第41卷 第2期 电 子 与 信 息 学 报 Vol. 41No. 2
2019年2月 Journal of Electronics & Information Technology Feb. 2019

适用于二维阵列的无格稀疏波达方向估计算法

王剑书* 樊养余 杜 瑞 吕国云
(西北工业大学电子信息学院 西安 710129)

摘 要：针对现有的适用于2维阵列的无格稀疏波达方向(DOA)估计方法性能不足的问题，该文提出一种新的方法。对2维阵列，从原子L0范数出发，证明其值等于一个以矩阵秩为目标函数的半定规划(SDP)问题的最优解。对该矩阵使用第1类有限阶贝塞尔函数近似表达，构造新的秩优化SDP问题。根据低秩矩阵恢复理论，对该SDP问题的目标函数使用log-det函数方法平滑替代，然后使用优化最小(MM)算法求解，最后通过(半)正定Toeplitz矩阵的范德蒙分解方法实现无格DOA估计。在MM算法求解模型时，使用样本协方差矩阵构造初始优化问题，减少算法迭代。仿真实验结果表明，相较于基于网格的MUSIC和其他无格DOA估计方法，该文方法具有更好的均方根误差(RMSE)性能与对相邻源的分辨能力；在快拍数充足且信噪比(SNR)较高时，适当的第1类贝塞尔函数阶数选择可以实现与较大阶数接近的RMSE性能，同时能减少运行时间。

关键词：波达方向估计；无格；2维阵列；半定规划；范德蒙分解

中图分类号：TN911.7 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2019)02-0447-08

DOI: 10.11999/JEIT180340

Gridless Sparse Method for Direction of Arrival Estimation for Two-dimensional Array

WANG Jianshu FAN Yangyu DU Rui LÜ Guoyun
(*School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710129, *China*)

Abstract: For the fact that current gridless Direction Of Arrival (DOA) estimation methods with two-dimensional array suffer from unsatisfactory performance, a novel girdless DOA estimation method is proposed in this paper. For two-dimensional array, the atomic L0-norm is proved to be the solution of a Semi-Definite Programming (SDP) problem, whose cost function is the rank of a Hermitian matrix, which is constructed by finite order of Bessel functions of the first kind. According to low rank matrix recovery theorems, the cost function of the SDP problem is replaced by the log-det function, and the SDP problem is solved by Majorization-Minimization (MM) method. At last, the gridless DOA estimation is achieved by Vandermonde decomposition method of semidefinite Toeplitz matrix built by the solutions of above SDP problem. Sample covariance matrix is used to form the initial optimization problem in MM method, which can reduce the iterations. Simulation results show that, compared with on-grid MUSIC and other gridless methods, the proposed method has better Root-Mean-Square Error (RMSE) performance and identifiability to adjacent sources; When snapshots are enough and Signal-Noise-Ratio (SNR) is high, proper choice of the order of Bessel functions of the first kind can achieve approximate RMSE performance as that of higher order ones, and can reduce the running time.

Key words: Direction Of Arrival (DOA) estimation; Gridless; Two-dimensional array; Semi-Definite Programming (SDP); Vandermonde decomposition

1 引言

波达方向(DOA)估计是阵列信号处理领域的一个重要研究方向，并广泛应用于大量实际场景，比如雷达、声呐、麦克风阵列和通信系统等[1–4]。通过传感器阵列接收单个或多个目标源的信号，形成阵列信号，而DOA估计则是通过对阵列信号进行处理求得目标源方向的技术方法。早期的DOA估计一般通过波束形成实现，其代表方法为Capon[5]，这类方法实现简单，应用广泛，但对多个源或者角度相邻的源的分辨能力欠佳。现代高精度DOA估

收稿日期：2018-04-12；改回日期：2018-09-04；网络出版：2018-09-12
*通信作者： 王剑书 wangjs123@mail.nwpu.edu.cn
基金项目：水声对抗重点实验室基金(kmb5494)
Foundation Item: The Foundation of Key Laboratory of Underwater Acoustic Countermeasure (kmb5494)

计方法主要包括子空间类方法与稀疏重构方法。子空间类方法主要包括多重信号分类(MUSIC)[6]和旋转不变参数估计技术(ESPRIT)[7]等，稀疏重构方法包括L1-SVD[8]和稀疏贝叶斯学习(SBL)[9,10]等。相比子空间类方法，稀疏重构方法往往具有以下优点：无需预知源数目，可以求解少量快拍甚至单快拍的DOA估计，相邻源分辨能力更加优秀等。近10年来，基于稀疏重构的DOA估计方法成为了阵列信号处理领域的研究重点。

在基于稀疏重构的DOA估计方法中，无格(gridless)稀疏DOA估计方法是最新的研究热点[11–19]。这类方法最大的特点是无需将空间角度离散为网格而直接求解DOA估计值，因此可以避免因为网格与真实DOA不匹配造成的估计误差。子空间类方法中的root-MUSIC[20]与ESPRIT均具有此特点。Bhaskar等人[11]以原子范数(atomic norm)为目标函数，证明其值等于一个半定规划(SDP)问题的最优解，而后对优化得到的(半)正定Toeplitz矩阵进行范德蒙分解，实现了无格频率估计，Qian等人[12]和Zhang等人[13]使用该方法实现了无格DOA估计。Chen等人[14]研究了以Hankel矩阵和核范数为基础的谱压缩感知问题，Yang等人[15]将该方法应用到无格DOA估计问题。文献[16–18]实现了无格稀疏迭代协方差估计(SPICE)方法并应用到DOA估计，该方法无需估计噪声功率，并且是一种固定加权原子范数的方法，比标准原子范数方法具有更小的分辨率限制。然而，以上无格DOA估计方法均要求阵列为均匀线阵(ULA)或稀疏线阵(SLA)，强烈限制了无格DOA估计方法的实际应用。最近，Mahata等人[19]通过对原子范数方法中SDP问题的矩阵变量进行贝塞尔函数近似表达，重新构造(半)正定Toeplitz矩阵求解DOA估计，突破了总差分最小化方法(TVMA)和无格SPICE方法在线性阵列上的限制，实现了2维阵列的无格DOA估计。然而由于TVMA方法实质为L1方法[8]的连续表达[19]，通常在高快拍数和高信噪比(SNR)时性能不如其他方法；无格SPICE方法的伪空间谱存在较多伪峰，增加了DOA估计值选择的难度。

本文提出一种适用于2维阵列的无格稀疏DOA估计方法。以2维阵列为基础，从原子L0范数[21]出发，推导出其值等于一个以矩阵秩为目标函数的SDP问题的最优解。对该矩阵使用贝塞尔函数近似表达，并构造了用于求解DOA估计值的(半)正定Toeplitz矩阵。根据低秩矩阵恢复理论[22,23]，对该秩优化SDP问题的目标函数使用log-det函数方法平滑替代，然后使用优化最小(MM)算法[24]进行求解，最后通过(半)正定Toeplitz矩阵的范德蒙分解方法实现无格DOA估计。在MM算法求解模型时，使用样本协方差矩阵构造初始优化问题，从而减少算法迭代次数。仿真实验结果表明，相较于基于网格的MUSIC或无格的TVMA-FAST[19]和SPICE-GL[19]，本文方法具有更好的均方根误差(RMSE)表现与对相邻源的分辨能力，验证了本文方法的有效性与良好性能。

2 数据模型

本文研究1维DOA估计。假设使用M元2维阵列，各阵元各向同性，第m个阵元的位置用极坐标表示为(r_m, φ_m)。该阵列接收$K(K<M)$个独立窄带源信号，阵列最小阵元间距设为窄带信号中心频率的半波长。第k个入射信号的到达角度记为θ_k，源信号记为$\boldsymbol{s}(t)=[\boldsymbol{s}_1(t)\ \boldsymbol{s}_2(t)\ \cdots\ \boldsymbol{s}_K(t)]^{\mathrm{T}}$，阵列接收信号记为$\boldsymbol{x}(t)=[\boldsymbol{x}_1(t)\ \boldsymbol{x}_2(t)\ \cdots\ \boldsymbol{x}_M(t)]^{\mathrm{T}}$，其中$(\cdot)^{\mathrm{T}}$表示矩阵的转置，则该窄带阵列信号模型可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{v}(t) \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}(\theta_1)\ \ \boldsymbol{a}(\theta_2)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}(\theta_K)]$为阵列流型矩阵，$\boldsymbol{a}(\theta_k)=\left[\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi r_1\cos(\varphi_1-\theta_k)/\lambda}\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi r_2\cos(\varphi_2-\theta_k)/\lambda}\ \ \cdots\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi r_M\cos(\varphi_M-\theta_k)/\lambda}\right]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{v}(t)=[v_1(t)\ v_2(t)\ \cdots\ v_M(t)]^{\mathrm{T}}$为各阵元的加性噪声，并假设为独立同分布的高斯白噪声，其功率为σ^2。本文研究多快拍情形，假设快拍数为L，则模型式(1)表示为式(2)的矩阵形式：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}(1)\ \boldsymbol{x}(2)\ \cdots\ \boldsymbol{x}(L)]$，$\boldsymbol{s}=[\boldsymbol{s}(1)\ \boldsymbol{s}(2)\ \cdots\ \boldsymbol{s}(L)]$和$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}(1)\ \boldsymbol{v}(2)\ \cdots\ \boldsymbol{v}(L)]$。

3 本文提出的无格DOA估计算法

从无噪声情形的阵列信号原子L0范数[21]出发，构造一个以矩阵秩为目标函数的SDP问题。将该问题扩展到有噪声情形，使用log-det函数方法平滑替代，并使用MM算法[24]求解该SDP问题。由求解的最优结果构造(半)正定Toeplitz矩阵，并对其范德蒙分解求解DOA估计值。

3.1 无噪声情形

本节讨论无噪声情形下的基本问题。模型式(2)变为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{s}_k\boldsymbol{a}(\theta_k) \tag{3}$$

定义集合$\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{a}(\theta):\theta\in[-\pi,\pi)\}$，则$\boldsymbol{x}$的原子分解[21]x可以变形为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{I}\boldsymbol{a}(\tilde{\theta}_i)\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{H}} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{c}_i \in \boldsymbol{C}^L$，$\boldsymbol{C}$表示复数集，$(\cdot)^{\mathrm{H}}$表示矩阵的共轭转置。定义$\boldsymbol{x}$的原子L0范数[21]为

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0} = \inf\left\{ I : \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{a}(\tilde{\theta}_i)\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{H}}, \tilde{\theta}_i \in [-\pi,\pi), \boldsymbol{c}_i \in \boldsymbol{C}^L \right\} \tag{5}$$

其中，$\inf\{\cdot\}$为集合的下确界。下列定理将$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0}$的求解转换为一个基本SDP问题。

定理 1　$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0}$等于SDP问题式(6)的最优解：

$$\min_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{Q}} \operatorname{rank}\{\boldsymbol{Q}\}, \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{6}$$

其中，$\operatorname{rank}\{\cdot\}$为矩阵的秩，$\boldsymbol{W} \in \boldsymbol{C}^{L\times L}$与$\boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{C}^{M\times M}$均为Hermitian矩阵。

证明　很明显$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$。假设式(6)的最优解为$r$，首先证明$r \leq \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0}$。假设$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{I_0} \boldsymbol{a}(\breve{\theta}_i)\,\breve{\boldsymbol{c}}_i^{\mathrm{H}}$为达到$\boldsymbol{x}$的原子L0范数的一个分解，其中任意$\breve{\boldsymbol{c}}_i$均可以分解为$\breve{\boldsymbol{c}}_i = \alpha_i \boldsymbol{b}_i$，$\alpha_i > 0$，$|\boldsymbol{b}_i| = 1$，$i = 1,2,\cdots,I_0$。若取$\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{I_0} \boldsymbol{b}_i \alpha_i \boldsymbol{b}_i^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{I_0} \boldsymbol{a}(\breve{\theta}_i)\alpha_i \cdot \boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\breve{\theta}_i)$，则有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{I_0} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ \boldsymbol{a}(\breve{\theta}_i) \end{bmatrix} \alpha_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ \boldsymbol{a}(\breve{\theta}_i) \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \tag{7}$$

从而，$r \leq \operatorname{rank}\{\boldsymbol{Q}\} \leq I_0 = \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0}$。

接下来证明$r \geq \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0}$。由分块(半)正定矩阵$\begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}$的性质[25]可知$\boldsymbol{Q} \geq 0$，假设$J$为$\boldsymbol{Q}$的秩，则存在列满秩矩阵$\bar{\boldsymbol{Q}} \in \boldsymbol{C}^{M\times J}$使得$\boldsymbol{Q} = \bar{\boldsymbol{Q}}\bar{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{H}}$，并且存在$\bar{x}$使得$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{Q}}\bar{x}$。这表明$\boldsymbol{x}$的每一列都可表示为$J$个线性无关向量的线性组合，从而$J \geq \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0}$。又$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{Q}\} = \operatorname{rank}\{\bar{\boldsymbol{Q}}\} = J$，从而$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{Q}\} \geq \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0}$，因此$r \geq \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0}$。

综上所述，$r = \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{H},0}$，得证。同时$\tilde{\boldsymbol{W}} = \sum_{i=1}^{I_0} \boldsymbol{b}_i\alpha_i\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{H}}$与$\tilde{\boldsymbol{Q}} = \sum_{i=1}^{I_0} \boldsymbol{a}(\breve{\theta}_i)\alpha_i\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\breve{\theta}_i)$为满足问题式(6)最优解的一组变量。　　证毕

令$\boldsymbol{G}\left(\breve{\theta}_i\right) = \boldsymbol{a}\left(\breve{\theta}_i\right)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\left(\breve{\theta}_i\right)$，则有$\boldsymbol{G}\left(\breve{\theta}_i\right)_{l_1,l_2} = \exp\left\{ \mathrm{j}2\pi\left[r_{l_1}\cos\left(\varphi_{l_1} - \breve{\theta}_i\right) - r_{l_2}\cos\left(\varphi_{l_2} - \breve{\theta}_i\right)\right] / \lambda \right\}$。令$\rho_{l_1,l_2}\exp\{\mathrm{j}\phi_{l_1,l_2}\} = r_{l_1}\exp\{\varphi_{l_1}\} - r_{l_2}\exp\{\varphi_{l_2}\}$，则$r_{l_1}\cos\left(\varphi_{l_1} - \breve{\theta}_i\right) - r_{l_2}\cos\left(\varphi_{l_2} - \breve{\theta}_i\right) = \rho_{l_1,l_2}\cos\left(\phi_{l_1,l_2} - \breve{\theta}_i\right)$，从而

$$\boldsymbol{G}\left(\breve{\theta}_i\right)_{l_1,l_2} = \exp\left\{ \mathrm{j}2\pi\rho_{l_1,l_2}\cos\left(\phi_{l_1,l_2} - \breve{\theta}_i\right) / \lambda \right\} \tag{8}$$

使用第1类贝塞尔函数可以将式(8)改写为

$$\boldsymbol{G}(\breve{\theta}_i)_{l_1,l_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}^n J_n(2\pi\rho_{l_1,l_2}/\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{l_1,l_2}n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\breve{\theta}_i n} \tag{9}$$

其中，$J_n(\cdot)$为第1类n阶贝塞尔函数。使用有限阶第1类贝塞尔函数表达(设阶数为N)，并忽略误差，将式(9)改写为

$$\boldsymbol{G}(\breve{\theta}_i) = \sum_{n=-N}^{N} \boldsymbol{C}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\breve{\theta}_i n} \tag{10}$$

其中，$[\boldsymbol{C}_n]_{l_1,l_2} = \mathrm{j}^n J_n(2\pi\rho_{l_1,l_2}/\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{l_1,l_2}n}$。从而，$\tilde{\boldsymbol{Q}} = \sum_{n=-N}^{N}\left(\sum_{i=1}^{I} \alpha_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\breve{\theta}_i n}\right)\boldsymbol{C}_n$。记

$$u_n = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\breve{\theta}_i n} \tag{11}$$

则

$$\tilde{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \triangleq u_0\boldsymbol{C}_0 + \sum_{n=1}^{N}(u_n\boldsymbol{C}_n + u_n^*\boldsymbol{C}_{-n}) \tag{12}$$

令$\boldsymbol{u} = [u_0\ u_1 \cdots\ u_N]^{\mathrm{T}}$，根据三角矩问题理论[19,26]可得：当且仅当下列Hermitian Toeplitz矩阵半正定，即

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} u_0 & u_1^* & \cdots & u_N^* \\ u_1 & u_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_1^* \\ u_N & \cdots & u_1 & u_0 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{13}$$

时，存在$\alpha_i \geq 0$，$i = 1,2,\cdots,I$，使得$\boldsymbol{u} = [u_0\ u_1\ \cdots\ u_N]^{\mathrm{T}}$满足式(11)。从而，优化问题式(6)变为

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{u}} \operatorname{rank}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\}, \\ &\text{s.t.} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \geq 0, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) \geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{W} \in \boldsymbol{C}^{L\times L}$为Hermitian矩阵，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$和$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$分别由式(12)和式(13)定义。

3.2 有噪声情形

有噪声的情形下，优化问题式(14)可以改写为

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{x}}} \operatorname{rank}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\}, \\ &\text{s.t.} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{H}} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \geq 0, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) \geq 0, \|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathrm{F}} \leq \eta \end{aligned} \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{W} \in \boldsymbol{C}^{L\times L}$为Hermitian矩阵，$\tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{C}^{M\times L}$，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$和$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$分别由式(12)和式(13)定义，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$为F范数。式(16)给出一个参数$\eta$的计算方法[19]。

$$\eta = \sqrt{ML\sigma^2} \tag{16}$$

若噪声功率σ^2未知，可以根据如下方法进行估计。接收信号的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{R}_x=\sum_{k=1}^{K} p_k \boldsymbol{a}(\theta_k)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_k)+\sigma^2\boldsymbol{I}_M \tag{17}$$

其中，p_k为第k个源的功率，$\boldsymbol{I}_M$为M维单位矩阵。$\boldsymbol{R}_x$可由样本协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_x=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}/L$估计，记$\varepsilon_1\geq\cdots\geq\varepsilon_K\geq\varepsilon_{K+1}\geq\cdots\geq\varepsilon_M\geq 0$为$\hat{\boldsymbol{R}}_x$的所有特征值，则噪声功率可以使用式(18)估计[10]。

$$\hat{\sigma}^2=(\varepsilon_{K+1}+\varepsilon_{K+2}+\cdots+\varepsilon_M)/(M-K) \tag{18}$$

3.3 模型降维

在优化问题式(14)和式(15)中，$\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{C}^{L\times L}$的维度取决于快拍数。实际应用中，可能会遇到快拍数非常大的情况，从而$\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{C}^{L\times L}$维数太大，问题求解效率低。借鉴文献[8,19]的SVD降维方法，设P_1为矩阵$\boldsymbol{x}$的秩，则$\boldsymbol{x}$的奇异值分解可以表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} \tag{19}$$

其中，$\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{M\times P_1}$和$\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{C}^{L\times P_1}$均为酉矩阵，$\boldsymbol{D}$为$P_1$阶对角矩阵，且其对角元素为$\boldsymbol{x}$的奇异值，并按从大到小排列。令$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}[\boldsymbol{I}_K\ \ \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{V}[\boldsymbol{I}_K\ \ \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{C}^{M\times P_1}$，其中$\boldsymbol{I}_K$为$K$维单位矩阵，问题式(14)可以简化为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{u}}\ \operatorname{rank}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\},\\ &\text{s.t.}\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\end{bmatrix}\geq 0,\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\geq 0\end{aligned} \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{C}^{P_1\times P_1}$为Hermitian矩阵，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$和$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$分别由式(12)和式(13)定义。

对于有噪声情形，令$\tilde{\boldsymbol{y}}=\tilde{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{V}[\boldsymbol{I}_K\ \ \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}$，由于$\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}_{P_1}$，则有$\|(\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}})\|_{\mathrm{F}}=\left\|(\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{V}[\boldsymbol{I}_K\ \ \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}\right\|_{\mathrm{F}}\leq\|(\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{V}\|_{\mathrm{F}}=\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathrm{F}}$。从而问题式(15)变为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{y}}}\ \operatorname{rank}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\},\\ &\text{s.t.}\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{W} & \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{H}}\\ \tilde{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\end{bmatrix}\geq 0,\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\geq 0,\ \|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}\|_{\mathrm{F}}\leq\eta\end{aligned} \tag{21}$$

其中，$\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{C}^{P_1\times P_1}$为Hermitian矩阵，$\tilde{\boldsymbol{y}}\in\boldsymbol{C}^{M\times P_1}$，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$和$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$分别由式(12)和式(13)定义。

3.4 模型求解与无格DOA估计

3.4.1 MM算法求解优化模型

模型式(20)和式(21)是低秩优化问题，根据低秩矩阵恢复理论，log-det方法可以作为矩阵秩的平滑替代函数[15,22,23]。为了方便描述且从实际出发，本节开始只考虑有噪声情形，问题式(21)变为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{y}}}\ \ln|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})+\tau\boldsymbol{I}_M|+\operatorname{Tr}\{\boldsymbol{W}\},\\ &\text{s.t.}\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{W} & \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{H}}\\ \tilde{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\end{bmatrix}\geq 0,\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\geq 0,\ \|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}\|_{\mathrm{F}}\leq\eta\end{aligned} \tag{22}$$

其中，$\tau\geq 0$为调节参数，避免矩阵$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})+\tau\boldsymbol{I}_M$奇异，$\operatorname{Tr}\{\cdot\}$为矩阵的迹。该问题的目标函数为1个凸函数与1个凹函数的和，可以使用MM算法[24]求解。在该方法中，每次迭代求解1个优化问题。令$\boldsymbol{u}^{(q)}$为第q次迭代得到的$\boldsymbol{u}$，已知不等式$\ln|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})+\tau\boldsymbol{I}_M|\leq\ln\left|\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}^{(q)}\right)+\tau\boldsymbol{I}_M\right|+\operatorname{Tr}\left\{\left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}^{(q)}\right)+\tau\boldsymbol{I}_M\right)^{-1}\left[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}^{(q)}\right)\right]\right\}$恒成立，且取等号时有$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}^{(q)}\right)$[24]。将该式代入问题式(22)的目标函数，且舍去常数项，可得第q次需要求解的优化问题：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{y}}}\ \operatorname{Tr}\left\{\left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}^{(q)}\right)+\tau\boldsymbol{I}_M\right)^{-1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\right\}+\operatorname{Tr}\{\boldsymbol{W}\},\\ &\text{s.t.}\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{W} & \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{H}}\\ \tilde{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\end{bmatrix}\geq 0,\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\geq 0,\ \|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}\|_{\mathrm{F}}\leq\eta\end{aligned} \tag{23}$$

下面考虑$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$初值的选取。考虑到$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})=\tilde{\boldsymbol{Q}}=\sum_{i=1}^{I_0}\boldsymbol{a}\left(\breve{\theta}_i\right)\alpha_i\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\left(\breve{\theta}_i\right)$是该问题的一个最优化结果，那么$\boldsymbol{R}_x-\sigma^2\boldsymbol{I}_M=\sum_{k=1}^{K}p_k\boldsymbol{a}(\theta_k)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_k)$可以作为$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$的一个初值，从而减少算法迭代次数。需要注意的是，实际计算时，$\boldsymbol{R}_x$和σ^2分别由$\hat{\boldsymbol{R}}_x$和$\hat{\sigma}^2$估计，矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_x-\sigma^2\boldsymbol{I}_M$有可能由于数值精度问题并不是半正定矩阵，这就要求对参数τ谨慎选取，防止矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_x-\sigma^2\boldsymbol{I}_M+\tau\boldsymbol{I}_M$奇异。本文中直接取初值

$$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}^{(1)}\right)=\hat{\boldsymbol{R}}_x-\varepsilon_M\boldsymbol{I}_M \tag{24}$$

可以完全避免上述问题。此外，根据我们多次仿真实验的经验，求解优化问题式(23)两次足以获得高精度的解。

3.4.2 DOA估计

当问题式(22)获得最优解后，可以得到(半)正定Toeplitz矩阵$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$，根据(半)正定Toeplitz矩阵的范德蒙分解方法[16,27]可以求得源信号的DOA估计。设β为$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$的最小特征值，$P_2$为矩阵$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})-\beta\boldsymbol{I}_{N+1}$的秩，则半正定矩阵$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})-\beta\boldsymbol{I}_{N+1}$可以唯一分解为

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})-\beta\boldsymbol{I}_{N+1}=\sum_{\tilde{i}=1}^{P_2}\gamma_{\tilde{i}}\boldsymbol{h}(\tilde{\theta}_{\tilde{i}})\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\tilde{\theta}_{\tilde{i}}) \tag{25}$$

其中，$\gamma_{\tilde{i}}\geq 0,\boldsymbol{h}(\tilde{\theta}_{\tilde{i}})=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\theta}_{\tilde{i}}} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\theta}_{\tilde{i}}N}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\tilde{i}=1,2,\cdots,P_2$。由于$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})-\beta\boldsymbol{I}_{N+1}$半正定，存在$\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{C}^{(N+1)\times P_2}$使得$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})-\beta\boldsymbol{I}_{N+1}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}$。矩阵$\boldsymbol{Z}$可以通过对$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})-\beta\boldsymbol{I}_{N+1}$进行Cholesky分解或者特征分解等方法求得。记$\boldsymbol{Z}_{-(N+1)}$和$\boldsymbol{Z}_{-1}$分别为$\boldsymbol{Z}$移去第$N+1$行和第1行的矩阵，计算矩阵$\boldsymbol{Z}_{-(N+1)}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Z}_{-1}$相对于$\boldsymbol{Z}_{-(N+1)}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Z}_{-(N+1)}$的广义特征值$\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_{P_2}$和广义特征向量$\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_{P_2}$，则有$\tilde{\theta}_{\tilde{i}}=\operatorname{angle}\{\kappa_{\tilde{i}}\}$和

$\gamma_{\tilde{i}}=|\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{g}_{\tilde{i}}|^2$，其中angle{·}为取相位的函数，$\boldsymbol{Z}_1$为$\boldsymbol{Z}$的第1行。最后，选取$K$个最大的$\gamma_{\tilde{i}}$对应的$\tilde{\theta}_{\tilde{i}}$作为$K$个源的DOA估计。

3.5 性能分析

本节对本文方法的估计性能与计算复杂度进行分析，并与文献[19]提供的两种2维阵列的无格DOA估计方法(TVMA-FAST算法和SPICE-GL算法)进行对比。

3.5.1 估计性能对比分析

优化问题式(22)可以变形为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{y}}}\ \ln|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})+\tau\boldsymbol{I}_M|+\mathrm{Tr}\left\{\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}\right\},\\&\mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\geq 0,\ \|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}\|_{\mathrm{F}}\leq\eta\end{aligned}\tag{26}$$

可以观察到，问题式(26)的目标函数与文献[28]提出的稀疏测度具有一致性。不同之处在于，本文基于2维阵列推导而来，文献[28]对应于1维线阵，从而在约束条件上有较大差别，但这不影响该稀疏测度的性质。文献[28]的定理1(Theorem 1)与定理2(Theorem 2)表明：当τ趋近于正无穷时，该稀疏测度等价于原子范数；当τ趋近于0时，该测度接近原子L0范数。另外，原子范数优化问题存在一个分辨率限制[29,30]，而式(26)的稀疏测度可以解释为以Capon波束形成空间谱加权的加权原子范数，可以提升解的稀疏性[28]。因此，相比于以原子范数为目标函数的TVMA-FAST算法，当取τ为一个小的正数时，优化问题式(26)的全局最优解比TVMA-FAST算法更加稀疏。从这方面分析，本文方法比TVMA-FAST算法具有更高的DOA估计精度，后文的仿真实验也验证了该结论。

下面对比SPICE-GL算法[19]。该算法具有可以估计非均匀噪声功率的优点，这是本文方法不具备的。然而正是由于噪声功率的估计，SPICE-GL算法的DOA伪空间谱更容易产生伪峰[17,19]。在均匀噪声的情形下，若噪声功率已知或已被估计，SPICE-GL算法的优化问题(文献[19]中式(25))按本文的表示方法可以写为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{u}}\ \mathrm{Tr}\left\{\hat{\boldsymbol{R}}_x^{-1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\right\}+\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{W}_1\},\\&\mathrm{s.t.}\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_1 & \boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})+\hat{\sigma}^2\boldsymbol{I}_M\end{bmatrix}\geq 0,\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\geq 0\end{aligned}\tag{27}$$

对比本文方法优化问题式(23)，当初始值选择为$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}^{(1)}\right)+\tau\boldsymbol{I}_M=\hat{\boldsymbol{R}}_x$时，优化问题式(23)与优化问题式(27)的目标函数具有一致性。不考虑约束条件的情况下，优化问题式(23)的第1次求得的解与优化问题式(27)的解相同。然而，本文方法中，优化问题式(23)需要多次求解以获得更接近优化问题式(22)的最优解。因此，从这个角度分析，随着优化问题式(23)的多次求解，本文方法将获得比优化问题式(27)更稀疏的解。另外，在高信噪比时，$\hat{\boldsymbol{R}}_x$可能缺秩，SPICE-GL算法中$\hat{\boldsymbol{R}}_x^{-1}$的计算难以精确，也会导致DOA估计性能下降。

3.5.2 计算复杂度对比分析

TVMA-FAST算法、SPICE-GL算法与优化问题式(23)均可以通过工具箱SeDuMi[31]或SDPT3[32]求解。对于半定规划问题，最差情况的单次迭代计算复杂度取决于独立实变量数目的立方[19,33]。优化问题式(23)与TVMA-FAST算法具有相同的独立实变量数目$P_1^2+2P_1M+2N+1$，从而每次迭代具有相同的计算复杂度$O\{(P_1^2+2P_1M+2N+1)^3\}$。SPICE-GL算法具有更小的独立实变量数目$P_1^2+M+2N+1$，从而每次迭代具有更小的计算复杂度$O\{(P_1^2+M+2N+1)^3\}$。由于本文方法需要多次求解优化问题式(23)，因此，若迭代次数相等，本文方法的计算复杂度一般大于TVMA-FAST算法和SPICE-GL算法。

4 仿真实验

考虑一个8元非均匀圆阵，半径为2.5λ，其角度分布为$\varphi_{2\tilde{m}+1}=2\pi\tilde{m}/4-\arcsin(1/10)$和$\varphi_{2\tilde{m}+2}=2\pi\tilde{m}/4+\arcsin(1/10)$，其中$\tilde{m}=0,1,2,3$。这里保证了最小阵元间距为$\lambda/2$，以下仿真均基于此阵列。源信号使用均值为0且方差为1的独立同分布的复高斯信号，每个阵元添加等功率的复高斯白噪声。接收信号信噪比(SNR)由式(28)定义：

$$\mathrm{SNR}=10\lg\left(K/\sigma^2\right)\tag{28}$$

使用均方根误差(RMSE)作为算法性能评价标准，由式(29)计算：

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{1}{FK}\sum_{f=1}^{F}\sum_{k=1}^{K}\left|\hat{\theta}_{k,f}-\theta_k\right|^2}\tag{29}$$

其中，$\hat{\theta}_{k,f}$为第f次独立实验中第k个源的DOA估计值，F为独立实验的次数。

4.1 RMSE性能仿真分析

本节仿真并对比分析本文方法在不同快拍数和不同信噪比条件下的RMSE性能。作为对比，仿真了TVMA-FAST算法和SPICE-GL算法，其中SPICE-GL方法直接使用式(18)计算的噪声功率估计值$\hat{\sigma}^2$，不再对其进行迭代优化；仿真了经典的基于网格的MUSIC算法[6]，并设置搜索角度间隔为0.01°；给出了对应的DOA估计无条件克拉美罗界(CRB)(文献[34]中式(3.1))。本文方法中设置贝塞尔函数阶数$N=80$。3种无格DOA估计方法(TVMA-FAST, SPICE-GL和本文方法)均使用SeDuMi工具箱[28]求解对应的优化问题。设置源数目为2，其真

实DOA分别为$-80.5516°$和$50.1757°$。首先设置SNR = 4 dB，快拍数从小到大变化，独立实验次数为200，实验结果如图1(a)所示。可以看出，所有方法的RMSE均随着快拍数增加而减小，TVMA-FAST方法在快拍数大于20后RMSE减小幅度不如其他3种方法，而本文方法的RMSE在快拍数大于20之后均最低，基本达到了DOA估计的CRB。接着设置快拍数为200, SNR从小到大变化，独立实验次数为200，实验结果如图1(b)所示。可以看出，本文方法在测试的所有的信噪比条件下均具有最低的RMSE，在SNR大于–2 dB时接近DOA估计的CRB。

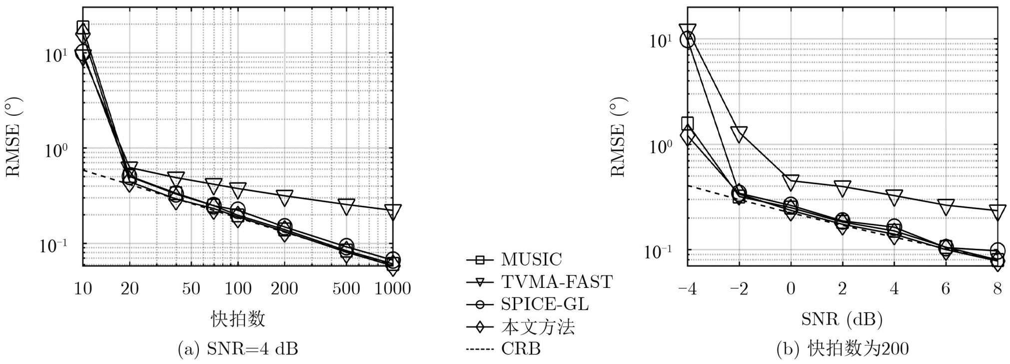


图 1 RMSE仿真实验结果

4.2 相邻源DOA估计仿真分析

本节仿真分析本文方法对相邻源的DOA估计性能。同4.1节的其他3种方法也进行了仿真对比。设置源数目为2，第1个源的DOA为$-1°$到$1°$随机产生，第2个源的DOA为第1个源的DOA加一个角度间隔，本节实验设置该角度间隔分别为$1°, 2°, \cdots, 10°$，每一个角度间隔均进行200次独立实验。图2(a)显示了快拍数为200, SNR为4 dB的仿真实验结果，图2(b)显示了快拍数为50, SNR为4 dB的仿真实验结果。从图2可以看出，随着角度间隔增大，4种方法的RMSE均有所减小。除了MUSIC算法，其他3种方法在这2种实验条件下均对角度间隔大于$2°$的两个源具有较好的DOA估计性能。MUSIC算法对相邻源的DOA估计性能相对较差，TVMA-FAST算法次之，SPICE-GL算法和本文方法性能接近，表现最好。

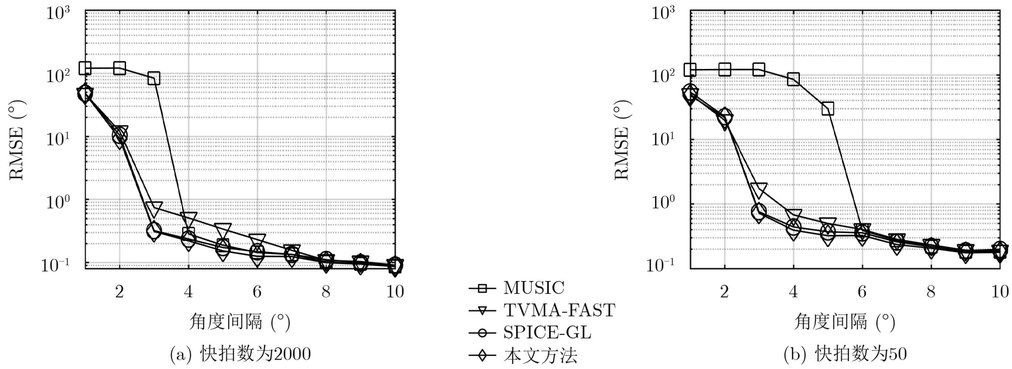
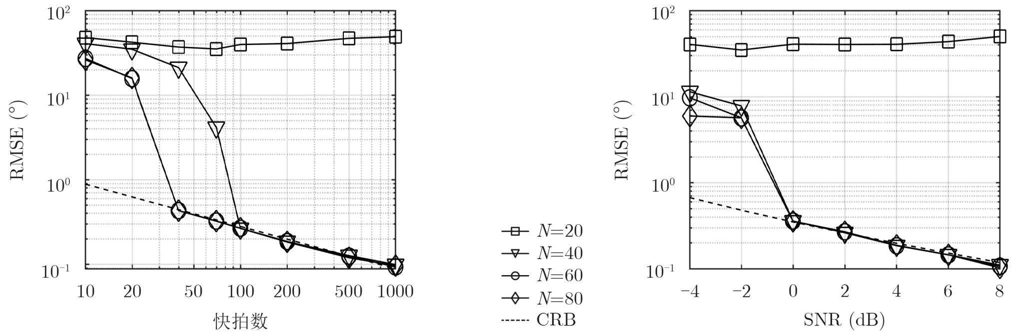


图 2 相邻源RMSE仿真实验结果

4.3 第1类贝塞尔函数阶数选择仿真分析

本节仿真分析贝塞尔函数阶数对本文方法性能的影响。设置源数目为3，其DOA分别为$-80.5516°, 0.3267°$和$50.1757°$。分别设置贝塞尔函数阶数为20, 40, 60和80，并如4.1节一样分别对不同快拍数和信噪比进行仿真实验。首先设置SNR = 4 dB，快拍数从小到大变化，独立实验次数为200，实验结果如图3(a)所示。可以看出，当$N = 20$时本文方法对所有测试的快拍数失效，当$N = 40$且快拍数小于100时本文方法表现不佳，当$N = 60$或80时本文方法表现良好。接着设置快拍数为200, SNR从小到大变化，独立实验次数为200，实验结果如图3(b)所示，且实验结果相似。从图3(a)与图3(b)可以看出，当快拍数与信噪比SNR大于一定值时，在$N = 40$, 60和80条件下本文方法均具有一致的RMSE，且都能达到DOA估计



(a) SNR=4 dB　(b) 快拍数为200

图 3 不同贝塞尔函数阶数的本文方法仿真实验结果

的CRB。另外，表1给出了在这4种情况下本文方法的平均运行时间，可以看出随着N增大，本文方法的运行时间逐渐增加。结合图3的实验结果可知，在快拍数充足且信噪比较高时，可以通过适量降低N的值，使本文方法在RMSE性能几乎不变的情况下减少运行时间。

表 1　不同贝塞尔函数阶数的本文方法平均运行时间(s)

N	20	40	60	80
运行时间	0.7453	1.7536	4.0365	8.0497

5　结束语

本文研究了适用于2维阵列的无格稀疏DOA估计方法。该方法构造了一个秩优化的SDP问题，通过MM算法求解，最后使用(半)正定Toeplitz矩阵的范德蒙分解方法实现无格DOA估计。仿真实验结果表明，相比基于网格的MUSIC与其他无格DOA估计方法，本文方法具有更好的RMSE性能与相邻源分辨能力。另外，在快拍数充足且信噪比较高时，可以通过适量降低第1类贝塞尔函数阶数，使本文方法在RMSE性能几乎不变的情况下减少运行时间，有助于实际应用。

参 考 文 献

[1] QIN Si, ZHANG Yimin D, and AMIN M G. DOA estimation of mixed coherent and uncorrelated targets exploiting coprime MIMO radar[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 61: 26–34. doi: 10.1016/j.dsp.2016.06.006.

[2] SAUCAN A A, CHONAVEL T, SINTES C, *et al*. CPHD-DOA tracking of multiple extended sonar targets in impulsive environments[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(5): 1147–1160. doi: 10.1109/TSP.2015.2504349.

[3] HE Saijuan and CHEN Huawei. Closed-form DOA estimation using first-order differential microphone arrays via joint temporal-spectral-spatial processing[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2017, 17(4): 1046–1060. doi: 10.1109/JSEN.2016.2641449.

[4] WAN Liangtian, HAN Guangjie, JIANG Jinfang, *et al*. A DOA estimation approach for transmission performance guarantee in D2D communication[J]. *Mobile Networks and Applications*, 2017, 22(6): 998–1009. doi: 10.1007/s11036-017-0820-2.

[5] CAPON J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1969, 57(8): 1408–1418. doi: 10.1109/PROC.1969.7278.

[6] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: 10.1109/TAP.1986.1143830.

[7] ROY R and KAILATH T. ESPRIT—Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984–995. doi: 10.1109/29.32276.

[8] MALIOUTOV D, CETIN M, and WILLSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022. doi: 10.1109/TSP.2005.850882.

[9] WIPF D P and RAO B D. An empirical Bayesian strategy for solving the simultaneous sparse approximation problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3704–3716. doi: 10.1109/TSP.2007.894265.

[10] LIU Zhangmeng, HUANG Zhitao, and ZHOU Yiyu. An efficient maximum likelihood method for direction-of-arrival estimation via sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2012, 11(10): 1–11. doi: 10.1109/TWC.2012.090312.111912.

[11] BHASKAR B N, TANG Gongguo, and RECHT B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(23): 5987–5999. doi: 10.1109/TSP.2013.2273443.

[12] QIAN Tong, TIAN Jing, ZHANG Xu, *et al*. Atomic norm method for DOA estimation in random sampling condition[C]. 2016 CIE International Conference on Radar (RADAR), Guangzhou, China, 2016: 1–4. doi: 10.1109/

RADAR.2016.8059530.

[13] ZHANG Yu, ZHANG Gong, and WANG Xinhai. Array covariance matrix-based atomic norm minimization for off-grid coherent direction-of-arrival estimation[C]. 2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), New Orleans, USA, 2017: 3196–3200. doi: 10.1109/ICASSP.2017.7952746.

[14] CHEN Yuxin and CHI Yuejie. Robust spectral compressed sensing via structured matrix completion[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, 60(10): 6576–6601. doi: 10.1109/TIT.2014.2343623.

[15] YANG Zai, LI Jian, STOICA P, *et al*. Sparse methods for direction-of-arrival estimation[OL]. http://cn.arxiv.org/pdf/1609.09596v2, 2017.3.

[16] YANG Zai, XIE Lihua, and ZHANG Cishen. A discretization-free sparse and parametric approach for linear array signal processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(19): 4959–4973. doi: 10.1109/TSP.2014.2339792.

[17] YANG Zai and XIE Lihua. On gridless sparse methods for multi-snapshot direction of arrival estimation[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2017, 36(8): 3370–3384. doi: 10.1007/s00034-016-0462-9.

[18] ZHANG Youwen, HONG Xiaoping, WANG Yonggang, *et al*. Gridless SPICE applied to parameter estimation of underwater acoustic frequency hopping signals[C]. 2016 IEEE/OES Chian Ocean Acoustics (COA), Harbin, China, 2016: 1–6. doi: 10.1109/COA.2016.7535747.

[19] MAHATA K and HYDER M M. Grid-less TV minimization for DOA estimation[J]. *Signal Processing*, 2017, 132: 155–164. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.09.018.

[20] RAO B D and HARI K V S. Performance analysis of root-MUSIC[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(12): 1939–1949. doi: 10.1109/29.45540.

[21] TANG Gongguo, BHASKAR B N, SHAH P, *et al.* Compressed sensing off the grid[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(11): 7465–7490. doi: 10.1109/TIT.2013.2277451.

[22] MOHAN K and FAZEL M. Iterative reweighted algorithms for matrix rank minimization[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2012, 13(11): 3441–3473.

[23] SUNDIN M, ROJAS C R, JANSSON M, *et al*. Relevance singular vector machine for low-rank matrix reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(20): 5327–5339. doi: 10.1109/TSP.2016.2597121.

[24] SUN Ying, BABU P, and PALOMAR D P. Majorization-minimization algorithms in signal processing, communications, and machine learning[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(3): 794–816. doi: 10.1109/TSP.2016.2601299.

[25] HORN R A and JOHNSON C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2013: 495–497.

[26] LANDAU H J. The classical moment problem: Hilbertian proofs[J]. *Journal of Functional Analysis*, 1980, 38(2): 255–272. doi: 10.1016/0022-1236(80)90065-8.

[27] STOICA P and MOSES R L. Spectral Analysis of Signals[M]. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2005: 172–177.

[28] YANG Zai and XIE Lihua. Enhancing sparsity and resolution via reweighted atomic norm minimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(4): 995–1006. doi: 10.1109/TSP.2015.2493987.

[29] FERNANDEZGRANDA C. Super-resolution of point sources via convex programming[C]. IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, Cancun, Mexico, 2015: 41–44. doi: 10.1109/CAMSAP.2015.7383731.

[30] CANDES E J and FERNANDEZ-GRANDA C. Towards a mathematical theory of super-resolution[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2014, 67(6): 906–956. doi: 10.1002/cpa.v67.6.

[31] STURM J F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones[J]. *Optimization Methods and Software*, 1999, 11(1/4): 625–653. doi: 10.1080/10556789908805766.

[32] TOH K C, TODD M J, and TUTUNCU R H. SDPT3—A Matlab software package for semidefinite programming, Version 1.3[J]. *Optimization Methods and Software*, 1999, 11(1/4): 545–581. doi: 10.1080/10556789908805762.

[33] STURM J F. Implementation of interior point methods for mixed semidefinite and second order cone optimization problems[J]. *Optimization Methods and Software*, 2002, 17(6): 1105–1154. doi: 10.1080/1055678021000045123.

[34] STOICA P and NEHORAI A. Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1990, 38(10): 1783–1795. doi: 10.1109/29.60109.

王剑书：男，1989年生，博士生，研究方向为阵列信号处理、DOA估计和波束形成等.

樊养余：男，1960年生，教授，主要研究方向为数字图像处理、数字信号处理理论与应用、无线光通信技术和虚拟现实技术等.

杜　瑞：男，1988年生，博士生，研究方向为雷达信号处理和模式识别等.

吕国云：男，1975年生，副教授，主要研究方向为信号与信息处理、语音和图像处理、虚拟现实和嵌入式系统和高速信号处理等.