表示为$(v;k_0,k_1,\cdots,k_{M-1};\lambda)-\mathrm{DF}$。若有$k_0=k_1=\cdots=k_{M-1}=k$成立，则简化表示为$M$-$(v;k;\lambda)$–DF。特别地，当$M=1$时，$\chi$退化为差集。

根据差族定义可知，对于一个$(v;k_0,k_1,\cdots,k_{M-1};\lambda)$–DF，

$$\lambda(v-1)=\sum_{m=0}^{M-1}k_m(k_m-1) \tag{4}$$

引理1 设Z_{2N}表示模$2N$的整数集合，$Z_{2N}=\{0,1,\cdots,2N-1\}$。定义一个映射$\phi$: $u=(u \bmod 2, u \bmod N)$，$u\in Z_{2N}$。根据中国剩余定理，基于映射ϕ可以将集合Z_{2N}表示为$Z_{2N}=Z_2\otimes Z_N$，其中$\otimes$表示直积，$Z_2=\{0,1\}$，$Z_N=\{0,1,\cdots,N-1\}$。

3 2阶高斯整数周期互补序列的构造

构造法1

步骤1 设$\chi=\{X_0,X_1,\cdots,X_{M-1}\}$是一个差族$M$-$(N;k;\lambda)$-DF。

步骤2 构造序列$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\cdots,\boldsymbol{S}_{M-1})$，每个子序列$\boldsymbol{S}_m=(s_m(0),s_m(1),\cdots,s_m(N-1))$按式(5)构造；

$$s_m(t)=\begin{cases}\alpha, & t\in X_m\\ \beta, & t\in\overline{X_m}\end{cases} \tag{5}$$

其中，$0\le m\le M-1$，$0\le t\le N-1$。α和β是2个高斯整数。

定理1 设$\alpha=\alpha_0+\alpha_1\mathrm{i}$, $\beta=\beta_0+\beta_1\mathrm{i}$为两个高斯整数，如果满足式(6)

$$\lambda\left({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2\right)+(MN-2Mk+\lambda)\cdot\left({\beta_0}^2+{\beta_1}^2\right) +2\left(Mk-\lambda\right)\cdot\left(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1\right)=0 \tag{6}$$

则按照式(5)构造的序列$\boldsymbol{S}$是一个高斯整数周期互补序列，表示为PCS_M^N。

证明　计算序列$\boldsymbol{S}$的周期自相关函数如下

$$\begin{aligned}R_{\boldsymbol{S}}(\tau)&=\sum_{m=0}^{M-1}R_{\boldsymbol{S}_m}(\tau)\\&=\sum_{m=0}^{M-1}s_m(t)\cdot s_m^*\left(t+\tau\right)\\&=\sum_{m=0}^{M-1}\left[r_0\cdot(\alpha\alpha^*)+r_1\cdot(\alpha\beta^*)+r_1\cdot(\beta\alpha^*)\right.\\&\quad\left.+r_2\cdot(\beta\beta^*)\right]\\&=\sum_{m=0}^{M-1}\left[r_0\cdot\left({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2\right)+r_2\cdot\left({\beta_0}^2+{\beta_1}^2\right)\right.\\&\quad\left.+2r_1\cdot(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1)\right]\\&=\left({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2\right)\cdot\sum_{m=0}^{M-1}r_0+\left({\beta_0}^2+{\beta_1}^2\right)\\&\quad\cdot\sum_{m=0}^{M-1}r_2+2\left(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1\right)\cdot\sum_{m=0}^{M-1}r_1\end{aligned}\tag{7}$$

其中，$r_0=|(N-\tau+X_m)\cap X_m|$; $r_1=k-|(N-\tau+X_m)\cap X_m|$; $r_2=N-2k+|(N-\tau+X_m)\cap X_m|$。

当$\tau=0$时，可知有$r_0=k$，$r_1=0$，$r_2=N-k$成立，代入式子(7)中可得$R_S(0)=M\cdot\left[k\cdot\left({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2\right)+(N-k)\cdot\left({\beta_0}^2+{\beta_1}^2\right)\right]$。

当$\tau\neq0$时，根据定义4，可得$\sum_{m=0}^{M-1}r_0=\lambda$，$\sum_{m=0}^{M-1}r_1=Mk-\lambda$，$\sum_{m=0}^{M-1}r_2=MN-2Mk+\lambda$。代入式(7)中可得

$$\begin{aligned}R_S(\tau)=&\lambda\left({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2\right)+(MN-2Mk+\lambda)\\&\cdot\left({\beta_0}^2+{\beta_1}^2\right)+2\left(Mk-\lambda\right)\\&\cdot\left(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1\right)\end{aligned}\tag{8}$$

当定理1中式(6)满足时，可得$R_S(\tau)=0$，$\tau\neq0$。根据定义2，序列$\boldsymbol{S}$是一个周期互补序列，由于其元素取值为高斯整数，所以是高斯整数周期互补序列，表示为PCS_M^N。　证毕

由构造法1可知，互补序列$\boldsymbol{S}$的每个子序列中只包含2个非零元素，即α和β，所以该高斯整数周期互补序列阶数为2。文献[22]构造了一类参数形式为2-$(v;\left(v-1\right)/2;\left(v-3\right)/2)$–DF的差族，基于该类差族，利用本文方法可以构造出大量的高斯整数周期互补序列对。

例1　根据文献[22]，存在一个差族2-$(9;4;3)$-DF，如χ=$\{X_0,X_1\}$, X_0=$\{2,4,5,7\}$, X_1=$\{0,1,2,5\}$。将参数$M=2$，$k=4$，$N=9$，$\lambda=3$代入式(6)，则化简为$3\left({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2\right)+5\left({\beta_0}^2+{\beta_1}^2\right)+10\left(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1\right)=0$。

取两个高斯整数$\alpha=1+2\mathrm{i}$, $\beta=-2-\mathrm{i}$，可以验证满足上面式子。按照式(5)构造序列如下

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}(-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},1+2\mathrm{i},-2-\mathrm{i},1+2\mathrm{i},\\ \quad1+2\mathrm{i},-2-\mathrm{i},1+2\mathrm{i},-2-\mathrm{i});\\(1+2\mathrm{i},1+2\mathrm{i},1+2\mathrm{i},-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},\\ \quad1+2\mathrm{i},-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i})\end{pmatrix}\tag{9}$$

序列$\boldsymbol{S}$是一个2阶高斯整数周期互补序列，参数为PCS_2^9，自相关函数为$R_S(\tau)=(90,0,0,0,0,0,0,0,0)$。

通过计算机搜索存在大量满足条件的高斯整数对(α,β)。表1列出当$|\alpha|^2\le5$, $|\beta|^2\le5$时满足条件的高斯整数：

基于差族$\chi=\{X_0,X_1\}$，利用表1列出的高斯整数，可以构造出15条不同的高斯整数周期互补序列。

表 1　满足式(6)的高斯整数

α_0	α_1	β_0	β_1
–2	–1	1	0
–2	–1	1	2
–2	1	1	–2
–2	1	1	0
–1	–2	0	1
–1	–2	2	1
–1	2	0	–1
–1	2	2	–1
1	–2	–2	1
1	–2	0	1
1	2	–2	–1
1	2	0	–1
2	–1	–1	0
2	–1	–1	2
2	1	–1	–2

4　4阶高斯整数周期互补序列的构造

构造法2

步骤1　设$\chi=\{X_0,X_1,\cdots,X_{M-1}\}$是一个差族$M$-$(N;k;\lambda)$-DF, N为奇数;

步骤2　设$G=\{x+y\mathrm{i}\}$表示高斯整数集合，x和y都为整数。定义一个由$Z_N\times Z_N$到G映射$f\left(a,b\right)=a+b\mathrm{i}$。构造序列$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\cdots,\boldsymbol{S}_{M-1})$，

每个子序列$\boldsymbol{S}_m=(s_m(0),s_m(1),\cdots,s_m(2N-1))$按式(10)—式(12)构造

$$s_m(t)=f\left(a_m(t),b_m(t)\right) \tag{10}$$

$$a_m(t)=\begin{cases}\alpha, & t\in\{0,1\}\otimes X_m\\ \beta, & t\in\{0,1\}\otimes\overline{X}_m\end{cases} \tag{11}$$

$$b_m(t)=\begin{cases}\alpha, & t\in\{0\}\otimes X_m\\ \beta, & t\in\{0\}\otimes\overline{X}_m\\ -\alpha, & t\in\{1\}\otimes X_m\\ -\beta, & t\in\{1\}\otimes\overline{X}_m\end{cases} \tag{12}$$

其中，$0\le m\le M-1$, $0\le t\le 2N-1$。α和β是2个高斯整数。

定理2 设$\alpha=\alpha_0+\alpha_1\mathrm{i}$, $\beta=\beta_0+\beta_1\mathrm{i}$为2个高斯整数，如果满足式(12)

$$\begin{aligned}&\lambda\left({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2\right)+(MN-2Mk+\lambda)\cdot\left({\beta_0}^2+{\beta_1}^2\right)\\&+2\left(Mk-\lambda\right)\cdot(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1)=0\end{aligned} \tag{13}$$

则按照式(10)构造的序列$\boldsymbol{S}$是一个高斯整数周期互补序列，表示为PCS_M^{2N}。

证明

$$\begin{aligned}R_{\boldsymbol{S}}(\tau)&=\sum_{m=0}^{M-1}R_{\boldsymbol{s}_m}(\tau)\\&=\sum_{m=0}^{M-1}s_m(t)\cdot s_m^*\left(t+\tau\right)\\&=\sum_{m=0}^{M-1}\{R_{a_m}(\tau)+R_{b_m}(\tau)\\&\quad-\mathrm{i}\cdot[R_{a_m,b_m}(\tau)-R_{a_m,b_m}(N-\tau)]\}\\&=\sum_{m=0}^{M-1}R_{a_m}(\tau)+\sum_{m=0}^{M-1}R_{b_m}(\tau)\\&\quad-\mathrm{i}\cdot\sum_{m=0}^{M-1}[R_{a_m,b_m}(\tau)-R_{a_m,b_m}(N-\tau)]\end{aligned} \tag{14}$$

根据式(11)、式(12)，与定理1证明类似可得

$$\sum_{m=0}^{M-1}R_{a_m}(\tau)=\begin{cases}2A, & \tau=0\\ 2A, & \tau=N\\ 2B, & \text{其它}\end{cases} \tag{15}$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}R_{b_m}(\tau)=\begin{cases}2A, & \tau=0\\ -2A, & \tau=N\\ 2B, & \tau=0(\bmod 2),\tau\ne0\\ -2B, & \tau=1(\bmod 2),\tau\ne N\end{cases} \tag{16}$$

其中，

$A=M\cdot\left[k\cdot\left({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2\right)+(N-k)\cdot\left({\beta_0}^2+{\beta_1}^2\right)\right]$,

$$\begin{aligned}B=&\lambda\left({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2\right)+(MN-2Mk+\lambda)\left({\beta_0}^2+{\beta_1}^2\right)\\&+2\left(Mk-\lambda\right)\cdot(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1)\text{。}\end{aligned}$$

令$\tau=(\tau_0,\tau_1)$, $t=(t_0,t_1)$, $\tau_0,t_0\in\{0,1\}$, $\tau_1,t_1\in Z_N$。由式(11)和式(12)可知有$a_m(0,t_1)=a_m(1,t_1)$，$a_m(0,t_1)=b_m(0,t_1)$，$-a_m(1,t_1)=b_m(1,t_1)$。计算$R_{a_m,b_m}(\tau)$，有如下结果：

情况1，当$\tau_0=0$时，

$$\begin{aligned}R_{a_m,b_m}(\tau)&=\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(0,t_1)\cdot b_m^*(0,t_1+\tau_1)\\&\quad+\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(1,t_1)\cdot b_m^*(1,t_1+\tau_1)\\&=\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(0,t_1)\cdot a_m^*(0,t_1+\tau_1)\\&\quad+\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(1,t_1)\cdot[-a_m^*(1,t_1+\tau_1)]\\&=\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(0,t_1)\cdot a_m^*(0,t_1+\tau_1)\\&\quad-\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(0,t_1)\cdot a_m^*(0,t_1+\tau_1)\\&=0\end{aligned} \tag{17}$$

情况2，当$\tau_0=1$时，

$$\begin{aligned}R_{a_m,b_m}(\tau)&=\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(0,t_1)\cdot b_m^*(1,t_1+\tau_1)\\&\quad+\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(1,t_1)\cdot b_m^*(0,t_1+\tau_1)\\&=\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(0,t_1)\cdot[-a_m^*(1,t_1+\tau_1)]\\&\quad+\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(1,t_1)\cdot a_m^*(0,t_1+\tau_1)\\&=-\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(0,t_1)\cdot a_m^*(0,t_1+\tau_1)\\&\quad+\sum_{t_1=0}^{N-1}a_m(0,t_1)\cdot a_m^*(0,t_1+\tau_1)\\&=0\end{aligned} \tag{18}$$

因此可得结论，当$0\le\tau\le2N-1$时，有

$$\sum_{m=0}^{M-1}R_{a_m,b_m}(\tau)=0 \tag{19}$$

将式(15)、式(16)、式(19)代入式(14)，可得

$$R_{\boldsymbol{S}}(\tau)=\begin{cases}4A, & \tau=0\\ 4B, & \tau=0(\bmod 2),\tau\neq 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{20}$$

根据式(12)可知，$B=0$，因此序列$\boldsymbol{S}$自相关函数满足$R_S(\tau)=0,\ 0<\tau\leq 2N-1$。根据定义2可知$\boldsymbol{S}$是一个高斯整数周期互补序列。定理成立。

例2　选取与例1相同的差族2-(9; 4; 3)-DF，如$\chi=\{X_0,X_1\}$，$X_0=\{2,4,5,7\}$，$X_1=\{0,1,2,5\}$。取两个满足式子(12)的高斯整数$\alpha=2-\mathrm{i}$，$\beta=-1+2\mathrm{i}$。根据式(9)构造序列如下

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}(-3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i},3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i},3+\mathrm{i},1-3\mathrm{i},-3+\mathrm{i},1-3\mathrm{i},-3+\mathrm{i},\\ 1+3\mathrm{i},-3+\mathrm{i},1-3\mathrm{i},-3+\mathrm{i},1-3\mathrm{i},3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i},3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i});\\ (3+\mathrm{i},1-3\mathrm{i},3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i},-3+\mathrm{i},1-3\mathrm{i},-3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i},-3+\mathrm{i},\\ 1-3\mathrm{i},3+\mathrm{i},1-3\mathrm{i},-3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i},3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i},-3+\mathrm{i},1+3\mathrm{i})\end{pmatrix}\tag{21}$$

其自相关函数为：$R_S(\tau)=(360,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$。

5　结束语

本文利用差族与高斯整数周期互补序列之间的联系，首先推导出高斯整数周期互补序列存在的充分条件，从而将高斯整数周期互补序列的构造问题转化为线性方程的求解问题。通过计算机搜索发现，存在大量的满足条件的高斯整数。本文方法属于直接构造法，基于现有的差族，利用本文方法可以得到阶数为2和4的高斯整数周期互补序列。值得注意的是，本文得到的结果是单条高斯整数周期互补序列的构造方法，研究高斯周期互补序列集合的构造方法是一个有意义的方向。另外，研究具有更高阶数的高斯整数周期互补序列集的构造方法也是需要进一步研究的内容。

参 考 文 献

[1] WANG Senhung and LI Chihpeng. Novel comb spectrum CDMA system using perfect Gaussian integer sequences[C]. 2015 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM), San Diego, CA, USA, 2015: 1–6.

[2] CHANG Ho Hsuan, LIN Shieh Chiang and LEE Chongdao. A CDMA scheme based on perfect Gaussian integer sequences[J]. *International Journal of Electronics and Communications*, 2017, 75(2017): 70–81. doi: 10.1016/j.aeue.2017.03.008.

[3] WANG Senhung, LI Chihpeng, and CHANG Hohsuan, *et al*. A systematic method for constructing sparse Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2016, 64(1): 365–376. doi: 10.1109/TCOMM.2015.2498185.

[4] LI Chihpeng, WANG Senhung, and WANG Chinliang. Novel low complexity SLM schemes for PAPR reduction in OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(5): 2916–2921. doi: 10.1109/TSP.2010.2043142.

[5] HU Weiwen, WANG Senhung, and LI Chihpeng. Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11): 6074–6079. doi: 10.1109/TSP.2012.2210550.

[6] YANG Yang, TANG Xiaohu, and ZHOU Zhengchun. Perfect Gaussian integer sequences of odd prime length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(10): 615–618. doi: 10.1109/LSP.2012.2209642.

[7] MA Xiu Wen, WEN Qiao Yan, ZHANG Jie, *et al*. New perfect Gaussian integer sequences of periodic pq[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2013, E96-A(11): 2290–2293. doi: 10.1587/transfun.E96.A.2290.

[8] PEI Soochang and CHANG Kuowei. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(8): 1040–1044. doi: 10.1109/LSP.2014.2381642.

[9] CHANG Hohsuan, LI Chihpeng, LEE Chongdao, *et al*. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary composite length[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(7): 4107–4115. doi: 10.1109/TIT.2015.2438828.

[10] CHEN Xinjiao, LI Chunlei, and RONG Chunming. Perfect Gaussian integer sequences from cyclic difference sets[C]. 2016 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), 2016: 115–119. doi: 10.1109/ISIT.2016.7541272.

[11] LEE Chongdao, HUANG Yupei, CHANG Yaostu, *et al*. Perfect Gaussian integer sequences of odd period 2^m-1[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(7): 881–885. doi: 10.1109/LSP.2014.2375313.

[12] Lee Chongdao, LI Chihpeng, and CHANG Hohsuan, *et al*. Further results on degree-2 perfect Gaussian integer sequences[J]. *IET Communications*, 2016, 10(12): 1542–1552. doi: 10.1049/iet-com.2015.1144.

[13] 陈晓玉, 许成谦, 李玉博. 新的完备高斯整数序列的构造方法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(9): 2081–2085. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01697.
CHEN Xiaoyu, XU Chengqian, and LI Yubo. New Constructions of perfect Gaussian integer sequences[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014,

36(9): 2081–2085. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01697.

[14] LI Yubo, TIAN Liying, and LIU Tao. Nearly perfect Gaussian integer sequences with arbitrary degree[J]. *IET Communications*, 2018, 12(9): 1123–1127. doi: 10.1049/iet-com.2017.1274.

[15] LI Chihpeng, CHANG Kuojen, CHANG Hohsuan, *et al*. Perfect sequences of odd prime length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2018, 25(7): 966–969. doi: 10.1109/LSP.2018.2832719.

[16] 柯品惠,胡电芬,常祖领.周期为p2的完备高斯整数序列的新构造[J]. 工程数学学报, 2018, 35(3): 319–328. doi: 10.3969/j.issn.1005-3085.2018.03.007.

KE Pinhui, HU Dianfen, and CHANG Zuling. New construction of perfect Gaussian integer sequence with period p2[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2018, 35(3): 319–328. doi: 10.3969/j.issn.1005-3085.2018.03.007.

[17] 刘凯, 姜昆. 交织法构造高斯整数零相关区序列集[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.

LIU Kai and JIANG Kun. Construction of Gaussian integer sequence sets with zero correlation zone based on interleaving technique[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.

[18] 刘凯, 陈盼盼. 最佳及几乎最佳高斯整数ZCZ序列集的构造[J]. 电子学报, 2018, 46(3): 755–760. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.03.034.

LIU Kai and CHEN Panpan. Constructions of optimal of almost optimal Gaussian integer ZCZ sequence sets[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(3): 755–760. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.03.034.

[19] BOMER Leopold and ANTWEILER Markus. Periodic complementary binary sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1990, 36(6): 1487–1494. doi: 10.1109/18.59954.

[20] TSENG Chin-Chong. Complementary sets of sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, 18(5): 644–652. doi: 10.1109/TIT.1972.1054860.

[21] LI Xudong, LIU Zilong, GUAN Yongliang, *et al*. Two valued periodic complementary sequences[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(9): 1270–1274. doi: 10.1109/LSP.2017.2722423.

[22] DING Cunsheng. Two Constructions of (v, (v-1)/2, (v-3)/2) difference families[J]. *Journal of Combinatorial Designs*, 2008, 16: 164–171. doi: 10.1002/jcd.20159.

刘 涛：女，1987年生，博士生，研究方向为序列设计.

许成谦：男，1961年生，教授，博士生导师，研究方向为编码理论，密码学，信号设计.

李玉博：男，1985年生，副教授，硕士生导师，研究方向为序列设计，编码理论.