

互质阵中基于降维求根的波达角估计算法

李建峰* 沈明威 蒋德富
(河海大学计算机与信息学院 南京 211100)

摘要: 该文提出互质阵中基于降维求根的波达角(DOA)估计算法。互质阵包含两个稀疏均匀线性子阵, 拥有互质的阵元间距和阵元数目。该算法基于子阵间的互协方差, 利用较长子阵中的旋转不变性扩展较短子阵的虚拟孔径。然后通过矩阵分块构造噪声子空间, 并将来自两个子阵的2维参数估计问题降维为1维求根问题, 获得自动配对的2维模糊参数估计。最后由这2维模糊参数可恢复出两组参数, 根据互质性从两组参数估计的交集中可以获得无模糊的高分辨率 DOA 估计。相比互质阵中的联合多重信号分类(MUSIC)算法和联合旋转不变技术(ESPRIT)算法, 该算法无需特征分解, 复杂度低, 但可获得更精确的 DOA 估计, 处理更多的信源, 并且对色噪声有更强的鲁棒性。多个仿真结果均验证了所提算法的有效性。

关键词: 波达角估计; 互质阵; 降维求根; 孔径扩展

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)08-1853-07

DOI: 10.11999/JEIT171087

Reduced-dimensional Root Finding Based Direction of Arrival Estimation for Coprime Array

LI Jianfeng SHEN Mingwei JIANG Defu

(College of Computer and Information, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract: A Direction of Arrival (DOA) estimation method based on reduced-dimensional polynomial root finding technique is proposed for coprime array. Coprime array has two uniform linear subarrays with coprime inter-element spacing and antenna number. Based on the cross covariance matrix of the subarrays, the proposed method exploits the rotational invariance within the longer subarray to extend the aperture of the shorter one. After constructing the noise subspace via matrix partition and reducing the two dimensional parameter estimation problem into one dimensional root finding, automatically paired two dimensional parameters can be estimated. Finally, unambiguous DOA is determined from the intersections of the two groups of estimations, which are generated from the previously obtained two dimensional parameters. In contrast to combined Multiple Signal Classification (MUSIC) and Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique (ESPRIT) for coprime array, the proposed algorithm achieves improved DOA estimation results and increased identifiable source number with reduced computation complexity. Furthermore, it is robust to spatial color noise. Multiple simulation results verify the effectiveness of the proposed approach.

Key words: DOA estimation; Coprime array; Reduced-dimensional root finding; Aperture extension

1 引言

作为阵列信号处理的一项重要任务, 波达角(Direction of Arrival, DOA)估计在多个领域有着广泛应用, 如雷达, 声呐, 移动通信等^[1-4]。迄今为止, 已经有很多有效的 DOA 估计算法, 如经典的

多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)方法^[5]及其改进方法^[6], 借助旋转不变技术的参数估计(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique, ESPRIT)方法^[7]及其广义形式^[8], 传播算子方法(Propagator Method, PM)^[9]以及 ESPRIT-PM 方法^[10]等。通过这些方法均可得到有效的 DOA 估计, 然而为了避免参数估计模糊问题, 他们全是采用阵元间距不大于半波长的紧凑型阵列, 所以获得 DOA 估计的分辨率有限, 并且因为较近的天线间距还会受到天线互耦的影响^[11], 使 DOA 估计性能进一步降低。

近年来, 稀疏阵列的设计和应用得到广泛关注,

收稿日期: 2017-11-20; 改回日期: 2018-04-18; 网络出版:

*通信作者: 李建峰 lijianfengt@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(61601167, 61771182), 中央高校基本科研业务费专项资金资助(2018B15914)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61601167, 61771182), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (2018B15914)

其中典型的如嵌套阵^[12], 其能获得远大于实际物理阵元数的自由度(Degrees of Freedom, DOF)^[13,14]。另外一种受到关注的就是互质阵^[15], 其采用存在互质关系的两个均匀线性子阵, 同样能生成较长的虚拟阵列, 而且相对于嵌套阵, 互质阵的阵元间距更加稀疏, 因此对互耦问题有更强的鲁棒性。关于互质阵的研究, 目前共有两个方向, 一个方向集中在虚拟阵列(co-array)域, 通过设计和改进互质阵, 从而产生较多的连续虚拟阵元^[16,17], 提高系统容量; 另一个研究方向则是利用较大的阵元间距以及互质阵子阵间的互质性进行无模糊高分辨率的 DOA 估计^[18-20], 本文的研究属于第2种方向。为了解决大阵元间距带来的 DOA 估计模糊问题, 文献[18]利用互质阵子阵间的互质性, 通过两个子阵 MUSIC 谱峰的交集获得了无模糊的 DOA 估计。文献[19]则在此基础上进行了改进, 其仅需要局部搜索即可恢复出所有的 MUSIC 谱峰, 然后再根据互质性解模糊。然而这两种方法均是对子阵进行分别处理, 因此在最终解模糊的时候, 多个 DOA 之间会存在干扰。为了避免这个问题以及 MUSIC 方法的谱峰搜索带来的高复杂度, ESPRIT 在文献[20]也被应用到了互质阵中, 两个子阵通过 ESPRIT 获得闭式模糊但自动配对的角度解, 然后再联合两个互质子阵进行解模糊。然而以上方法因为是利用子阵的结果交集进行解模糊, 所以较长子阵的 DOA 估计性能会被较短的子阵所影响, 并且最终的可辨识信源数也取决于较短子阵。此外, 以上方法均是基于数据完整协方差, 所以存在空间色噪声时, 性能会大受影响。

针对此本文提出了互质阵中基于降维求根的 DOA 估计算法。该算法基于互协方差, 增强了对色噪声的鲁棒性, 其首先利用较长子阵的旋转不变性对较短子阵进行阵列扩展, 然后无需特征分解, 通过矩阵分块构造出噪声子空间。之后通过降维求根方法对两个子阵的 2 维参数估计进行联合处理, 获得自动配对的两个模糊 DOA 估计。最后根据模糊解的均匀分布性获得两组 DOA 估计, 并从两组 DOA 估计的交集中可以获得最终无模糊的高分辨率 DOA 估计。相比于互质阵中的局部搜索 MUSIC 方法^[19]以及联合 ESPRIT 方法^[20], 所提算法复杂度低, DOA 估计结果更精确, 可处理信源数更多, 并且对空间色噪声有较强的鲁棒性。

符号说明: $(\cdot)^T$, $(\cdot)^H$ 以及 $(\cdot)^{-1}$ 分别表示矩阵转置、共轭转置、求逆; $E[\cdot]$ 表示求期望; $\text{diag}(\mathbf{v})$ 表示以矢量 \mathbf{v} 为对角元素构成一对角矩阵; $\text{diag}(\mathbf{M}, i)$ 表示取矩阵 \mathbf{M} 的第 i 条对角线上元素构成矢量; $\det(\cdot)$ 代表求行列式; \mathbf{I}_N 是 $N \times N$ 的单位矩阵; $\angle(\cdot)$ 是取相位; \sum 代表后面的矢量元素进行累加; $\min(M, N)$ 表示取两数中的最小值。

2 数据模型

图 1 给出了互质阵的阵列结构, 其由两个稀疏均匀线性子阵构成, 子阵 1 有 M 个阵元, 阵元间距为 Nd , 而子阵 2 有 N 个阵元, 其阵元间距为 Md , d 为单位间距, 一般为半波长, M 与 N 为互质的整数。假设空间存在 K 个远场信号从不同方向入射到该阵列, 则两个子阵的输出为^[18-20]

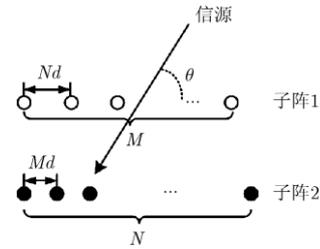


图 1 互质阵阵列结构

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_1(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_2(t) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1 \alpha_1, \mathbf{a}_1 \alpha_2, \dots, \mathbf{a}_1 \alpha_K]$ 和 $\mathbf{A}_2 = [\mathbf{a}_2 \beta_1, \mathbf{a}_2 \beta_2, \dots, \mathbf{a}_2 \beta_K]$ 分别表示子阵 1 和子阵 2 的方向矩阵, 其每一列对应一个 DOA 的导向矢量, 表示为 $\mathbf{a}_1 \alpha_k = [1, e^{-j\alpha_k}, \dots, e^{-j(M-1)\alpha_k}]^T$ 和 $\mathbf{a}_2 \beta_k = [1, e^{-j\beta_k}, \dots, e^{-j(N-1)\beta_k}]^T$, 其中 $\alpha_k = N\pi \sin \theta_k$, $\beta_k = M\pi \sin \theta_k$, θ_k 表示第 k 个信号的 DOA。 $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$ 表示基带信号。 $\mathbf{n}_1(t)$ 和 $\mathbf{n}_2(t)$ 表示各自阵列上的噪声。

由式(1)和式(2)可以看出虽然 DOA 是 1 维角度 θ , 但又定义了两个角度参量 α 和 β , 分别对应于子阵 1 和子阵 2 的方向矩阵。虽然他们都是取决于 θ , 但因为需要分别取得这两个参量的估计结果, 并进行结合得到无模糊的解, 所以在以下文中将其视作 2 维参数进行估计。

3 基于降维求根的 DOA 估计方法

3.1 孔径扩展

为了增强对空间色噪声的鲁棒性, 我们采用数据互协方差, 根据式(1), 式(2), 两个子阵之间的互协方差为

$$\mathbf{R}_c = E[\mathbf{x}_1(t) \mathbf{x}_2^H(t)] = \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_s \mathbf{A}_2^H \quad (3)$$

其中, $\mathbf{R}_s = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2)$ 为对角矩阵, 包含 K 个信号能量^[21,22]。

不失一般性, 假设 $N > M$, 这种情况下, 子阵 2 会比子阵 1 长(无论是孔径还是阵元数)。如果对两

个子阵分开处理，则子阵 1 在估计性能以及可处理信源数方面会拖累子阵 2。所以在这里，考虑先将子阵 1 进行孔径扩展。令 \mathbf{A}_{2a} 和 \mathbf{A}_{2b} 分别表示 \mathbf{A}_2 的前 $(N-1)$ 和后 $(N-1)$ 行。因为子阵 2 是均匀的，其方向矩阵存在旋转不变性^[20]

$$\mathbf{A}_{2a}\Phi_2 = \mathbf{A}_{2b} \quad (4)$$

其中， $\Phi_2 = \text{diag} \{e^{-j\beta_1}, e^{-j\beta_2}, \dots, e^{-j\beta_K}\}$ 为一对角矩阵，包含来自子阵 2 的 DOA 信息 β 。根据式(4)中的关系，如果把式(3)中的互协方差分为前 $(N-1)$ 和后 $(N-1)$ 列的话，那么这两块矩阵可表示为

$$\mathbf{R}_{ca} = \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_s \mathbf{A}_{2a}^H, \mathbf{R}_{cb} = \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_s \mathbf{A}_{2b}^H = \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_s \Phi_2^H \mathbf{A}_{2a}^H \quad (5)$$

参考文献[21,22]中 L 型阵列的配对方法，将式(5)中两块矩阵进行堆叠，得到一个增广互协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ca} \\ \mathbf{R}_{cb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 \Phi_2^H \end{bmatrix} \mathbf{R}_s \mathbf{A}_{2a}^H \quad (6)$$

所以通过式(6)，我们将子阵 1 进行了孔径扩展，由原来的子阵 1 扩展为了互相平行的两个子阵 1(方向矩阵为 $[\mathbf{A}_1^T, \Phi_2^* \mathbf{A}_1^T]^T$)。

3.2 2 维模糊参数估计

理想情况下，式(6)中的扩展互协方差矩阵 \mathbf{R}_z 的秩应该是 K ，所以如果对 \mathbf{R}_z 进行奇异值分解，那么其对应于最大 K 个奇异值的左奇异向量必定和 $[\mathbf{A}_1^T, \Phi_2^* \mathbf{A}_1^T]^T$ 的列张成相同的空间，那么剩下的 $(2M-K)$ 个左奇异向量必定正交于 $[\mathbf{A}_1^T, \Phi_2^* \mathbf{A}_1^T]^T$ ，然后可以以这些奇异向量为噪声子空间，构造 MUSIC 谱峰函数进行 DOA 估计。然而奇异值分解需要较高的复杂度，特别是在扩展孔径的情况下，复杂度会更高。这里采用一种简单的基于矩阵分块的方法来构造噪声子空间。

令 $\mathbf{R}_{z1} \in C^{K \times (N-1)}$ 表示 \mathbf{R}_z 的前 K 行，当来波方向不同时，其一般是行满秩的^[9]，构造矩阵：

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_{z1}^H \in C^{2M \times K} \quad (7)$$

则该矩阵是列满秩的，并且根据式(7)， \mathbf{P} 的列是 \mathbf{R}_z 的列的线性组合，而根据式(6)， \mathbf{R}_z 的列又是 $[\mathbf{A}_1^T, \Phi_2^* \mathbf{A}_1^T]^T$ 的列的线性组合，所以 \mathbf{P} 和 $[\mathbf{A}_1^T, \Phi_2^* \mathbf{A}_1^T]^T$ 张成相同的列空间。所以 DOA 估计的代价函数可以构造为

$$\min_{\alpha, \beta} f(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\alpha) \\ \mathbf{a}_1(\alpha) e^{j\beta} \end{bmatrix}^H \mathbf{Q}_n \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\alpha) \\ \mathbf{a}_1(\alpha) e^{j\beta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中， $\alpha = N\pi \sin \theta$ ， $\beta = M\pi \sin \theta$ ， $\mathbf{a}_1(\alpha) = [1, e^{-j\alpha}, \dots, e^{-j(M-1)\alpha}]^T$ ， $\mathbf{Q}_n = \mathbf{I}_{2M} - \mathbf{P} \mathbf{P}^H \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}^H$ 为

\mathbf{P} 的正交投影。为了降低复杂度，我们需要先将式(8)中的 2 维参数估计问题降维为 1 维参数估计问题，式(8)中的模型其实与文献[23]中的非圆信号 MUSIC 谱峰函数类似，将 \mathbf{Q}_n 分为 4 等份：

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

则式(8)可以表示为^[23]

$$f(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\beta} \end{bmatrix}^H \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^H(\alpha) \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_1(\alpha) & \mathbf{a}_1^H(\alpha) \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_1(\alpha) \\ \mathbf{a}_1^H(\alpha) \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_1(\alpha) & \mathbf{a}_1^H(\alpha) \mathbf{Q}_4 \mathbf{a}_1(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\alpha)} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\beta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

为了进一步降低复杂度，可以用多项式求根的方式。

令 $z = e^{-j\alpha}$ ，则 $\mathbf{a}_1(\alpha) = \mathbf{a}_1(z) = [1, z, z^2, \dots, z^{M-1}]^T$ ，

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T(1/z) \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_1(z) & \mathbf{a}_1^T(1/z) \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_1(z) \\ \mathbf{a}_1^T(1/z) \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_1(z) & \mathbf{a}_1^T(1/z) \mathbf{Q}_4 \mathbf{a}_1(z) \end{bmatrix} \quad (11)$$

根据式(10)， $f(\alpha, \beta)$ 出现最小值的时候就是 $\mathbf{F}(\alpha)$ ，即 $\mathbf{F}(z)$ 出现降秩的情况，所以可以通过判断 $\mathbf{F}(z)$ 的行列式得到 α 的估计，即根据 $\det(\mathbf{F}(z)) = 0$ 得到的多项式进行求根即可。根据文献[23]， $\mathbf{F}(z)$ 的行列式表示为

$$\det(\mathbf{F}(z)) = \mathbf{b}^T(z) \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_4^T \mathbf{b}(z) - \mathbf{b}^T(z) \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3^T \mathbf{b}(z) \quad (12)$$

其中， $\mathbf{b}^T(z) = [z^{1-M}, \dots, z^{-1}, 1, z, \dots, z^{M-1}]$ 包含了所有次幂项，而 $\mathbf{q}_p, p=1, 2, 3, 4$ 包含了多项式的系数，其可通过 $\mathbf{q}_p(i) = \sum \text{diag} \mathbf{Q}_p, i, -M \leq i \leq M-1$ 获得。将其进一步简化，由于 $\mathbf{b}^T(z)$ 满足 $\mathbf{b}^T(z) = \mathbf{b}^T(1/z) \prod_{2M-1}$ ，所以式(12)进一步写为

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{F}(z)) &= \mathbf{b}^T(1/z) \prod_{2M-1} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_4^T - \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3^T \mathbf{b}(z) \\ &= \mathbf{b}^T(1/z) \mathbf{U} \mathbf{b}(z) \\ &= [z^{2-2M}, \dots, z^{-1}, 1, z, \dots, z^{2M-2}] \mathbf{u} \end{aligned} \quad (13)$$

其中， $\mathbf{U} = \prod_{2M-1} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_4^T - \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3^T$ ，而 $\mathbf{u} \in C^{(4M-3) \times 1}$ 包含了最终的多项式系数，可通过以下方式获得： $\mathbf{u}(i) = \sum \text{diag}(\mathbf{U}, i-2M+1), i=1, 2, \dots, 4M-3$ 。

根据式(13)，可以选取位于单位圆内并且最接近单位圆的 K 个根 z_1, z_2, \dots, z_K 作为最终解。因为 $z = e^{-j\alpha} = e^{-jN\pi \sin \theta}$ ，所以从子阵 1(即 α) 得到的 DOA 估计为

$$\begin{aligned} \sin \hat{\theta}_{k,1} &= -\text{angle } z_k / (N\pi) \in [-1/N, 1/N], \\ k &= 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (14)$$

从式(14)可以看到，因为子阵 1 较大的阵元间距， z_k 的相位值会超出 $[-\pi, \pi]$ ，所以存在相位模糊，我们根据 z_k 从式(14)求出的只是其中一个模糊解，还存

在 $(N-1)$ 个解 $\sin \hat{\theta}_{k,n}, n = 2, 3, \dots, N$ [19,20], 这 N 个解应满足 $e^{-jN\pi \sin \hat{\theta}_{k,n}} = z_k, n = 1, 2, \dots, N$, 所以他们之间的关系为

$$\sin \hat{\theta}_{k,n} = \sin \hat{\theta}_{k,1} - \frac{2u}{N}, n = 2, 3, \dots, N \quad (15)$$

其中, u 是个整数, 其随着 n 的变化而变化, 并保证 $\sin \hat{\theta}_{k,n}$ 位于区间 $[-1, 1]$ 之内。所以所有 N 个解之间存在均匀分布的关系, 且间距为 $2/N$, 根据这个关系以及式(14)中的一个解, 我们就可以恢复出所有 N 个解。

现在从子阵 1 中获得了一组解 $\sin \hat{\theta}_{k,n}, n = 1, 2, \dots, N$ 。接下来, 需要考虑来自子阵 2 的 DOA 估计。根据式(10), $\mathbf{c}(\beta)$ 其实就是 $\mathbf{F}(z)$ 最小特征值对应的特征向量, 所以其满足[23]

$$\mathbf{c} \beta_k = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\beta_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\mathbf{a}_1^T 1/z_k \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_1 z_k}{\mathbf{a}_1^T 1/z_k \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_1 z_k} \end{bmatrix} \quad (16)$$

因为 $\beta = M\pi \sin \theta$, 所以从子阵 2(即 β)可以获取的 DOA 估计为

$$\sin \check{\theta}_{k,1} = \text{angle} \left(-\frac{\mathbf{a}_1^T 1/z_k \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_1 z_k}{\mathbf{a}_1^T 1/z_k \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_1 z_k} \right) / (M\pi), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (17)$$

同理, 式(17)为一模糊解, 根据所有 M 个解以 $2/M$ 为间隔的均匀分布性, 以及式(17)获得的其中一个解, 同样可以获得一组解 $\sin \check{\theta}_{k,m}, m = 1, 2, \dots, M$ 。

3.3 无模糊 DOA 确定

现在我们获得了关于 DOA 估计的两组解。这两组解包含许多错误解, 但也包含有真实的 DOA 估计。根据文献[18-20], 由于互质阵中的互质性, 无模糊的 DOA 可以从两组解的共同解, 即交集获得。

图 2 给出了一个例子, 假设 $M = 3, N = 5$, 真实的 DOA 值为 30° , 那么此时真实解 $\sin \theta_k$ 应为 0.5, 但是因为 $z_k = e^{-jN\pi \sin \theta_k} = e^{-j2.5\pi} = e^{-j0.5\pi}$, 根据式(14)得到的解为 $\sin \hat{\theta}_{k,1} = -\text{angle } z_k / (N\pi) = 0.1$, 显然该解是错误解, 但可以用其来恢复出所有解, 所有的 $N = 5$ 个解如图 2 中空圈所示, 均匀分布在 $[-1, 1]$ 区间内, 彼此间距 $2/N = 0.4$ 。同理, 根据式(17)得到的解为 $\sin \check{\theta}_{k,1} = -1/6$, 则对应子阵 2 所有的 3 个解如图 2 中实心圆所示。同时从图 2 中也可以看到两组解的交集 0.5 即是真实解。

实际中, 由于噪声的影响, 往往不存在完全重合的解, 所以我们可以从两组解中最接近的两个解的平均作为最终无模糊 DOA 的估计[20]。因为式(14)

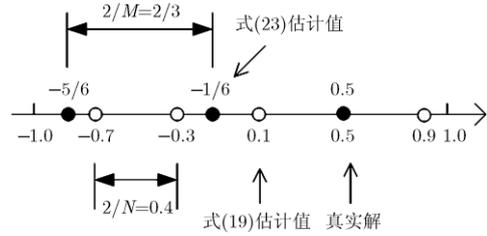


图 2 子阵 1 和子阵 2 所有解的关系图(假设真实 DOA 为 30°)

和式(17)获得的解均是基于 $z_k, k = 1, 2, \dots, K$, 所以是自动配对的, 即这两组解均是对应第 k 个信源。这样在求解最接近的两个解的时候, 不会受到来自其余 DOA 的影响。

备注 1: 以上分析是基于无限快拍, 在实际情况下, 式(3)中的互协方差只能通过有限快拍数进行估计, 即

$$\mathbf{R}_c = (1/T) \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_1(t) \mathbf{x}_2^H(t) \quad (18)$$

其中, T 表示快拍数。所以在式(3), 式(5)以及式(6)中依然会存在残余噪声。

备注 2: 以上分析是基于 $N > M$ 的情况, 而如果 $M > N$, 那么就需要考虑先扩展子阵 2。这个时候只需取协方差矩阵的前后 $(M-1)$ 行, 然后横向堆叠:

$$\mathbf{R}_{2,2} = \mathbf{A}_{1a} \mathbf{R}_s \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 \Phi_1^H \end{bmatrix}^H \quad (19)$$

其中, \mathbf{A}_{1a} 为 \mathbf{A}_1 的前 $(M-1)$ 行, $\Phi_1 = \text{diag } e^{j\alpha_1}, e^{-j\alpha_2}, \dots, e^{-j\alpha_K}$ 。这样就实现了子阵 2 的扩展。

备注 3: 本文方法的首要步骤是进行孔径扩展, 但也发现 3.1 节中的孔径扩展是建立在信号不相关的前提下, 即 \mathbf{R}_s 为一对角矩阵, 当信号相干时, 则此扩展方法会失效, 这是本文方法的一个缺点, 当然这也是局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法无法处理的问题。未来会考虑在孔径扩展之前, 进行信号解相干处理, 比如阵列平滑[24], 差值协方差[25]等。

4 算法分析

4.1 复杂度分析

本文算法无需特征分解和谱峰搜索, 其主要计算复杂度集中在求取互协方差、噪声空间以及 1 维求根运算, 总复乘次数约 $O(MNT + 6MK^2 + K^3 + 2NMK + 4MK)$ 次。而局部搜索 MUSIC 方法[19]需要特征分解和谱峰搜索, 联合 ESPRIT 方法[20]需要求取完整协方差以及特征分解, 所以复杂度均高于本文算法。

4.2 可辨识信源数分析

无论是局部搜索 MUSIC 方法还是联合 ESPRIT 方法, 均是通过两个子阵的结果联合得到最终 DOA 估计, 所以其最大可辨识信源数取决于较短子阵的天线数, 即 $M-1$ 。而本文算法因为对子阵 1 进行了孔径扩展, 所以其最大可辨识信源数取决于式(6)中的增广互协方差以及式(11)中的 $F(\alpha)$ 的秩, 即需要同时满足 $K \leq \min(2M, N-1)$ 以及 $2M-K \geq 2$, 所以最大可辨识信源数为 $\min(2M-2, N-1)$, 而无论 $2M-2$ 还是 $N-1$ 均是大于 $M-1$ 的。所以本文算法的最大可辨识信源数大于局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法。

5 仿真结果

假设互质阵中两个子阵的配置为 $M=5$ 以及 $N=7$, 空间中存在 $K=2$ 个信源, 其 DOA 分别为 $\theta_1=15^\circ$ 何 $\theta_2=30^\circ$ 。互协方差矩阵通过 $T=200$ 个快拍进行估计, 定义求根均方误差(Root Mean Square Error, RMSE) 用于衡量 DOA 估计误差

$$\text{RMSE} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L [\hat{\theta}_{k,l} - \theta_k]^2} \quad (20)$$

其中, $\hat{\theta}_{k,l}$ 是第 l 次蒙特卡洛实验时 DOA θ_k 的估计结果。

基于式(20)中的 RMSE, 图 3 则给出了本文算法跟互质阵中的局部搜索 MUSIC 方法^[19]以及联合 ESPRIT 方法^[20]相同条件下的估计性能对比, 横轴为信噪比(SNR)。可以发现, 本文算法拥有比局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法更低的估计误差, 即估计性能更好, 这主要是因为局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法直接利用子阵的结果交集进行解模糊, 较长子阵的 DOA 估计性能会被较短的子阵所影响, 而本文算法先对较短子阵进行了扩展, 从而提高最终估计性能。图中的局部搜索 MUSIC 方法, 因为采用固定间隔的谱峰搜索, 所以其随 SNR 的变化趋势较慢。

图 4 中给出了当存在 $K=5$ 个信源时的各算法

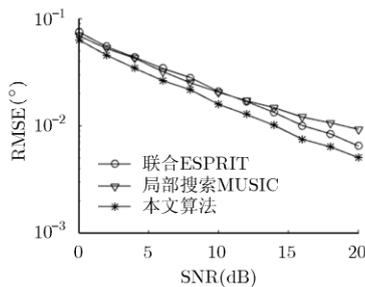


图 3 各算法 DOA 估计性能对比

估计结果, 该 5 个信源均匀分布在 $[15^\circ, 65^\circ]$ 的区间内, 根据 4.2 节中的分析, 局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法的最大可辨识信源数为 $M-1=4$, 所以此时的信源数超过了局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法的处理极限, 从图中也可以发现此时的局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法已经无法处理, 得出了错误的估计, 而本文算法依然可以准确地估计出所有信源的 DOA。

图 5 则给出了当空间噪声不再是白噪声而是色噪声时^[14]的各算法 DOA 估计性能对比。对比图 3 和图 5, 可以发现局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法都出现了性能下降, 尤其在低 SNR 的时候, 而本文算法几乎没有受到影响。这是因为局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法是基于完整协方差的特征分解, 其中包含有噪声能量, 根据文献[26]中的分析, 色噪声会造成信号子空间和噪声子空间的相互渗透, 而渗透量的大小取决于噪声, 所以局部搜索 MUSIC 方法和联合 ESPRIT 方法在低信噪比时会出现较大的性能下降。而本文算法因为是基于互协方差, 噪声能量被大大抑制, 对噪声功率的非均匀性有较强的鲁棒性, 所以在色噪声时依然可以保持较好的性能。

图 6 中给出了当 $M=7$ 以及 $N=9$ 时的 DOA 估计性能对比, 即相对于图 3, 此时两个子阵阵元数增加了, 当然此时阵元间距也会增加, 随着阵元数和阵元间距的增加, 孔径扩大, 那么算法的估计性能会得到提升, 这点我们通过对比图 6 和图 3 的 RMSE 线即可发现。但同时因为阵元间距的增大, 模糊解的个数也会增加, 如图 2 所示, 从子阵 1 和子阵 2 获得的解彼此间隔分别为 $2/N$ 和 $2/M$, 随着 M 和 N 的增大, 解会越来越多, 彼此越来越远, 彼此干扰增大, 就越容易选取出错误的解。所以随着阵元数的增加, 虽然算法性能会得到提升, 但同时也存在一定得到错误解的风险, 尤其在低信噪比, 噪声影响较大时。如图 6 所示, 局部搜索 MUSIC 算法此时在低信噪比时出现较大误差。

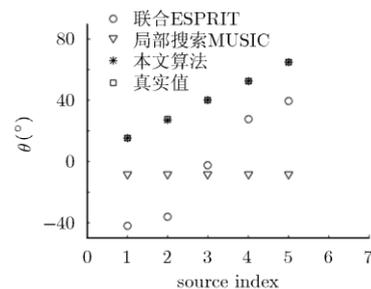


图 4 较多信源数情况下的 DOA 估计结果($K=5$)

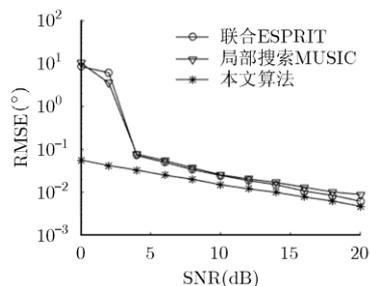


图5 空间色噪声下的 DOA 估计性能对比

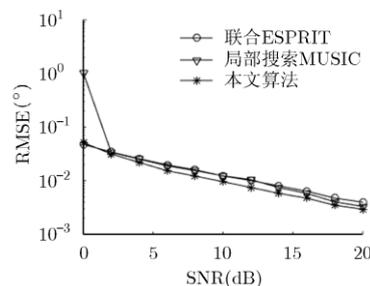


图6 阵元数增大后的 DOA 估计性能对比

6 结束语

本文提出了互质阵中基于降维求根的高分辨率 DOA 估计算法。相对于互质阵中的局部搜索 MUSIC 和联合 ESPRIT 方法, 将基于降维求根的 DOA 估计算法的优点总结如下: (1) 对子阵 1 进行了孔径扩展, 所以估计结果会更好, 并且可处理更多信源; (2) 无需特征分解以及谱峰搜索, 通过矩阵分块获得噪声子空间, 所以复杂度低; (3) 基于互协方差, 所以对空间色噪声有较强的鲁棒性; (4) 通过 1 维求根获得自动配对的 2 维参数估计 (α 和 β)。

参考文献

- [1] GERSHMAN A B, RÜBSAMEN M, and PESAVENTO M. One-and two-dimensional direction-of-arrival estimation: An overview of search-free techniques[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(5): 1338-1349. doi: 10.1016/j.sigpro.2009.12.008.
- [2] SHEN Qing, LIU Wei, CUI Wei, *et al*. Underdetermined DOA estimation under the compressive sensing framework: A review[J]. *IEEE Access*, 2017, 4(99): 8865-8878. doi: 10.1109/ACCESS.2016.2628869.
- [3] 司伟建, 周炯赛, 曲志昱. 稀疏极化敏感阵列的波达方向和极化参数联合估计[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(5): 1129-1134. doi: 10.11999/JEIT150840.
SI Weijian, ZHOU Jiongsai, and QU Zhiyu. Joint DOA and polarization estimation with sparsely distributed polarization sensitive array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(5): 1129-1134. doi: 10.11999/JEIT150840.
- [4] WANG Xianpeng, HUANG Mengxing, WU Xiaoqin, *et al*. Direction of arrival estimation for MIMO radar via unitary nuclear norm minimization[J]. *Sensors*, 2017, 17(4): 939-952. doi: 10.3390/s17040939.
- [5] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276-280. doi: 10.1109/TAP.1986.1143830.
- [6] GAO Feifei, NALLANATHAN A, and WANG Yide. Improved music under the coexistence of both circular and noncircular sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(7): 3033-3038. doi: 10.1109/TSP.2007.916123.
- [7] ROY R and KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984-995. doi: 10.1109/29.32276.
- [8] GAO Feifei and GERSHMAN A B. A generalized esprit approach to direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(3): 254-257. doi: 10.1109/LSP.2004.842276.
- [9] MARCOS S, MARSAL A, and BENIDIR M. The propagator method for source bearing estimation[J]. *Signal Processing*, 1995, 42(2): 121-138. doi: 10.1016/0165-1684(94)00122-G.
- [10] LI Jianfeng, ZHANG Xiaofei, and CHEN Han. Improved two-dimensional DOA estimation algorithm for two-parallel uniform linear arrays using propagator method[J]. *Signal Processing*, 2012, 92(12): 3032-3038. doi: 10.1016/j.sigpro.2012.06.010.
- [11] YE Zhongfu, DAI Jisheng, XU Xu, *et al*. DOA estimation for uniform linear array with mutual coupling[J]. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, 2009, 45(1): 280-288. doi: 10.1109/TAES.2009.4805279.
- [12] PAL P and VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167-4181. doi: 10.1109/TSP.2010.2049264.
- [13] ZHENG Guimei and TANG Jun. DOD and DOA estimation in bistatic MIMO radar for nested and coprime array with closed-form DOF[J]. *International Journal of Electronics*, 2016, 104(5): 885-897. doi: 10.1080/00207217.2016.1253789.
- [14] 李建峰, 蒋德富, 沈明威. 基于平行嵌套阵互协方差的二维波达角联合估计算法[J]. *电子与信息学报*, 2017, 39(3): 670-676. doi: 10.11999/JEIT160488.
LI Jianfeng, JIANG Defu, and SHEN Mingwei. Joint two-dimensional direction of arrival estimation based on cross covariance matrix of parallel nested array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(3): 670-676. doi: 10.11999/JEIT160488.

- [15] VAIDYANATHAN P P and PAL P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586. doi: 10.1109/TSP.2010.2089682.
- [16] QIN Si, ZHANG Yimin, AMIN M G, *et al.* DOA estimation exploiting a uniform linear array with multiple co-prime frequencies[J]. *Signal Processing*, 2017, 130(1): 37–46. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.06.008.
- [17] SHEN Qing, CUI Wei, LIU Wei, *et al.* Underdetermined wideband DOA estimation of off-grid sources employing the difference co-array concept[J]. *Signal Processing*, 2017, 130(1): 299–304. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.07.022.
- [18] ZHOU Chengwei, SHI Zhiguo, GU Yujie, *et al.* DECOM: DOA estimation with combined MUSIC for coprime array[C]. IEEE International Conference on Wireless Communications & Signal Processing (WCSP), Hangzhou, China, 2013: 1–5. doi: 10.1109/WCSP.2013.6677080.
- [19] SUN Fenggang, LAN Peng, and GAO Bin. Partial spectral search-based DOA estimation method for co-prime linear arrays[J]. *Electronics Letters*, 2015, 51(24): 2053–2055. doi: 10.1049/el.2015.2261.
- [20] LI Jianfeng, SHEN Mingwei, and JIANG Defu. DOA estimation based on combined ESPRIT for co-prime array[C]. IEEE Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation (APCAP), Taipei, 2017: 117–118. doi: 10.1109/APCAP.2016.7843126.
- [21] GU Jianfeng and WEI Ping. Joint SVD of two cross-correlation matrices to achieve automatic pairing in 2-D angle estimation problems[J]. *IEEE Antennas & Wireless Propagation Letters*, 2007, 6(99): 553–556. doi: 10.1109/LAWP.2007.907913.
- [22] WANG Qing, YANG Hang, CHEN Hua, *et al.* A low-complexity method for two-dimensional direction-of-arrival estimation using an L-shaped array[J]. *Sensors*, 2017, 17(1): 190–203. doi: 10.3390/s17010190.
- [23] CHARGÉ P, WANG Yide, and SAILLARD J. A non-circular sources direction finding method using polynomial rooting[J]. *Signal Processing*, 2001, 81(8): 1765–1770. doi: 10.1016/S0165-1684(01)00071-8.
- [24] PAL P and VAIDYANATHAN P P. Coprime sampling and the MUSIC algorithm[C]. Digital Signal Processing Workshop and IEEE Signal Processing Education Workshop (DSP/SPE), Sedona, USA, 2011: 289–294. doi: 10.1109/DSP-SPE.2011.5739227.
- [25] QIN Si, ZHANG Yimin, and AMIN M G. DOA estimation of mixed coherent and uncorrelated targets exploiting coprime MIMO radar[J]. *Digital Signal Processing*, 2016, 61(1): 26–34. doi: 10.1016/j.dsp.2016.06.006.
- [26] LI Fu and VACCARO R J. Performance degradation of DOA estimators due to unknown noise fields[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(3): 686–690. doi: 10.1109/78.120813.
- 李建峰：男，1988 年生，讲师，研究方向为阵列信号处理、雷达信号处理。
- 沈明威：男，1981 年生，副教授，研究方向为自适应阵列技术、雷达信号处理。
- 蒋德富：男，1963 年生，教授，研究方向为阵列信号处理技术、雷达通信集成系统的跟踪制导及目标识别技术。