多测量向量模型下的修正MUSIC算法

林 云[①] 胡 强*[②]
[①](重庆邮电大学光电工程学院 重庆 400065)
[②](重庆邮电大学通信与信息工程学院 重庆 400065)

摘 要：压缩感知多测量向量(MMV)模型用于解决具有相同稀疏结构的多快拍问题，在传统阵列信号处理应用中多重信号分类(MUSIC)方法是一种常见的方法，但当快拍数不足(低于稀疏度)时其性能将急剧恶化。Kim等人(2012)推导出一种修正的MUSIC谱，并将压缩重构方法和MUSIC算法结合提出压缩感知MUSIC算法(CS-MUSIC)，能够有效克服快拍数不足的问题。该文将Kim等人的结论扩展到一般情形，并基于传统的MUSIC谱和CS-MUSIC谱提出一种修正的MUSIC算法(MMUSIC)。仿真结果表明所提算法能够有效克服快拍数不足的问题，并且具有比CS-MUSIC算法和压缩感知贪婪算法更高的重构概率。

关键词：压缩感知；多测量向量模型；联合稀疏；多重信号分类
中图分类号：TN911.7 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2018)11-2584-06
DOI: 10.11999/JEIT180001

Modified MUSIC Algorithm for Multiple Measurement Vector Models

LIN Yun[①] HU Qiang[②]
[①](*College of Optoelectronic Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing* 400065, *China*)
[②](*College of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing* 400065, *China*)

Abstract: The Compressed Sensing (CS) Multiple Measurement Vector (MMV) model is used to solve multiple snapshots problem with the same sparse structure. MUltiple SIgnal Classification (MUSIC) is a common method in traditional array signal processing applications. However, when the number of snapshots is below sparsity performance will be dramatically deteriorated. Kim et al. derive a modified MUSIC spectral method and propose a Compressed Sensing MUSIC method (CS-MUSIC) combining the compression reconstruction method and the MUSIC algorithm, which can effectively overcome the problem of insufficient snapshot number. In this paper, Kim et al.'s conclusion is extended to the general case, and a Modified MUSIC (MMUSIC) algorithm is proposed based on the traditional MUSIC method and the CS-MUSIC method. The simulation results show that the proposed algorithm can effectively overcome the shortage of snapshots and has a higher reconstruction probability than the CS-MUSIC algorithm and the compressed sensing greedy algorithm.

Key words: Compressed Sensing (CS); Multiple Measurement Vectors (MMV) model; Jointly sparsity; MUltiple SIgnal Classification (MUSIC)

1 引言

压缩感知(Compressed Sensing, CS)[1–4]技术可以少量观测次数采集原信号的全部信息，极大地节省了硬件资源，目前已具有广泛的应用[5–9]。在雷达信号处理领域中的波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计[10]应用中，压缩感知观测过程一般建模为多测量向量(Multiple Measurement Vector, MMV)模型[11]，感兴趣的来波方向只占据全波达方向的少量单元，不感兴趣部分被视为0，这就可将来波方向建模为空域稀疏信号，并利用CS重构技术进行DOA估计。文献[12]将传统多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法[13]拓展到CS重构领域，但在快拍数低于稀疏度时，MUSIC算法性能将急剧下降。文献[14]将MUSIC算法和CS理论结合，提出压缩感知MUSIC(CS-MUSIC)算法，有效提高了MUSIC算法在快拍数过少的估计精度。文献[15]在CS-MUSIC算法基础

收稿日期：2018-01-02；改回日期：2018-06-04；网络出版：2018-07-18
*通信作者： 胡强 huqiang0424@qq.com

上，用差值映射代替CS恢复算法获取部分支撑集，提出基于差值映射的MUSIC算法，但该算法每次迭代都需要在原信号维度上排序、求逆，并进行多次迭代，导致计算复杂度巨大。此外，还有一些方法，如凸优化方法[16]，贝叶斯方法[17]、块稀疏方法[18]等，也被用于解决MMV问题，但计算复杂度均较大。

CS-MUSIC算法将支撑集分为两部分，一部分大小固定为$K-L$，用CS重构算法恢复，剩余部分用修正的MUSIC谱方法恢复，这里K为疏度，L快拍数。本文将文献[14]的结论扩展至一般情形，即先用MUSIC算法恢复q($q\in[K-L,L-1]$)个支撑坐标，剩余部分用修正的MUSIC谱方法恢复，将这种方法称为修正的MUSIC(Modified MUSIC, MMUSIC)算法。仿真结果表明MMUSIC算法可有效克服快拍数不足的问题，并且具有高于CS-MUSIC算法和贪婪算法同时正交匹配(Simultaneously Orthogonal Matching Pursuit, SOMP)的重构概率。

2 压缩域特征分解原理

假设M元接收阵列接收到的远场信号仅对K个波达方向是感兴趣的，在时刻n阵列接收数据过程可描述为

$$\boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{n}(n),\ n=1,2,\cdots,L \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{M\times1}$是接收信号，$\boldsymbol{n}\in\mathbf{R}^{M\times1}$是观测噪声，一般考虑为高斯白噪声，$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{M\times N}$是阵列流形矩阵，可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1(w_0),\boldsymbol{a}_2(w_0),\cdots,\boldsymbol{a}_N(w_0)]\\&\boldsymbol{a}_i(w_0)=[\exp(-\mathrm{j}w_0\tau_{1i}),\exp(-\mathrm{j}w_0\tau_{2i}),\cdots,\\&\qquad\qquad\exp(-\mathrm{j}w_0\tau_{Mi})]^{\mathrm{T}}\\&\tau_{mi}=\frac{1}{c}(m-1)d\sin(\theta_i)\\&\qquad m=1,2,\cdots,M,\ i=1,2,\cdots,N\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这里L为快拍数，N为空间网格划分数，d为阵元间距，c为电磁波传播速度。计算观测信号$\boldsymbol{y}$的自相关矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{yy}&=E\left[\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\right]=E\left[(\boldsymbol{A}_S\boldsymbol{x}_S+\boldsymbol{n})(\boldsymbol{A}_S\boldsymbol{x}_S+\boldsymbol{n})^{\mathrm{T}}\right]\\&=\boldsymbol{A}_SE\left[\boldsymbol{x}_S\boldsymbol{x}_S^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{A}_S^{\mathrm{T}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}_S\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{A}_S^{\mathrm{T}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{3}$$

其中，$E[\cdot]$表示数学期望，σ_n^2表示观测噪声功率，S表示信号$\boldsymbol{x}$的支撑集，$\boldsymbol{I}\in\mathbf{R}^{M\times M}$表是单位阵，$\boldsymbol{A}_S$表示在集合$S$中的坐标对应$\boldsymbol{A}$中的列组成的子矩阵，$\boldsymbol{x}_S$表示集合$S$中的坐标对应$\boldsymbol{x}$的元素组成的子信号。将式(1)写为矩阵形式

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{N} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{N}\in\mathbf{R}^{M\times L}$为观测噪声矩阵，$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}(1),\boldsymbol{x}(2),\cdots,\boldsymbol{x}(L)]\in\mathbf{R}^{N\times L}$为信号矩阵，各信号$\boldsymbol{x}(n),n=1,2,\cdots,L$具有相同的支撑集，$\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{M\times L}$是观测信号矩阵。根据式(4)可计算$\boldsymbol{R}_{yy}$的估计值$\widehat{\boldsymbol{R}_{yy}}=\dfrac{1}{L}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$。根据信号特征分解理论可得

$$\boldsymbol{R}_{yy}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{\Sigma}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{U}_s\in\mathbf{R}^{M\times K}$与$\boldsymbol{U}_n\in\mathbf{R}^{M\times(M-K)}$分别为信号子空间和噪声子空间，$\boldsymbol{\Sigma}_s$和$\boldsymbol{\Sigma}_n$是对角阵。对式(5)式两端同时乘以$\boldsymbol{U}_n$，可得

$$\boldsymbol{A}_S\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{A}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n+\sigma_n^2\boldsymbol{U}_n=\sigma_n^2\boldsymbol{U}_n \tag{6}$$

可知$\boldsymbol{A}_S\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{A}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n=0$，因为$\boldsymbol{A}_S\boldsymbol{R}_{xx}$是满秩的，从而

$$\boldsymbol{A}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n=0 \tag{7}$$

文献[12]利用此关系给出MUSIC谱的形式(逆谱)，即

$$f_i=\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i \tag{8}$$

这里$\boldsymbol{a}_i$表示观测矩阵$\boldsymbol{A}$的第i列，$i\in[1,N]$，并选取K个最小的谱函数值对应的坐标作为估计支撑集。实际上，用MMV模型得到的估计值$\widehat{\boldsymbol{R}_{yy}}$代替$\boldsymbol{R}_{yy}$，会使式(7)的关系不能精确达到，支撑坐标处的谱函数值将大于0。

3 修正的MUSIC算法

MUSIC算法表明谱函数值越小其相应坐标越可能属于支撑集，但在快拍数不足($L<K$)的条件下，矩阵$\boldsymbol{A}_S\boldsymbol{R}_{xx}$是欠秩的，这无法保证式(7)的关系一定成立，使MUSIC算法无法获得准确的谱估计。从式(4)易知观测信号$\boldsymbol{Y}$由纯观测信号和观测噪声组成，即

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{N} \tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$表示纯观测信号，易知

$$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{U}_s)=R(\boldsymbol{U}_n)^{\perp}=N(\boldsymbol{U}_n) \tag{10}$$

$R(\cdot)$表示矩阵泛函空间，$(\cdot)^{\perp}$表示正交补空间运算，$N(\cdot)$表示矩阵零空间。定义信号矩阵$\boldsymbol{X}$的支撑集为

$$S=\operatorname{supp}(\boldsymbol{X}):=\left\{i\middle|\left\|\boldsymbol{X}^i\right\|_0\neq0,i=1,2,\cdots,N\right\} \tag{11}$$

式中，$\boldsymbol{X}^i$表示矩阵$\boldsymbol{X}$的第i行，$\|\cdot\|_0$表示向量l_0范数，且$|S|=K$。下面推导修正的MUSIC谱函数，因为信号矩阵$\boldsymbol{X}$的列相互独立，则定理1成立：

定理1 如果观测矩阵$\boldsymbol{A}$满足RIP条件$0\leq\delta_{2K-p}(\boldsymbol{A})<1$，那么

$$\operatorname{spark}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=K-p \tag{12}$$

其中，$p\in[L-1,K-1]$，$\operatorname{spark}(\cdot)$表示矩阵最小线性相关的列数。

证明 (1)假设存在一个$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{N\times1}\backslash\{\mathbf{0}\}$使得$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\|\boldsymbol{x}\|_0\le K-p$，其中$p\in[L-1,K-1]$。因为$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，可知$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\in N\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\right)=R(\boldsymbol{B})$，因此存在$\widehat{\boldsymbol{x}}\in R(\boldsymbol{B})$，使得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$且$\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})=\operatorname{supp}(\widehat{\boldsymbol{x}})$，于是$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}})=\mathbf{0}$, $\|\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}}\|_0\le K+K-p=2K-p$。如果观测矩阵$\boldsymbol{A}$满足RIP条件$0\le\delta_{2K-p}(\boldsymbol{A})<1$，则有$\boldsymbol{x}=\widehat{\boldsymbol{x}}$，从而$\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})\subset\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})$。又$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\in R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})$，那么存在一个$\boldsymbol{y}\in R(\boldsymbol{X})$使得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，因此对于$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$且$\|\boldsymbol{x}\|_0\le K-p$在满足$0\le\delta_{2K-p}(\boldsymbol{A})<1$时有$\widehat{\boldsymbol{x}}\in R(\boldsymbol{X})$。

(2)现证明对于任何$\boldsymbol{x}\in R(\boldsymbol{X})\backslash\{\mathbf{0}\}$有$\|\boldsymbol{x}\|_0\ge K-p$。先假设$\|\boldsymbol{x}\|_0\le K-p-1$，因为$p\in[L-1,K-1]$，对于集合$D\subset\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})\backslash\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})$且$|D|=p+1\ge L$，应存在$\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^{L\times1}\backslash\{\mathbf{0}\}$使得$\boldsymbol{X}^D\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{X}^D$表示$\boldsymbol{X}$中坐标在集合$D$中的行构成的子矩阵。但$\boldsymbol{X}^D\in\mathbf{R}^{|D|\times L}$，可知$\boldsymbol{X}^D\boldsymbol{c}\ne0$，这与上面推断矛盾，因此$\|\boldsymbol{x}\|_0\ge K-p$。综合(1)和(2)，易知$\|\boldsymbol{x}\|_0=K-p$，又$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，从而$\operatorname{spark}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=K-p$，定理1得证。

根据定理1可以推导出定理2。

定理 2 假设$\left\lceil\dfrac{K+1}{2}\right\rceil\le L<K<M$, $S_1\subset\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})$且$|S_1|=q$，对于任何$j\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})\backslash S_1$有

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}_{S_1},\boldsymbol{a}_j\right]\right)=q\tag{13}$$

其中，$q\in[K-L,L-1]$，$\operatorname{rank}(\cdot)$表示矩阵的秩。

证明 (1)先证明可由$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}_{S_1},\boldsymbol{a}_j\right]\right)=q$推出$j\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})\backslash S_1$。假设观测矩阵满足RIP条件$0\le\delta_{2K-p}(\boldsymbol{A})<1$，由定理1可知$\operatorname{spark}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=K-p$，即矩阵$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$中线性相关列数最少为$K-p$。又$|S_1|=q\le L-1<M$，可知$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}\right)\le q$，易知存在$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^{q\times1}\backslash\{\mathbf{0}\}$使$\boldsymbol{X}^{S_1}\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，其中$\boldsymbol{X}^{S_1}\in\mathbf{R}^{q\times L}$。因为$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}\right)\le q$，即矩阵$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}$线性无关的列数最多为$q$，那么矩阵$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}$中的任何$q+1$列都线性相关，即应当有$q+1\ge\operatorname{spark}(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1})$恒成立。对于$p\in[L-1,K-1]$，易知$q+1\ge K-p=\operatorname{spark}(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1})$恒成立，亦即此时$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}$的列线性相关，故而$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}\right)=q$。又$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}_{S_1},a_j\right]\right)=q<M$，可知存在$\boldsymbol{x}_{S_1}\in\mathbf{R}^{q\times1}$使得$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}_{S_1},\boldsymbol{a}_j\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{S_1}\\-1\end{bmatrix}=0$，即$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}_{S_1}\boldsymbol{x}_{S_1}-\boldsymbol{a}_j\right)=\mathbf{0}, j\in\{1,2,\cdots,N\}\backslash S_1$，由式(10)易知$\boldsymbol{A}_{S_1}\boldsymbol{x}_{S_1}-\boldsymbol{a}_j\in N\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\right)=R(\boldsymbol{B})$，因此存在$\widetilde{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^{q\times1}$且$\operatorname{supp}(\widetilde{\boldsymbol{x}})\subset\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})$，使得$\boldsymbol{A}_{S_1}\boldsymbol{x}_{S_1}-\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{x}}\in R(\boldsymbol{B})$。因为$j\in S_1$且$\operatorname{supp}(\widetilde{\boldsymbol{x}})=\{j\}\cup\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}_{S_1})\subset\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})$，所以$j\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})\backslash S_1$。

(2)现证明可由$j\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})\backslash S_1$推出$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}_{S_1},\boldsymbol{a}_j\right]\right)=q$。采用反证法，先假设$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}_{S_1},\boldsymbol{a}_j\right]\right)=q+1$，与(1)类似，易知对于任何使$\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}_{S_1}\boldsymbol{x}_{S_1}-\boldsymbol{a}_j\right)\ne0$的$\boldsymbol{x}_{S_1}\in\mathbf{R}^{q\times1}$，有$\boldsymbol{A}_{S_1}\boldsymbol{x}_{S_1}-\boldsymbol{a}_j\notin R(\boldsymbol{B})$。设$Q=\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})\backslash(S_1\cup\{j\})$且$|Q|=K-q-1<L$(亦即$q\ge K-L$)，存在$\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^{L\times1}\backslash\{\mathbf{0}\}$使$\boldsymbol{X}^Q\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，其中$\boldsymbol{X}^Q\in\mathbf{R}^{|Q|\times L}$。因为$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^Q\\\boldsymbol{X}^{Q^c}\end{pmatrix}$，这里$Q^c=\{1,2,\cdots,N\}\backslash Q$，易知$\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{c}\|_0=K-|Q|=q+1$,

$$\operatorname{supp}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{c})=\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})\backslash Q=\{j\}\cup S_1\subset\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})$$

又$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{c}\in R(\boldsymbol{B})$且$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}\right)=q$，因此存在$\boldsymbol{x}_{S_1}\in\mathbf{R}^{q\times1}$使得$[\boldsymbol{A}_{S_1},\boldsymbol{a}_j]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{S_1}\\-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_{S_1}\boldsymbol{x}_{S_1}-\boldsymbol{a}_j\in R(\boldsymbol{B})$，这与上面的假设矛盾，所以$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}_{S_1},\boldsymbol{a}_j\right]\right)=q$。综合(1)和(2)，定理2得证。

根据定理2可以推导出修正的MUSIC谱函数。令$S_2=\operatorname{supp}(\boldsymbol{X})\backslash S_1$，$\boldsymbol{G}_{S_1}=\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}$，$\boldsymbol{g}_j=\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j$，$j\in S_2$，由定理2可知$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}_{S_1},\boldsymbol{a}_j\right]\right)=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}\right)=q$，从而$\operatorname{rank}\left(\left(\boldsymbol{G}_{S_1},\boldsymbol{g}_j\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{G}_{S_1},\boldsymbol{g}_j\right)\right)=q<q+1$，可得

$$\det\left(\left(\boldsymbol{G}_{S_1},\boldsymbol{g}_j\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{G}_{S_1},\boldsymbol{g}_j\right)\right)=0\tag{14}$$

因为

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{S_1}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{g}_j^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{S_1}&\boldsymbol{g}_j\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n\\\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}&\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}&\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j\\\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{S_1}&\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{A}_{S_1}&\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{a}_j\\\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{A}_{S_1}&\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{a}_j\end{bmatrix}\end{aligned}$$

这里，$P_{R(\boldsymbol{U}_n)}=\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{T}}$表示噪声子空间投影算子，可得式(14)等价于

$$\begin{aligned}&\det\left(\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{A}_{S_1}\right)\\&\cdot\det\Big(\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{a}_j-\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\\&\cdot\boldsymbol{A}_{S_1}\left(\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{A}_{S_1}\right)^{-1}\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{a}_j\Big)=0\end{aligned}\tag{15}$$

因为$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}}P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{A}_{S_1}\right)=q$满秩，可得

$$\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} P_{R(\boldsymbol{U}_n)} \boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} P_{R(\boldsymbol{U}_n)} \boldsymbol{A}_{S_1} \left(\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}} P_{R(\boldsymbol{U}_n)} \boldsymbol{A}_{S_1} \right)^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}} P_{R(\boldsymbol{U}_n)} \boldsymbol{a}_j = 0 \tag{16}$$

记 $P_{R(P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{A}_{S_1})} = P_{R(\boldsymbol{U}_n)} \boldsymbol{A}_{S_1} \left(\boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}} P_{R(\boldsymbol{U}_n)} \boldsymbol{A}_{S_1} \right)^{-1} \boldsymbol{A}_{S_1}^{\mathrm{T}} \cdot P_{R(\boldsymbol{U}_n)}$ ，于是式(16)等价于

$$\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \left(P_{R(\boldsymbol{U}_n)} - P_{R(P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{A}_{S_1})} \right) \boldsymbol{a}_j = 0 \tag{17}$$

这表明剩余支撑原子a_j与修正的噪声子空间投影算子$P_{R(\boldsymbol{U}_n)} - P_{R(P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{A}_{S_1})}$正交。与MUSIC算法一致，式(17)相当于给出了一种修正的MUSIC谱函数：

$$h_j = \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \left(P_{R(\boldsymbol{U}_n)} - P_{R(P_{R(\boldsymbol{U}_n)}\boldsymbol{A}_{S_1})} \right) \boldsymbol{a}_j \tag{18}$$

于是可将支撑集分为不相交的两部分S_1和S_2，$|S_1| = q \in [K-L, L-1]$，对于S_1采用式(8)所示的谱函数并保留q个最小谱值恢复，对S_2则采用式(18)所示谱函数并保留$K-q$个最小谱值恢复，最后估计支撑集则是$S_1 \cup S_2$，将这一方法记为修正的MUSIC算法(MMUSIC)，算法过程如下：

输入：观测信号矩阵$\boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^{M\times L}$，观测矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{M\times N}$，稀疏度$K$，参数$q \in [K-L, L-1]$。

步骤1　计算观测信号自相关矩阵$\widehat{\boldsymbol{R}_{yy}} = \dfrac{1}{L}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$，并对其特征分解，求取噪声子空间$\boldsymbol{U}_n$；

步骤2　如果$K \le L$，按MUSIC算法获取估计支撑集$\widehat{S}$；否则按式(8)计算MUSIC谱值并保留q个最小谱值对应的坐标集S_1，按式(18)计算修正的MUSIC谱值并保留$K-q$个最小谱值对应的坐标集S_2；

步骤3　得到估计支撑集$\widehat{S} = S_1 \cup S_2$。

输出：估计支撑集$\widehat{S}$。

从式(7)和式(17)容易发现q的取值应使支撑原子对应谱值最小，可定义式(19)的累积谱函数$F(q)$来说明q值选取对于重构质量的影响：

$$F(q) = \sum_{i\in S_1} f_i + \sum_{j\in S_2} h_j \tag{19}$$

从理论上，$F(q)$值越小则q越恰当。

4　仿真实验

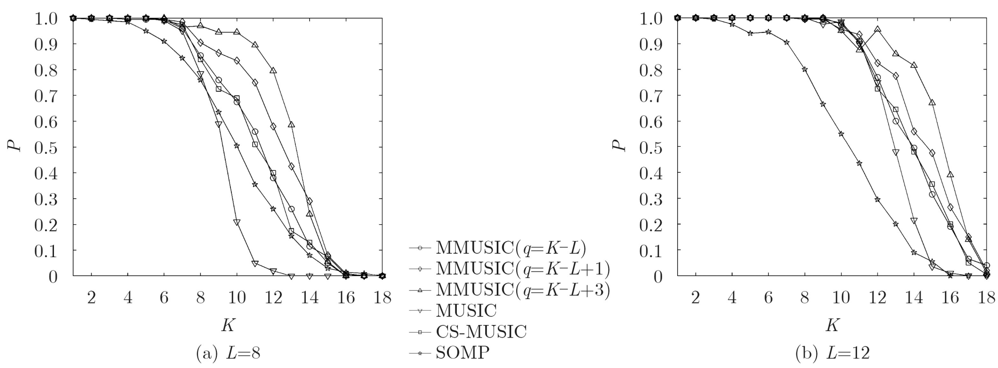
为说明所提算法有效性，利用Matlab工具进行仿真实验。实验中测试信号矩阵和观测矩阵元素均服从高斯随机分布，每次实验均独立重复进行200次，CS-MUSIC算法采用SOMP算法恢复S_1。这里定义信噪比为

$$\mathrm{SNR} = 10\lg \frac{\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{F}}^2}{\|\boldsymbol{N}\|_{\mathrm{F}}^2} \tag{20}$$

定义重构概率P为多次重复实验中支撑集100%恢复情形的出现频率。为便于与CS-MUSIC算法对比，实验参数信号长度N、观测数M、信噪比SNR参照文献[14]。

图1是测试各算法在快拍数分别为$L=8$和$L=12$时的重构概率P与稀疏度K的关系，信号长度$N=200$，观测数$M=30$，信噪比$\mathrm{SNR}=20$ dB。可以发现，当$K \le L$时，因为CS-MUSIC算法和MMUSIC算法均采用MUSIC算法恢复信号，所以这3种算法重构概率一致，并且均优于SOMP算法，且当快拍数增多时，这种优势更加明显；但当$K > L$时，MUSIC算法重构性能急剧下降，甚至低于SOMP算法，而所提MMUSIC算法和CS-MUSIC算法仍优于SOMP算法。当$q = K-L$时，MMUSIC算法与CS-MUSIC算法性能相近；当$q = K-L+1$和$q = K-L+3$时其性能将明显优于CS-MUSIC算法。

图2表示在稀疏度分别为$K=10$和$K=14$时各算法重构概率P与观测数M的关系，信号长度$N=200$，快拍数$L=8$，信噪比$\mathrm{SNR}=20$ dB。可以发现，当快拍数过少($L<K$)时，MUSIC算法重构概率最低，在$K=14$时几乎无法重构原信号。从图2(a)可以看到，在观测数较少时($M\le 35$)，CS-MUSIC算法和MMUSIC算法重构概率高于SOMP算法，但当$M>35$时，CS-MUSIC算法重构概率将低于SOMP算法，而$q>K-L$情况下的

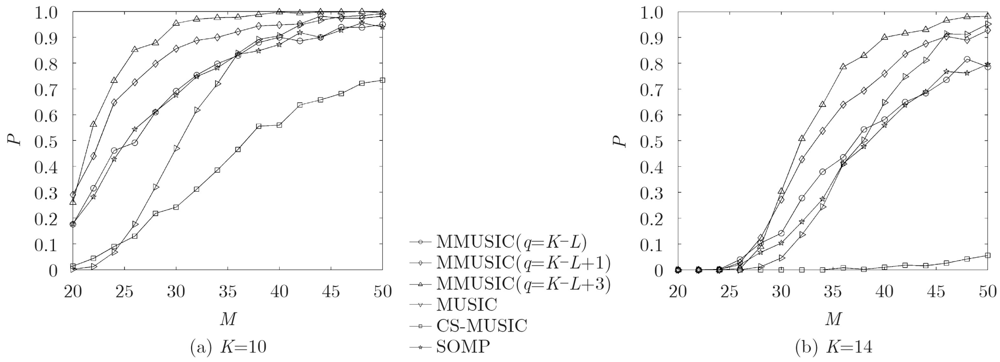


(a) L=8　(b) L=12

图1 各算法重构概率P与稀疏度K的关系

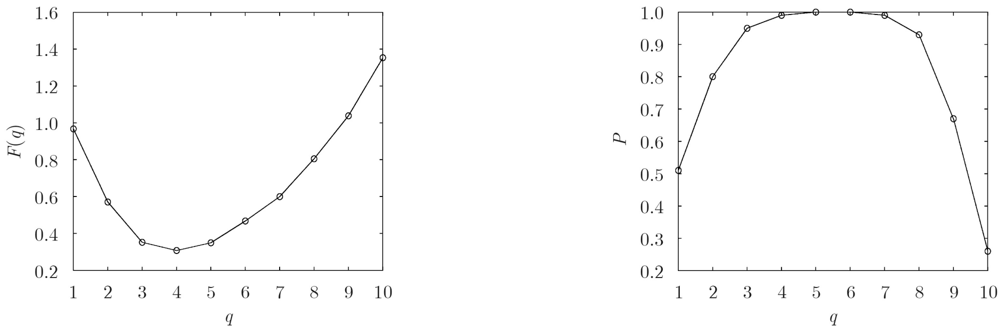
MMUSIC算法重构概率则在各种观测数条件下几乎均高于CS-MUSIC算法，这种性能优势在观测数较少时更加明显。从图2(b)，当$K-L$增大($K=14$)情况下，$q=K-L+3$时的MMUSIC算法仍能保持对SOMP算法的性能优势。

图3呈现了q值选取对MMUSIC算法重构质量的影响，信号长度$N=200$，稀疏度$K=10$，快拍数$L=8$，观测数$M=30$，信噪比$\mathrm{SNR}=40$ dB。可以发现，当$q=K-L=2$时，累积谱函数值$F(q)$仍较大，重构概率相对较低；当$3\le q\le 7$，累积函数$F(q)$值相对较小，且重构概率大于$q=2$的情况，而在$q=2$时MMUSIC算法重构概率与CS-MUSIC算法相当，这进一步说明扩展版本的MMUSIC算法相对于CS-MUSIC算法的优越性。从图3(b)易知，当$q\in[K-L,L-1]$时MMUSIC算法具有最小的累积谱函数和最大的重构概率。



(a) K=10 (b) K=14

图 2 重构概率P与观测数M的关系



(a) 累积谱函数 $F(q)$与 q 值的关系 (b) 重构概率 P 与 q 值的关系

图 3 q值选取对MMUSIC算法重构性能的影响

5 结束语

本文将CS-MUSIC算法的适用情形从$q=K-L$扩展至$KL\ge q\ge L-1$，提出MMUSIC算法并给出了理论推导。仿真实验显示MMUSIC能够有效克服快拍数不足的情况，并且当$q>K-L$时其重构性能在相同稀疏度和观测数条件下优于CS-MUSIC算法和SOMP算法。信号稀疏情况、观测数、快拍数、信噪比等均是影响MUSIC类算法重构性能的因素，从理论上量化这些因素对算法重构质量的影响将是未来的研究方向。

参 考 文 献

[1] CANDÈS E J and TAO T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(12): 5406–5425. doi: 10.1109/TIT.2006.885507.

[2] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306. doi: 10.1109/TIT.2006.871582.

[3] CANDÉS E J, ROMBERG J, and TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 53(2): 489–509. doi: 10.1109/TIT.2005.862083.

[4] BLANCHARD J D, CERMAK M, HANLE D, *et al*. Greedy algorithms for joint sparse recovery[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(7): 1694–1704. doi: 10.1109/TSP.2014.2301980.

[5] CHOI J W, SHIM B, and DING Y. Compressed sensing for wireless communications: Useful tips and tricks[J]. *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, 2017, 19(3): 1527–1550. doi: 10.1109/COMST.2017.2664421.

[6] GUO Jie, SONG Bin, and HE Ying. A survey on

compressed sensing in vehicular infotainment systems[J]. *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, 2017, 19(4): 2662–2680. doi: 10.1109/COMST.2017.2705027.

[7] YANG Lin, SONG Kun, and SIU Yunming. Iterative clipping noise recovery of ofdm signals based on compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2017, 63(4): 706–713. doi: 10.1109/TBC.2017.2669641.

[8] DU Zhaohui, CHEN Xuefeng, ZHANG Han, *et al*. Compressed-Sensing-based periodic impulsive feature detection for wind turbine systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2017, 12(6): 2933–2945. doi: 10.1109/TII.2017.2666840.

[9] WU Kai and LIU Jing. Learning large-scale fuzzy cognitive maps based on compressed sensing and application in reconstructing gene regulatory networks[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, 25(6): 1546–1560. doi: 10.1109/TFUZZ.2017.2741444.

[10] 石要武, 陈淼, 单泽涛, 等. 基于特征空间MUSIC算法的相干信号波达方向空间平滑估计[J]. 吉林大学学报(工学版), 2017, 47(1): 268–273. doi: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb201701039.

SHI Yaowu, CHEN Miao, SHAN Zetao, *et al*. Spatial smoothing technique for coherent signal DOA estimation based on eigen space MUSIC algorithm[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2017, 47(1): 268–273. doi: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb201701039.

[11] COTTER S F, RAO B D, ENGAN K, *et al*. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors[J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2477–2488. doi: 10.1109/TSP.2005.849172.

[12] BRESLER Y. Spectrum-blind sampling and compressive sensing for continuous-index signals[C]. Information Theory and Applications Workshop, San Diego, USA, 2008: 547–554. doi: 10.1109/ITA.2008.4601017.

[13] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: 10.1109/TAP.1986.1143830.

[14] KIM J M, LEE O K, and YE J C. Compressive MUSIC: revisiting the link between compressive sensing and array signal processing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(1): 278–301. doi: 10.1109/TIT.2011.2171529.

[15] 吕志丰, 雷宏. 基于差值映射的压缩感知MUSIC算法[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(8): 1874–1878. doi: 10.11999/JEIT141542.

LÜ Zhifeng and LEI Hong. Compressive sensing MUSIC algorithm based on difference map[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(8): 1874–1878. doi: 10.11999/JEIT141542.

[16] TROPP J A. Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part II: convex relaxation[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(3): 589–602. doi: 10.1109/TSP.2016.2637314.

[17] WIPF D P and RAO B D. An empirical Bayesian strategy for solving the simultaneous sparse approximation problem[J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3704–3716. doi: 10.1109/TSP.2007.894265.

[18] BARANIUK R G, CEVHER V, DUARTE M F, *et al*. Model-based compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(4): 1982–2001. doi: 10.1109/TIT.2010.2040894.

林 云：男，1968年生，副教授，研究方向为压缩感知、自适应滤波算法.

胡 强：男，1993年生，硕士生，研究方向为压缩感知.