基于分段凿孔的极化码级联方案

曹 阳[①②] 张 晗[*①] 涂巧玲[①] 李小红[①] 彭小峰[①]
[①](重庆理工大学电气与电子工程学院 重庆 400054)
[②](电子科技大学物理电子学院 成都 611731)

摘 要：极化码拥有出色的纠错性能，但编码方式决定了其码长不够灵活，需要通过凿孔构造码长可变的极化码。该文引入矩阵极化率来衡量凿孔对极化码性能的影响，选择矩阵极化率最大的码字作为最佳凿孔模式。对极化码的码字进行分段，有效减小了最佳凿孔模式的搜索运算量。由于各分段的第1个码字都会被凿除，且串行抵消译码过程中主要发生1位错，因此在各段段首级联奇偶校验码作为译码提前终止标志，检测前段码字的译码错误并进行重新译码。对所提方法在串行抵消译码下的性能进行仿真分析，结果表明，相比传统凿孔方法，所提方法在10^{-3}误码率时能获得约0.7 dB的编码增益，有效提升了凿孔极化码的译码性能。

关键词：极化码；串行抵消译码；凿孔；奇偶校验码；误码率

中图分类号：TN911.22 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2018)08-1941-08

DOI: 10.11999/JEIT171113

Concatenated Polar Codes Scheme Based on Segmented Puncturing

CAO Yang[①②] ZHANG Han[①] TU Qiaoling[①] LI Xiaohong[①] PENG Xiaofeng[①]
[①](*School of Electrical and Electronic Engineering*, *Chongqing University of Technology*, *Chongqing* 400054, *China*)
[②](*School of Physical Electronics*, *University of Electronic Science and Technology of China*, *Chengdu* 611731, *China*)

Abstract: Polar codes have outstanding error correction performance, but the code length of conventional polar codes is not compatible because of their coding method. To construct rate-compatible polar codes, a segmented puncturing method is proposed. Using the rate of polarization, the puncturing effect is measured and the codeword is removed to make the largest rate of polarization, which is the optimal puncturing mode. As the first codeword of the optimal puncturing mode is 0, the parity check codes are introduced to detect the decoding error of preceding segments codeword. The decoding performance of the method is simulated, results show that this method can obtain about 0.7 dB coding gain at 10^{-3} bit error rate compared with the traditional puncturing method, which can effectively improve the performance of the punctured polar codes.

Key words: Polar codes; Successive cancellation decoding; Puncturing; Parity check codes; Bit error rate

1 引言

极化码作为近年来提出的一种新型信道编码方案，是唯一一类数学可证明的能够达到香农容量限的纠错码[1–3]。极化码适用于任意的二进制离散无记忆信道，且在加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道上表现较好[4]。极化码拥有出色的纠错能力，级联CRC的极化码在串行抵消序列(Successive Cancellation List, SCL)译码下能获得优于LDPC和Turbo码的性能[5]，因此极化码被确定为5G控制信道的场景编码方案[6]。

极化码的码长不够灵活，只能是m^n，但在实际应用中，需要传输的码字长度不一定都是m^n，因此需要通过凿孔来构造码长可变的极化码[7,8]，同时要保证凿孔造成的性能损失在可接受的范围内。文献[9]首先提出了凿孔极化码，并提供了随机

收稿日期：2017-11-27；改回日期：2018-04-18；网络出版：2018-05-30
*通信作者： 张晗 446252177@qq.com
基金项目：国家自然科学基金(61205106)，中国博士后科学基金(2014M552329)，重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500934, KJ120827)，重庆市科委社会事业与民生保障科技创新专项(cstc2017shmsA40019)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61205106), China Postdoctoral Science Foundation (2014M552329), The Science and Technology Project Affiliated to the Education Department of Chongqing Municipality (KJ1500934, KJ120827), Chongqing Municipal Science and Technology Commission's Special Project (cstc2017shmsA40019)

凿孔和停止树凿孔两种基本凿孔方案。文献[10]研究了灾难凿孔模式，灾难凿孔模式会造成译码性能的损失，使用穷举搜索来避免出现灾难模式，提高凿孔极化码的译码性能。文献[11]提出了准均匀凿孔算法，通过比特翻转使凿孔比特准均匀分布，该方法简单易行，但译码性能仍有提升空间。文献[12]利用生成矩阵来寻找凿孔模式，凿除生成矩阵中重量为1的列和对应的行，再将凿孔码字的对数似然比设为无穷大，该方法易于操作，且译码性能较好。

上述凿孔方法主要针对少量凿孔比特的情况，当凿孔比特数变多时，译码性能损失可能较大。据此，本文提出了凿孔-奇偶校验(Puncturing Parity Check Assisted, PPCA)算法，引入矩阵极化率来衡量凿孔造成的性能损失，最大矩阵极化率对应的凿孔模式即是最佳凿孔模式。对码长较长的极化码进行分段，有效减少了最佳凿孔模式的搜索运算量。在极化码的串行抵消(Successive Cancellation, SC)译码过程中，信道噪声和前面码字判定出错产生的误差传播是导致整个码字判定出错的主要原因，及时发现并纠正译码错误能够显著提升SC译码性能。因此在每段的第1个被凿除码字位置级联奇偶校验码，对前段码字的译码结果进行校验，若前段码字发生译码错误，则重新发送该段码字并重新译码。对PPCA算法在SC译码下的平均复杂度公式进行了推导，分析公式可知，PPCA-SC的译码复杂度小于SCL译码。与传统的凿孔方法相比，本文所提方法可以有效地提升极化码在SC译码下的译码性能。

2 串行抵消译码算法

极化码的译码方法主要有串行抵消译码和置信传播(Belief Propagation, BP)译码两种。由于采用BP译码时依赖信道情况来获得节点的最优更新策略，而极化码存在大量短环，所以一般情况下BP译码的性能不够理想。本文使用SC译码来验证的凿孔模式性能。SC译码按照顺序计算对数似然比λ_{u_i}，并根据估计值对比特u_i进行判定。

$$\hat{u}_i = \begin{cases} 0, & \lambda_{u_i} \ge 0 \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \tag{1}$$

式中，$1 \le i \le N$为码字编号。λ_{u_i}为对数似然比(Log Like-hood Ratio, LLR)，定义为

$$\lambda_{u_i} = \frac{\Pr\left(y, \hat{u}_1^{i-1} \middle| \hat{u}_i = 0\right)}{\Pr\left(y, \hat{u}_1^{i-1} \middle| \hat{u}_i = 1\right)} \tag{2}$$

λ_{u_i}可以通过最小和(Min-Sum, MS)近似算法经过递归计算得到，式(3)中的sign表示符号函数。

$$\begin{aligned} \lambda_{u_0} &= f(\lambda_{u_0},\ \lambda_{u_1}) \\ &= \operatorname{sign}(\lambda_{u_0})\operatorname{sign}(\lambda_{u_1})\min(|\lambda_{u_0}|, |\lambda_{u_1}|) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\lambda_{u_1} = g(\lambda_{u_0}, \lambda_{u_1}, \hat{u}_0) = \begin{cases} \lambda_{u_0} + \lambda_{u_1}, & \hat{u}_0 = 0 \\ -\lambda_{u_0} + \lambda_{u_1}, & \hat{u}_0 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

3 极化码凿孔方法

3.1 矩阵极化率

定义一个$k \times k$矩阵$\boldsymbol{G} = \left[\boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{g}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$，数组$\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_k$代表矩阵的各行。部分距离$D_j$可以被定义为

$$\begin{aligned} &D_j \triangleq d_{\min}\left(\boldsymbol{g}_j, \left\langle \boldsymbol{g}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{g}_k \right\rangle\right), \quad j = 1, 2, \cdots, k-1, \\ &D_j \triangleq d_{\min}(\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{0}), \quad\ \ j = k \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{0}$代表零向量，矩阵$\boldsymbol{G}$的极化率$E(\boldsymbol{G})$可以被表示为[13]

$$E(\boldsymbol{G}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log_i^{D_i} \tag{6}$$

当k足够大时，通过生成矩阵$\boldsymbol{G}$构造的极化码在SC译码方式下的误块率(BLock Error Rate, BLER)的上界满足[14]

$$P_e \le 2^{-k^{E(\boldsymbol{G})}} \tag{7}$$

因此，矩阵极化率可以衡量经过凿孔后的极化码性能，极化率越大，译码性能越好。

3.2 分段凿孔方法

极化码分段凿孔-奇偶校验的编译码框图如图1所示，图中的u_1^N表示输入信息序列，$\hat{u}_1^N$表示估计码字。定义二进制数组$\boldsymbol{P}_{N,L} = [p_0, p_1, \cdots, p_{N-1}]$，其中$N$表示码长，$L$表示凿孔后的码长。数组中的0代表生成矩阵中被凿除的列的位置，则在数组$\boldsymbol{P}_{N,L}$中，有L个1，N–L个0。当码长较长时，最多可能有$\dfrac{N!}{(N-L)!L!}$种凿孔模式，通过穷举搜索的方法很难实现。为了解决这一问题，将极化码进行分段，把原码长N的极化码分成$N_1, N_2, \cdots, N_m$共m段，每段的长度相等，为$s = N/m$。极化码生成矩阵$\boldsymbol{G}_N = \boldsymbol{B}_N \boldsymbol{F}^{\otimes n}$可以被表示为$m$个$s \times s$子矩阵相乘的形式。

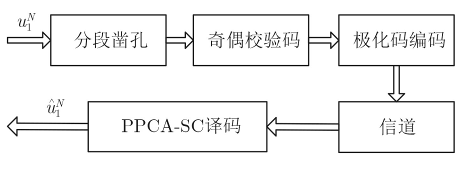

图 1 PPCA-SC编译码框图

$$\boldsymbol{G}_N = \boldsymbol{B}_N\left(\boldsymbol{G}_{N_1} \otimes \boldsymbol{G}_{N_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{G}_{N_m}\right) \tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{B}_N$表示$N \times N$的比特翻转矩阵，参考文献[15]，可以将式(8)改写为

$$\boldsymbol{G}_N = \left(\boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{G}_{N_m}\right)\boldsymbol{D}_N(\boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{G}_{N_{m-1}})\boldsymbol{D}_N \cdots \boldsymbol{D}_N(\boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{G}_{N_1}) \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{I}_m$表示$s \times s$的单位矩阵，$\boldsymbol{D}_N$表示转置矩阵，可以将数组$(a_0, a_1, \cdots, a_{N-1})$映射成式(10)：

$$\begin{aligned}&(a_0, a_1, \cdots, a_{N-1})\\ &\Rightarrow a_0, a_s, a_{2s}, \cdots, a_{(m-1)s},\\ &\quad a_1, a_{s+1}, a_{2s+1}, \cdots, a_{(m-1)s+1},\\ &\quad a_2, a_{s+2}, a_{2s+2}, \cdots, a_{(m-1)s+2},\\ &\quad \vdots\\ &\quad a_{s-1}, a_{2s-1}, a_{3s-1}, \cdots, a_{N-1}\end{aligned} \tag{10}$$

式(9)将矩阵$\boldsymbol{G}_N$对应的单次极化过程分解成了$\boldsymbol{G}_{N_1} \otimes \boldsymbol{G}_{N_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{G}_{N_m}$对应的$m$次极化过程。文献[14]中的定理17给出了$N$个子矩阵相乘得到的合成矩阵极化率表达式为

$$E\left(\boldsymbol{A}_1 \otimes \boldsymbol{A}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{A}_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{E(\boldsymbol{A}_i)}{\log_{l_i}^{l_1 l_2 \cdots l_N}} \tag{11}$$

由于比特翻转操作仅改变列的顺序，所以矩阵$\boldsymbol{G}_{N_1} \otimes \boldsymbol{G}_{N_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{G}_{N_m}$在比特翻转前后的极化率相同，而各个子矩阵的行列数相等，都为s，因此原始矩阵的极化率可以被表示为

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{G}_N) &= E(\boldsymbol{G}_{N_1} \otimes \boldsymbol{G}_{N_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{G}_{N_m})\\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{E(\boldsymbol{G}_{N_i})}{\log_s^{s^m}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E(\boldsymbol{G}_{N_i})\end{aligned} \tag{12}$$

由式(12)可知，若各子矩阵极化率最大，原始矩阵极化率也为最大。在$\boldsymbol{G}_N$中寻找最大极化率的问题被转化成了在$\boldsymbol{G}_{N_1}, \boldsymbol{G}_{N_2}, \cdots, \boldsymbol{G}_{N_m}$中寻找最大极化率的问题。由于分解后的子矩阵的行列数较小，穷举搜索的运算量在接受范围内。

当每段的长度为32时，选择最佳凿孔模式最多需要搜索$\dfrac{32!}{16!16!}$次，最大搜索次数约为6×10^8，难以实现，所以将最大分段长度s设定为16。分段长度也不宜过小，因为当分段长度很小的时候(如分段长度为2)，此时分段凿孔的每段最多含有1个冻结位，根据文中的凿孔位置选择方法，此时的凿孔模式为$\boldsymbol{P}_{2,1} = [01]$，分段凿孔变成了文献[11]中的准均匀凿孔，但文献[11]中的准均匀凿孔极化码的译码性能仍有提升空间，因此较小的各段码长构造的分段凿孔极化码译码性能不够优秀，分段数至少应该为4，所以PPCA的分段长度s可能的取值为4, 8, 16。

分段长度s与分段数m存在乘积为定值的关系，因此缩短s会增大m。PPCA需要在分段凿孔处级联奇偶校验码，更短的分段长度有助于及时纠错，但级联奇偶校验码会导致码率上升，从而降低PPCA构造码字的纠错性能，故需要权衡码率和分段数来选择各个分段的长度。对此，表1给出4, 8, 16的3种分段长度的PPCA构造的凿孔极化码在SC译码下的译码性能增益比较，原始码率R=0.5, PPCA的码率R=4/7。设分段长度s=4的译码性能增益为0，其他分段长度下的增益为正表示该分段长度相比s=4的译码性能较好，反之表示译码性能较差，选择增益最大的s作为该码长下的最优分段长度。表1同时给出了不同码长N下的最优分段长度s和对应分段长度m。

表 1　不同分段码长s的译码性能增益比较

码长N	E_b/N_0(dB)					
	32	64	128	256	512	1024
s=4	0	0	0	0	0	0
s=8	0.012	0.036	0.091	0.108	0.138	0.159
s=16	–0.107	–0.043	0.055	0.118	0.188	0.233
最优s	8	8	8	16	16	16
对应m	4	8	16	16	32	64

对于各段凿孔后的剩余码字长度，首先假定极化码的码长$N = 2^n$，凿孔后码长为L，满足$2^{n-1} < L < 2^n$，否则可以从码长为2^{n-1}的极化码中得到凿孔极化码。剩余码长L的分配方法为准均匀分配，当L刚好是分段数的倍数时，各分段分配的剩余码字个数相等，否则设定两种剩余码长L_1和L_2分配到各个分段中，L_1为较短分段剩余码长，L_2为较长分段剩余码长，两者相差1。凿孔后各分段剩余码长的分配方法如表2所示。

表2中的$\lfloor\cdot\rfloor$表示向下取整，$\lceil\cdot\rceil$表示向上取整。以$N = 32$, $L = 22$的极化码(32,22)为例，分段数

表 2　剩余码长分配方法

算法1：剩余码长分配方法

输入： N, L, m, s

输出： L_1, L_2, n_1, n_2

(1) 定义L_1, L_2为各分段中较短与较长的分段剩余码长；

(2) 定义$n_{\min}$, $n_{\max}$为分段剩余码长为L_1, L_2的分段个数；

(3) 较短分段剩余码长L_1=$\left\lfloor \dfrac{sL}{N} \right\rfloor$，较长分段剩余码长$L_2$=$\left\lceil \dfrac{sL}{N} \right\rceil$；

(4) n_1与n_2的比值为：$\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{mL_2 - L}{L - mL_1}$；

(5) L_1的个数$n_1 = \dfrac{mL_2 - L}{L_2 - L_1}$, $L_{\max}$的个数$n_2 = \dfrac{L - mL_1}{L_2 - L_1}$。

$m=4,\quad L_1=\left\lfloor\dfrac{8\times 22}{32}\right\rfloor=5,\quad L_2=\left\lceil\dfrac{8\times 22}{32}\right\rceil=6,$ $\boldsymbol{P}_{8,5}$的个数为2，$\boldsymbol{P}_{8,6}$的个数为2。按照$\boldsymbol{P}_{8,5}$在前，$\boldsymbol{P}_{8,6}$在后的顺序排列，构成分段凿孔码字$\boldsymbol{P}_{32,22}=\left[\boldsymbol{P}_{8,5}\boldsymbol{P}_{8,5}\boldsymbol{P}_{8,6}\boldsymbol{P}_{8,6}\right]$。

使用文献[16]提供的方法凿除生成矩阵中对应的行，从而获得$L\times L$的方阵，通过计算矩阵极化率$E(\boldsymbol{G})$寻找分段最佳凿孔模式$\boldsymbol{P}_{s,L}$，由3.1节可知，最大矩阵极化率对应的凿孔模式即是最佳凿孔模式。表3和表4分别给出了码长为$s=8$和码长$s=16$时不同L值对应的最佳凿孔模式$\boldsymbol{P}_{s,L}$。

表 3 N=8对应的最佳凿孔模式

L	$E_{\max}(\boldsymbol{G})$	$\boldsymbol{P}_{8,L}$
7	0.6008	01111111
6	0.6022	01111110
5	0.5949	00011111

表 4 N=16对应的最佳凿孔模式

L	$E_{\max}(\boldsymbol{G})$	$\boldsymbol{P}_{16,L}$
15	0.5445	0111111111111111
14	0.5635	0111111111111110
13	0.5616	0111111111111100
12	0.5654	0111111111111000
11	0.5764	0111111011111000
10	0.5794	0111111011101000
9	0.5582	0111011011101000

由表3可以看出，$\boldsymbol{P}_{8,5}=[00011111]$，$\boldsymbol{P}_{8,6}=[01111110]$，因此极化码(32, 22)的最佳凿孔模式被表示为$\boldsymbol{P}_{32,22}$=[00011111000111110111111001111110]。结合表3，表4可以发现，每个分段的第1位都会被凿除，由于构造原因[1]，任意码长和信息位长度的极化码的第1个码字都对应极化后的最差信道。因此，最佳凿孔模式的第1位都会被优先凿除。

在极化码的SC译码中，信道噪声和前面码字判定出错产生的误差传播是导致整个码字判定出错的主要原因[17]。信道噪声一般只引起1位错，随着信噪比的增大，1位错的占比更大。图2给出了码长N=1024、码率R=0.5的极化码在SC译码下，因信道噪声产生的误码的相对频率大小，由于超过3位错的频率太小，所以图中忽略了3位以上的误码。从图2中可以看出，当信噪比$E_{\rm b}/N_0$=1.5 dB时，1位错和3位错出现的相对频率之和超过0.6，当信噪比$E_{\rm b}/N_0$=2.0 dB时，1位错和3位错出现的相对频率之和超过0.9，当信噪比E_b/N_0=2.5 dB时，1位错和3位错出现的相对频率之和超过0.98。

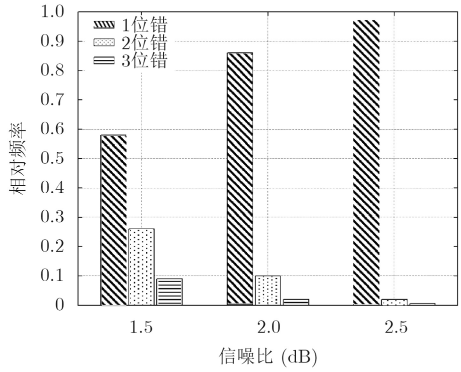

图 2 噪声引发的错误位数相对频率

通过上述分析可知，在SC译码过程中，1位错出现的频率较大。若能及时发现并纠正译码过程中出现的第1个错误，既能减小因信道噪声引入的误码率，也能防止误差传播带来更多错误。为了检验纠正1位错带来的译码性能提升，引入了文献[17]中的Oracle-Assisted SC译码算法，该算法能对译码过程中出现的1位误码进行及时修正，且修正次数最多只有1次。图3给出了码率R=0.5的极化码在Oracle-Assisted SC和SC译码下的误码率比较，由图3可以看出，及时发现并纠正1位错能够有效提升SC译码的译码性能。

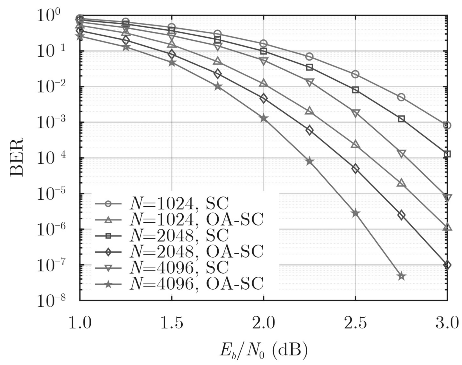

图 3 Oracle-Assisted SC与SC译码的误码率比较

奇偶校验可以检测出译码过程中发生的个数为奇数的错误，因此在极化码的凿孔位置级联奇偶校验码，检测SC译码过程中发生的1位错和3位错，提升凿孔极化码的译码性能。如图4，利用第2, 3, 4段的第1位被凿除的码字，级联奇偶校验码作为SC译码的截止标志，使用偶校验进行编码。根据式(1)，若校验位为0，则将该码字在译码端的对数似然比λ_u设为+∞，若校验位为1，则将其译码端的对数似然比λ_u设为−∞。

图5是PPCA-SC的译码过程，在第2段和第3段加入了奇偶校验码，当路径到达第2段第1个码字位

置时，进行奇偶校验，第1段通过了第1次奇偶校验，译码器继续向下进行译码。对第2段同样进行奇偶校验，第1次奇偶校验未通过，再次发送第2段码字并进行重复译码，译码完成后进行第2次奇偶校验，第2次奇偶校验通过，继续向下译码。PPCA-SC译码算法除了奇偶校验之外，其他部分与第2节描述的SC译码相同。

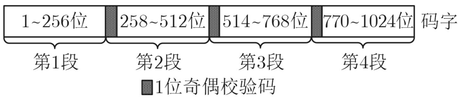

图 4 加入分段奇偶校验码示意图

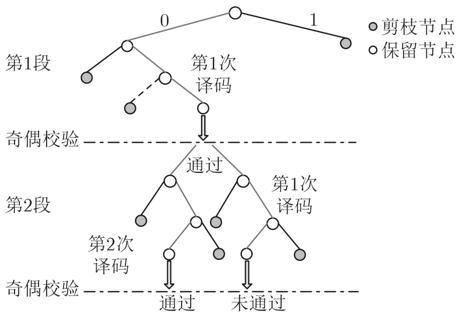

图 5 PPCA-SC译码过程

3.3 译码复杂度分析

PPCA-SC的平均译码复杂度与误码率P_e以及出现奇数个错误的概率$E_{\rm odd}$有关，由图2和3.2节的分析可知，高于3位出错的频率可忽略，故可以用$E_{1,3}$来表示奇数个位出错的概率。选择执行奇偶校验$m-1$段中的任意一段进行译码次数的分析。用事件$\mathbf{A}$表示该段不进行重复译码，用事件$\bar{\mathbf{A}}$表示该段进行重复译码。导致事件$\mathbf{A}$发生的可能性有两种。第1类是该段译码未发生错误，用事件$\mathbf{C}$表示，第1类事件发生的概率$P(\mathbf{C})=1-P_e$。第2类是该段译码发生了错误，但出现错误的个数为偶数，通过了奇偶校验，用事件$\mathbf{D}$表示，第2类事件发生的概率$P(\mathbf{D})=P_e(1-E_{1,3})$，该段不进行重复译码的概率为

$$P(\mathbf{A})=P(\mathbf{C})+P(\mathbf{D})=[(1-P_e)+P_e(1-E_{1,3})] \quad (13)$$

导致事件$\bar{\mathbf{A}}$发生的可能性只有一种，即该段译码发生了错误，且出现错误的个数为奇数，未能通过奇偶校验，该段进行重复译码的概率可以表示为

$$P\left(\bar{\mathbf{A}}\right)=P_eE_{1,3}=P_{\rm sed} \quad (14)$$

该段重复译码次数为n的概率为

$$P(\boldsymbol{R}_n)=P(\mathbf{A})P\left(\bar{\mathbf{A}}\right)^n=P_{\rm sed}^n\,[(1-P_e)+P_e(1-E_{1,3})]\,,n\in(0,T) \quad (15)$$

该段的平均重复次数$E(\boldsymbol{R})$可以被表示为

$$E(\boldsymbol{R})=\sum_0^T nP(\boldsymbol{R}_n)=\sum_0^T nP_{\rm sed}^n\,[(1-P_e)+P_e(1-E_{1,3})] \quad (16)$$

对式(16)进行错位相减操作

$$E(\boldsymbol{R})=\frac{1}{1-P_{\rm sed}}\left[\frac{P_{\rm sed}\left(1-P_{\rm sed}^{T-1}\right)}{1-P_{\rm sed}}-P_{\rm sed}^T\right]\cdot[(1-P_e)+P_e(1-E_{1,3})] \quad (17)$$

PPCA-SC译码时要进行$m-1$次奇偶校验，所以平均译码次数可以被表示为

$$T_{\rm ave}=1+\frac{m-1}{(1-P_{\rm sed})m}\left[\frac{P_{\rm sed}(1-P_{\rm sed}^{T-1})}{1-P_{\rm sed}}-P_{\rm sed}^T\right]\cdot[(1-P_e)+P_e(1-E_{1,3})] \quad (18)$$

因此PPCA-SC的时间复杂度为$O(T_{\rm ave}N\log N)$，由上述分析可知，PPCA-SC的复杂度与极化码码长N，码率R，分段数m，重复译码次数上限T和信道信噪比都有关。

表5给出了码长N为1024，码率R=1/2，分段数m=64，最大重复次数T=5的PPCA-SC在不同信噪比的译码时间复杂度比较。可以看出，与SC译码相比，PPCA-SC在信噪比为1.5 dB时多约20%的译码复杂度，当信噪比增大时，PPCA-SC译码的复杂度逐渐降低，当信噪比为2.5 dB时，PPCA-SC译码复杂度接近SC译码。

表 5　PPCA-SC复杂度比较

信噪比(dB)	时间复杂度
1.5(PPCA-SC)	12275
2.0(PPCA-SC)	10858
2.5(PPCA-SC)	10360
SC	10240

表6是N分别为1024, 512, 256, R=1/2, T=5的PPCA-SC在信噪比为1.5 dB时的平均重复译码次数比较，可以看出，码长较短时，重复译码次数较多，码长较长时，重复译码次数较少。

表7给出了N=256, R=1/2时不同重复译码次数上限T对PPCA-SC的影响，当信噪比为1.5 dB时，PPCA-SC在T=4时比T=2多约40%的译码复杂度。当信噪比增大时，T对PPCA-SC的译码复杂度的影响较小。

表8是N=256, R=1/2的极化码，在重复译码次数上限T=4而分段数不同的PPCA-SC时的译码

表 6 PPCA-SC平均重复译码次数比较

码长	平均重复译码次数
256	0.72
512	0.47
1024	0.20

表 7 最大重复次数对PPCA-SC复杂度的影响

信噪比(dB)	最大重复次数	时间复杂度
1.5	4	3522
	2	2527
2.0	4	2486
	2	2331
2.5	4	2126
	2	2107

表 8 分段数对PPCA-SC复杂度的影响

信噪比(dB)	分段数	时间复杂度
1.5	16	3522
	8	3424
2.0	16	2466
	8	2338
2.5	16	2126
	8	2121

复杂度比较，可以看出，分段数越多，译码复杂度越大，但m的值较大时，m值对译码复杂度的影响不大。

综合上述分析可知，与SCL译码复杂度随着搜索序列数L呈线性增长不同，PPCA-SC的译码复杂度受多个因素影响，且译码复杂度始终较低。

4 仿真与分析

在AWGN信道，选择原始码率R=0.5的极化码，采用二进制相移键控(Binary Phase Shift Keying, BPSK)的方式对极化码进行调制。对极化码进行分段凿孔，在各个分段的第1个凿孔的位置级联奇偶校验码，通过高斯近似(Gaussian Approximation, GA)的方法决定信息位和冻结位的选取，完成PPCA极化码的构造，PPCA的码率为R=4/5。

设定原始码长N=1024, PPCA的重复译码次数上限T=4，T=8，分段数m=64构造的码字码率为R=4/5, SC译码下PPCA极化码、文献[12]中的极化码以及SCL译码下文献[10]中的极化码译码性能比较如图6所示，文献[10,12]中极化码的码长码率与PPCA极化码相同。从图中可以看出，当BER为

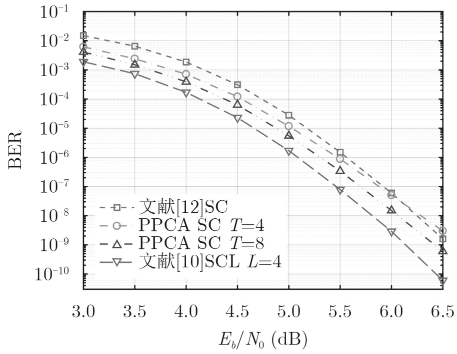

图 6 不同凿孔方法的误码率比较

10^{-4}时，PPCA(T=4)相比文献[12]获得了约0.2 dB的编码增益，当BER为10^{-8}时，PPCA (T=4)的译码性能与文献[12]基本持平，当BER继续增大时，PPCA(T=4)性能不及文献[12]。当BER为10^{-8}时，PPCA (T=8)相比文献[12]约能获得0.2 dB的编码增益，优于PPCA(T=4)的译码性能。因此增大重复译码次数上限T可以改善PPCA-SC在高信噪比区间的译码性能。对比文献[10]中极化码在SCL译码下的性能，PPCA(T=8)在BER为10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}时都只损失了约0.3 dB的译码性能，即最大重复次数T较大时，PPCA-SC能获得接近SCL的译码性能。

图7是码长N=256，码率R=0.5，分段数m=64的PPCA-SC与SC, SCL的译码时间复杂度比较。从图中可以看出，PPCA-SC(T=8)的时间复杂度约为O(3687)，是SCL译码的时间复杂度O(8192)的45%。当信噪比增大时，PPCA-SC的复杂度将会逐渐减小，相比SCL译码更有优势。结合表6、图6可知，当码长大于256时，PPCA-SC译码能以较小的译码复杂度来获得接近SCL译码的性能。

PPCA-SC与文献[12]和文献[16]的凿孔方法构造的极化码在误码率为10^{-3}时的相对编码增益如图8所示，极化码的原始码长N=1024，码率R=0.5, PPCA-SC的最大重复次数T=4，分段数m=64。横坐标L代表不同的剩余码长，纵坐标表示PPCA-

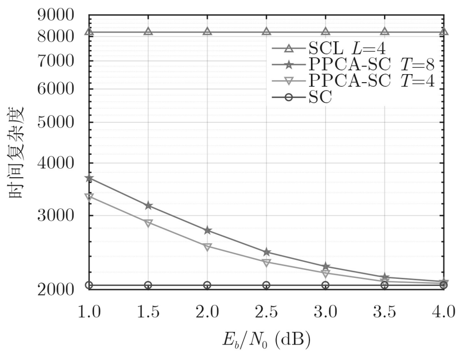

图 7 不同译码方法的时间复杂度比较

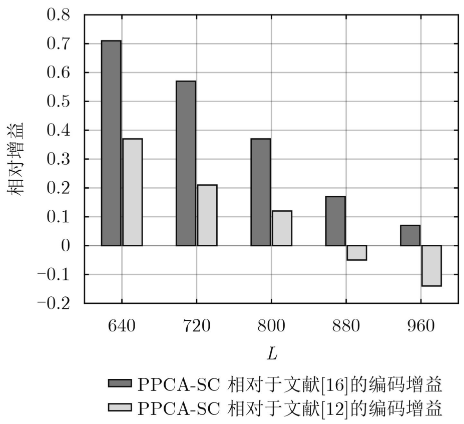

图 8 不同凿孔方法之间相对编码增益

SC相对文献[12,16]的编码增益。从图中可以看出，当剩余码长L=640时，PPCA-SC的编码增益最大，比文献[16]多约0.71 dB，比文献[12]多约0.37 dB。当L变大时，PPCA-SC的编码增益逐渐减小，当L=880时，PPCA-SC比文献[16]多0.16 dB的编码增益，比文献[12]的编码增益略小。而L=960时，PPCA-SC反而比文献[12]少0.14 dB的编码增益。在凿除码字较多时，PPCA-SC对凿孔造成的性能损失的改善效果比较好，而当凿除码字较少时，PPCA-SC对凿孔极化码的提升效果不够明显。

5　结论

针对极化码码长不够灵活和凿孔后极化码性能损失较大的问题，本文提出了基于分段凿孔和分段奇偶校验的PPCA算法。先将极化码码字进行分段，通过矩阵极化率确定每段的最佳凿孔方案。由于每个分段的第1个码字总是被优先凿除，在各段段首级联奇偶校验码来检测前段码字的译码结果，及时发现译码错误，降低误码率。仿真结果表明，PPCA-SC能有效提升凿孔极化码的译码性能，且译码复杂度较小。

参 考 文 献

[1] ARIKAN E and TELATAR E. On the rate of channel polarization[C]. 2009 IEEE International Symposium on Information Theory, Seoul, Korea, 2009: 1493–1495. doi: 10.1109/ISIT.2009.5205856.

[2] SASOGLU E, TELATAR E, and ARIKAN E. Polarization for arbitrary discrete memoryless channels[C]. IEEE Information Theory Workshop, Taormina, Italy, 2009: 144–148. doi: 10.1109/ITW.2009.5351487.

[3] VANGALA H, HONG Y, and VITERBO E. Efficient algorithms for systematic polar encoding[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(1): 17–20. doi: 10.1109/LCOMM.2015.2497220.

[4] TAHIR B and RUPP M. New construction and performance analysis of polar codes over AWGN channels[C]. 2017 24th International Conference on Telecommunications (ICT), Limassol, Cyprus, 2017: 1–4. doi: 10.1109/ICT.2017.7998250.

[5] NIU Kai and CHEN Kai. CRC-aided decoding of polar codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(10): 1668–1671. doi: 10.1109/LCOMM.2012.090312.121501.

[6] SHARMA A and SALIM M. Polar code: The channel code contender for 5G scenarios[C]. IEEE International Conference on Computer, Communications and Electronics, Jaipur, India, 2017: 676–682. doi: 10.1109/COMPTELIX.2017.8004055.

[7] CHANDESRIS L, SAVIN V, and DECLERCQ D. On puncturing strategies for polar codes[C]. IEEE International Conference on Communications Workshops, Paris, France, 2017: 766–771. doi: 10.1109/ICCW.2017.7962751.

[8] BIOGLIO V, GABRY F, and LAND I. Low-complexity puncturing and shortening of polar codes[C]. Wireless Communications and Networking Conference Workshops, San Francisco, USA, 2017: 1–6. doi: 10.1109/WCNCW.2017.7919040.

[9] ESLAMI A and PISHRO N. A practical approach to polar codes[C]. IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings, St. Petersburg, Russia, 2011: 16–20. doi: 10.1109/ISIT.2011.6033837.

[10] HONG S N, HUI D, and MARIĆ I. On the catastrophic puncturing patterns for finite-length polar codes[C]. Signals, Systems and Computers, 2016, Asilomar Conference, Pacific Grove, USA, 2017: 235–239. doi: 10.1109/ACSSC.2016.7869032.

[11] NIU Kai, CHEN Kai, and LIN Jiaru. Beyond turbo codes: Rate-compatible punctured polar codes[C]. IEEE International Conference on Communications, Pacific Grove, USA, 2013: 3423–3427. doi: 10.1109/ICC.2013.6655078.

[12] WANG Runxin and LIU Rongke. A novel puncturing scheme for polar codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18(12): 2081–2084. doi: 10.1109/LCOMM.2014.2364845.

[13] KORADA S B, ŞAŞOĞLU E, and URBANKE R. Polar codes: Characterization of exponent, bounds, and constructions[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(12): 6253–6264. doi: 10.1109/TIT.2010.2080990.

[14] LEE M K and YANG K. The exponent of a polarizing matrix constructed from the Kronecker product[J]. *Designs Codes & Cryptography*, 2014, 70(3): 313–322. doi: 10.1007/s10623-012-9689-z.

[15] SHIN D M, LIM S C, and YANG K. Mapping selection and code construction for 2.m-ary polar-coded modulation[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(6): 905–908. doi: 10.1109/LCOMM.2012.040912.120070.

[16] SHIN D M, LIM S C, and YANG K. Design of Length-compatible polar codes based on the reduction of polarizing matrices[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(7): 2593–2599. doi: 10.1109/TCOMM.2013.052013.120543.

[17] AFISIADIS O, BALATSOUKAS-STIMMING A, and BURG A. A low-complexity improved successive cancellation decoder for polar codes[C]. Signals, Systems and Computers, Asilomar Conference, Pacific Grove, USA, 2014: 2116–2120. doi: 10.1109/ACSSC.2014.7094848.

曹 阳：男，1977年生，教授，博士后，研究方向为自由空间光通信、信道编码等.

张 晗：男，1993年生，硕士生，研究方向为信道编码、自由空间光通信.

涂巧玲：女，1963年生，教授，研究方向为信道编码、无线传感网络等.

李小红：女，1996年生，硕士生，研究方向为自由空间光通信、信道编码.

彭小峰：男，1979年生，硕士，讲师，研究方向为自由空间光通信、嵌入式系统等.