

基于矩阵补全的二阶统计量重构 DOA 估计方法

王洪雁* 房云飞 裴炳南
(大连大学信息工程学院 大连 116622)

摘 要: 该文针对传统波达方向角(DOA)估计算法在非均匀噪声下角度估计精度差及分辨率低的问题, 基于矩阵补全理论, 提出一种二阶统计量域下加权 L1(MC-WLOSRSS)稀疏重构 DOA 估计算法。首先, 基于矩阵补全方法, 引入弹性正则化因子将接收信号协方差矩阵重构为无噪声协方差矩阵; 而后在二阶统计量域下通过矩阵求和平均将无噪声协方差矩阵多矢量问题转化为单矢量问题; 最后利用稀疏重构加权 L1 范数实现 DOA 参数估计。数值仿真表明, 与传统 MUSIC, IL1-SRACV, L1-SVD 子空间算法及稀疏重构加权 L1 算法相比, 所提算法能显著抑制非均匀噪声影响, 具有较好 DOA 估计性能, 且在低信噪比条件下, 亦具有较高估计精度和分辨力。

关键词: 波达方向; 非均匀噪声; 矩阵补全; 二阶统计量; 加权 L1 范数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)06-1383-07

DOI: 10.11999/JEIT170826

Matrix Completion Based Second Order Statistic Reconstruction DOA Estimation Method

WANG Hongyan FANG Yunfei PEI Bingnan
(College of Information Engineering, Dalian University, Dalian 116622, China)

Abstract: Focusing on the problem of poor accuracy and low resolution of traditional Direction Of Arrival (DOA) estimation algorithm in the presence of non-uniform noise, based on the Matrix Complement theory, a Weighted L1 Sparse Reconstruction DOA estimation algorithm is developed under the Second-order Statistical domain (MC-WLOSRSS) in this paper. Following the matrix completion approach, the regularization factor is firstly introduced to reconstruct the signal covariance matrix reconstruction as a noise-free covariance matrix. After that, the multi-vector problem of the noise-free covariance matrix can be transformed into a single vector one by exploiting sum-average operation for matrix in the second-order statistical domain. Finally, the DOA can be complemented by employing the sparse reconstruction weighted L1 norm. Numerical simulations show that the proposed algorithm outperforms the traditional DOA algorithms such as MUltiple SIgnal Classification (MUSIC), Improved L1-SRACV (IL1-SRACV), L1-norm-Singular Value Decomposition (L1-SVD) subspace and sparse reconstruction weighted L1 methods in the following respects: suppressing the influence of the non-uniform noise significantly, bettering DOA estimation performance, as well as improving estimation accuracy and resolution with low Signal-Noise Ratio (SNR).

Key words: Direction Of Arrival (DOA); Non-uniform noise; Matrix Completion (MC); Second-order statistics; Weighted L1 norm

1 引言

在雷达、通信等领域, 波达方向角估计 (Direction Of Arrival, DOA) 是一类重要的问题^[1]。基于信号子空间的传统估计算法可显著提高 DOA

估计性能, 如多重信号分类 (Multiple Signal Classification, MUSIC)^[2]。以 MUSIC 方法为代表的子空间算法通常假设噪声为统计独立的复高斯白噪声。然而实际应用中, 由于接收机差异及外界影响, 各传感器中噪声通常为不相关非均匀噪声, 即噪声功率不相等^[3-5]。在此场景下, 对信号协方差矩阵特征分解会引起子空间泄漏, 使得子空间类算法性能急剧下降甚至失效^[3]。为进一步提高 DOA 估计精度, Malioutov 等人^[6]提出一种稀疏重构 L1-SVD 算法。然而, 在非均匀高斯噪声或未知信源先验信息条件下, 该算法空间分辨力较差^[4]。基于此, Pal 等

收稿日期: 2017-08-23; 改回日期: 2018-01-08; 网络出版: 2018-03-15

*通信作者: 王洪雁 gglongs@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61301258, 61271379), 中国博士后科学基金(2016M590218)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61301258, 61271379), China Postdoctoral Science Foundation (2016M590218)

人^[7]提出一种无网格核范数内插法。该算法主要通过核范数内插法求解信号协方差矩阵以实现 DOA 估计。需要注意的是,该算法未考虑非均匀噪声下核范数优化问题。

非均匀高斯噪声下,文献[8]提出一种最大似然(Maximum Likelihood, ML)估计算法,该算法通过逐步迭代求解信号和噪声的对数似然函数以实现 DOA 估计。然而,ML 算法的较强初始值依赖性及较大运算复杂度限制了该算法的应用。文献[9]提出一种稀疏信号协方差矢量下移除非均匀噪声功率成分的方法,即改善的 L1-SRACV (IL1-SRACV)^[10]算法,该算法主要通过数学线性变换将非均匀噪声功率成分移除以消除非均匀噪声影响。然而,该算法移除操作将会导致信号协方差部分信息损失,且未充分利用协方差所包含的信源角度信息。文献[11]提出一种基于矩阵补全的 DOA 估计算法(Matrix Completion based MUSIC, MC-MUSIC),该算法基于矩阵补全重构出无噪声协方差以实现 DOA 估计。然而,该算法没有考虑协方差矩阵元素之间相关性,有可能导致算法求解数值不稳定,从而使得算法稳定性较差。

针对上述问题,本文基于矩阵补全^[12-14]理论,提出一种二阶统计量域下的加权 L1 稀疏重构 DOA 估计算法。该算法基于矩阵补全理论,引入弹性正则化因子重构无噪声信号协方差矩阵以消除非均匀噪声影响,并提高了 MC 求解的数值稳定性;此外通过矩阵求和平均将稀疏多矢量问题转化为单矢量问题以改善低信噪比条件下 DOA 估计性能;最后,该算法采用加权 L1 范数(Weighted L1-norm, WL1)^[15]对单矢量稀疏信号进行稀疏重构以实现 DOA 估计。仿真实验证明了所提 MC-WLOSRS 算法的有效性。

2 接收信号模型

假设有 Q 个远场窄带信号 $\{s_q(t)\}_{q=1}^Q$ 入射至具有 M 个阵元的均匀线性阵列,则接收信号模型可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}(\theta_q) s_q(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中, $s_q(t)$ 和 $\mathbf{a}(\theta_q) = [1 \ e^{-j\alpha} \ \dots \ e^{-j(M-1)\alpha}]^T$ 分别为第 q 个信号幅度和阵列导向矢量, $\alpha = 2\pi d \sin(\theta_q)/\lambda$ 为第 q 个信号到达相邻阵元的相移, $\{\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_Q\}$ 为 Q 个信号发射角度, d 为阵元间距, λ 为信号波长,通常 $d \leq \lambda/2$, $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \dots \ n_M(t)]^T$, 且 $\mathbf{n}(t) \sim CN(0, \mathbf{W})$ ^[8], 信号 $s_q(t)$ 互不相关。

为便于推导,式(1)接收信号模型可进一步重写为 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$, 其中阵列导向流型矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_Q)] \in \mathbb{C}^{M \times Q}$, 且 $M \gg Q$, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_Q(t)]^T \in \mathbb{C}^{Q \times 1}$ 。

对于 L 次快拍,式(1)接收信号模型可进一步表示为 $\mathbf{X}^{M \times L} = \mathbf{A}^{M \times Q} \mathbf{S}^{Q \times L} + \mathbf{N}^{M \times L}$, 其中 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1) \ \mathbf{x}(2) \ \dots \ \mathbf{x}(L)]$ 为接收信号矩阵, $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1) \ \mathbf{s}(2) \ \dots \ \mathbf{s}(L)]$, $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(1) \ \mathbf{n}(2) \ \dots \ \mathbf{n}(L)]$ 。

接收信号协方差可表示为 $\mathbf{R} = E\{\mathbf{X}(t) \mathbf{X}^H(t)\} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{W}$, 其中 $\mathbf{P} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{S} \mathbf{S}^H = \text{diag}\{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_Q\}$ 为信号协方差矩阵, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H$ 为无噪声信号协方差矩阵, $\mathbf{W} = E\{\mathbf{N}(t) \mathbf{N}^H(t)\} = \text{diag}\{\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \dots \ \sigma_M^2\}$, 且 $\sigma_1^2 \neq \dots \neq \sigma_M^2$, $\text{diag}\{\cdot\}$ 为对角化算子。

基于协方差 \mathbf{R} , 以 MUSIC 为代表的子空间算法可通过特征空间^[16]分解实现 DOA 估计。然而,非均匀高斯噪声下特征空间分解会引起信号子空间泄漏,从而使得诸如子空间类算法性能急剧下降甚至失效。

3 基于矩阵补全的无噪声信号协方差重构算法

假设信号模型中阵元数远大于信号数 ($M \gg Q$), 则 $\text{rank}(\mathbf{R}_0) = Q < M$, 即 \mathbf{R}_0 为低秩矩阵, 且 \mathbf{R}_0 非主对角线元素值等价于接收信号协方差对应元素值, 故可进一步通过矩阵补全理论对 \mathbf{R}_0 进行主对角线元素重构, 以此消除非均匀高斯噪声对信号协方差 \mathbf{R} 的影响。

对给定矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 其在相应的子集 Ω 内投影^[17,18], 即采样可表示为

$$[P_\Omega(\mathbf{X})]_{ij} = \begin{cases} \mathbf{X}_{ij}, & (i, j) \in \Omega \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2)$$

其中, 子集 $\Omega \subseteq [m] \times [n]$ 表示采样元素索引集合, m, n 分别为采样最大索引行数和列数, $m \times n$ 则为矩阵 \mathbf{X} 包含的元素总数, $\mathbf{X}_{ij}, [P_\Omega(\mathbf{X})]_{ij}$ 分别为矩阵 \mathbf{X} 和 $P_\Omega(\mathbf{X})$ 第 ij 个索引元素, $P_\Omega(\cdot)$ 为正交投影算子。

在不相关假设条件下, Candes 等人^[12]已证明: 从一个秩为 r 的矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 中均匀采样 κ (本文中 $\kappa = m \times n$) 个元素, 若满足 $\kappa \geq C n^{5/4} r \lg n$, 则通过矩阵补全精确重构原矩阵的概率为 $\tilde{p} \geq 1 - cn^{-3}$, 其中 C, c 皆为常数。换言之, 若 $r \leq n^{1/5}$, κ 满足 $\kappa \geq C n^{6/5} r \lg n$, 则可以以 $\tilde{p} \geq 1 - cn^{-3}$ 的概率精确

重构原矩阵。

由于 Ω 为随机抽取以使得采样后空域矩阵满足低秩特性，故基于矩阵补全理论，重构模型可表示为

$$\min \text{rank}(\tilde{\mathbf{X}}), \text{ s.t. } \mathbf{P}_\Omega(\tilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{X}) \quad (3)$$

其中， $\tilde{\mathbf{X}}$ 为待重构变量， \mathbf{X} 为其对应的已知变量。

由于 $\text{rank}(\tilde{\mathbf{X}})$ 秩函数的非凸性使得式(3)难以求解。为求解问题式(3)，可将其松弛为凸核范数 $\|\tilde{\mathbf{X}}\|_*$ ，即

$$\min \|\tilde{\mathbf{X}}\|_*, \text{ s.t. } \mathbf{P}_\Omega(\tilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{X}) \quad (4)$$

其中，核范数 $\|\tilde{\mathbf{X}}\|_*$ 等价于矩阵 $\tilde{\mathbf{X}}$ 所有奇异值之和。

为避免利用矩阵补全重构算法对强相关性数据进行求解时出现解不稳定的情况，本文引入弹性正则化项 $\frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{X}}\|_F^2$ 增加矩阵补全重构算法求解稳定性^[18]，则式(4)凸优化模型进一步表示为

$$\min \tau \|\tilde{\mathbf{X}}\|_* + \frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{X}}\|_F^2, \text{ s.t. } \mathbf{P}_\Omega(\tilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{X}) \quad (5)$$

其中， τ 为 $\|\tilde{\mathbf{X}}\|_*$ 和 $\frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{X}}\|_F^2$ 之间的平衡度正则化因子。

基于式(5)，矩阵补全凸优化求解模型可改写为

$$\min \tau \|\mathbf{R}_0\|_* + \frac{1}{2}\|\mathbf{R}_0\|_F^2, \text{ s.t. } \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{R}_0) = \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{R}) \quad (6)$$

由 \mathbf{R}_0 为半正定矩阵，可得 $\tau \|\mathbf{R}_0\|_* = \text{tr}(\tau \mathbf{R}_0)$ ，其中 $\text{tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹。又 $\|\mathbf{R}_0\|_F^2 = [\langle \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0 \rangle]^{1/2}]^2 = [\text{tr}(\mathbf{R}_0^H \mathbf{R}_0)]^2 = \text{tr}(\mathbf{R}_0^H \mathbf{R}_0)$ ，则式(6)最小化项可重写为

$$\begin{aligned} \tau \|\mathbf{R}_0\|_* + \frac{1}{2}\|\mathbf{R}_0\|_F^2 &= \text{tr}(\tau \mathbf{R}_0) + \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{R}_0^H \mathbf{R}_0) \\ &= \text{tr}\left(\tau \mathbf{R}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_0^H \mathbf{R}_0\right) \end{aligned} \quad (7)$$

同时，式(6)约束条件可等价表示为： $\mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}) = \mathbf{0}$ ， \mathbf{J} 代表一个 $M(M-1) \times M^2$ 的选择矩阵。

基于式(7)，式(6)凸优化模型可进一步改写为

$$\min \text{tr}\left(\tau \mathbf{R}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_0^H \mathbf{R}_0\right), \text{ s.t. } \mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (8)$$

式(8)凸优化模型是一个线性规划问题^[11]，且 $\mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}) = \mathbf{0}$ 在工程中为比较苛刻的约束，故可将其等价松弛化为： $\|\mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R})\|_2 \leq \xi$ ， ξ 表示为与 \mathbf{R}_0 相关的误差常数，则式(8)可等价表示为

$$\min \text{tr}\left(\tau \mathbf{R}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_0^H \mathbf{R}_0\right), \text{ s.t. } \|\mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R})\|_2 \leq \xi \quad (9)$$

式(9)可等价表示为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_0, t} t, \text{ s.t. } & \text{tr}\left(\tau \mathbf{R}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_0^H \mathbf{R}_0\right) \leq t, \\ & \|\mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R})\|_2 \leq \xi \end{aligned} \quad (10)$$

其中， t 为辅助优化变量。此外，优化问题式(10)中约束条件可进一步改写为

$$\begin{aligned} \text{tr}\left(\frac{1}{2}\mathbf{R}_0^H \mathbf{R}_0\right) &\leq t - \text{tr}(\tau \mathbf{R}_0), \\ [\mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R})]^H [\mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R})] &\leq \xi^2 \end{aligned} \quad (11)$$

根据 Schur 补定理^[19]及 $\text{tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{X}) = [\text{vec}(\mathbf{X})]^H \cdot \text{vec}(\mathbf{X})$ 可知，结合式(11)，凸问题式(10)可转化为可以以非常高精度获得高效求解的半定规划问题 (SDP)^[3]，即

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_0, t} & t \\ \text{s.t.} & \left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2(t - \text{tr}(\tau \mathbf{R}_0)) & (\text{vec}(\mathbf{R}_0))^H \\ \text{vec}(\mathbf{R}_0) & I \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \xi^2 & (\mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}))^H \\ \mathbf{Jvec}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}) & I \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)SDP 问题可运用诸多凸优化工具求解，本文采用文献[20]提出的 CVX 工具包实现高效求解。

由上述分析可知，本文基于 MC 理论重构无噪声协方差 \mathbf{R}_0 。然而，需要注意的是，基于 \mathbf{R}_0 的传统 DOA 估计算法没有考虑到 \mathbf{R}_0 元素之间的相关性，会导致算法低信噪比条件下估计稳定性差和分辨率低等问题。

4 二阶统计量域下的加权 L1 稀疏重构算法

为进一步提高低信噪比条件下信号角度估计精度和分辨力，降低稀疏重构算法计算复杂度，本文基于矩阵补全理论，提出一种二阶统计量域下的加权 L1 范数稀疏重构算法。

无噪声协方差 \mathbf{R}_0 中的元素，即第 i 行和第 j 列的阵列输出互相关系数可表示为

$$r_{ij} = (\mathbf{R}_0)_{ij} = (\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H)_{ij} = \sum_{q=1}^Q P_q e^{-j2\pi(i-j)d \sin \theta_q / \lambda} \quad (13)$$

由式(13)可知，当 $i - j = u - v$ 时，互相关系数 $r_{ij} = r_{uv}$ ， $i, j, u, v \in [1, M]$ ，即它们含有相同系数特征，故可通过二阶统计量域下求和平均将多矢量问题转化为单矢量问题。

定义 $(2M-1) \times 1$ 的向量 \mathbf{Y} ，通过对信号协方差 \mathbf{R}_0 求和平均，其第 \bar{m} 个元素可表示为

$$\mathbf{Y}(\bar{m}) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{m}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{m}} \mathbf{R}_0(\bar{n}, M + \bar{n} - \bar{m}), \\ \quad \bar{m} = 1, 2, \dots, M \\ \frac{1}{2M - \bar{m}} \sum_{\bar{n}=1}^{2M - \bar{m}} \mathbf{R}_0(r\bar{x}, r\bar{y}), \\ \quad \bar{m} = M + 1, M + 2, \dots, 2M - 1 \end{cases} \quad (14)$$

其中, $rx = M + 1 - \bar{n}$, $ry = 2M + 1 - \bar{n} - \bar{m}$ 。

$\boldsymbol{\Upsilon}$ 的向量形式可表示为 $\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}$, 其中 $\mathbf{P} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_Q]^T$, $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = [b(\theta_1) \ b(\theta_2) \ \dots \ b(\theta_q) \ \dots \ b(\theta_Q)] \in \mathbb{C}^{(2M-1) \times Q}$ 为虚拟阵列流型矩阵^[21], 其第 q 列可表示为

$$\mathbf{b}(\theta_q) = \begin{bmatrix} e^{j2\pi(M-1)d \sin \theta_q / \lambda} & e^{j2\pi(M-2)d \sin \theta_q / \lambda} & \dots & 1 & \dots \\ e^{-j2\pi(M-2)d \sin \theta_q / \lambda} & e^{-j2\pi(M-1)d \sin \theta_q / \lambda} & & & \end{bmatrix} \quad (15)$$

$\boldsymbol{\Upsilon}$ 单矢量问题可转变为稀疏信号重构问题, 将空间波达方向角 θ 分割为 N ($N \gg M$) 个网格, 即 $\boldsymbol{\Psi} = \{\tilde{\theta}_1 \ \tilde{\theta}_2 \ \dots \ \tilde{\theta}_N\}$, 则稀疏后接收信号可表示为 $\boldsymbol{\Upsilon} = \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}}$, 其中 $\tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi}) = [b(\tilde{\theta}_1) \ b(\tilde{\theta}_2) \ \dots \ b(\tilde{\theta}_N)] \in \mathbb{C}^{(2M-1) \times N}$ 为过完备基矩阵, $\tilde{\mathbf{P}} = [\tilde{P}_1 \ \tilde{P}_2 \ \dots \ \tilde{P}_N]$ 为 K 稀疏信号功率向量。

上述问题可通过 L1 范数约束最优化算法进行求解, 即

$$\min \|\tilde{\mathbf{P}}\|_1, \text{ s.t. } \|\boldsymbol{\Upsilon} - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}}\|_F \leq \eta \quad (16)$$

其中, η 为误差参数因子, $\|\cdot\|_F$ 和 $\|\cdot\|_1$ 为 2 范数和 1 范数。

由式(16)知, 误差参数因子 η 值的选取将会影响到算法 DOA 估计性能。由文献[22]可知, 矢量化后的无噪声信号协方差误差 $\Delta \mathbf{R}_0 = \hat{\mathbf{R}}_0 - \mathbf{R}_0$ 服从渐进正态(Asymptotically Normal, AsN)分布, 即

$$\text{vec}(\Delta \mathbf{R}_0) \sim \text{AsN}\left(0, \frac{1}{L} \mathbf{R}_0^T \otimes \mathbf{R}_0\right) \quad (17)$$

其中, $\hat{\mathbf{R}}_0$ 可通过式(12)求得, \otimes 为矩阵 Kronecker 积。

由式(14)可知, 向量 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 可通过协方差矩阵 \mathbf{R}_0 求和平均得到, 则 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 与 \mathbf{R}_0 之间存在线性关系, 从而可得

$$\Delta \boldsymbol{\Upsilon} = \hat{\boldsymbol{\Upsilon}} - \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{G} \times \text{vec}(\Delta \mathbf{R}_0) \quad (18)$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}$ 为 L 次快拍下对应 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 估计值, $\mathbf{G} \in (2M-1) \times M^2$ 为线性变换矩阵, 且 $\text{rank}(\mathbf{G}) = 2M-1$ ^[23]。

基于式(17)及式(18), 可得 $\hat{\boldsymbol{\Upsilon}} - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}} \sim \text{AsN}\left(0, \frac{1}{L} \mathbf{G}(\mathbf{R}_0^T \otimes \mathbf{R}_0) \mathbf{G}^T\right)$, 即 $\hat{\boldsymbol{\Upsilon}} - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}}$ 服从均值为 0, 方差为 $\frac{1}{L} \mathbf{G}(\mathbf{R}_0^T \otimes \mathbf{R}_0) \mathbf{G}^T$ 的渐进正态分布。

令 $\mathbf{H} = \frac{1}{L} \mathbf{G}(\mathbf{R}_0^T \otimes \mathbf{R}_0) \mathbf{G}^T$, 进一步可得 $\mathbf{H}^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\Upsilon}} - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}}) \sim \text{AsN}(0, \mathbf{I}_{2M-1})$, 其中 $\mathbf{H}^{-1/2}$ 表示 \mathbf{H} 的 Hermitian 平方根, \mathbf{I}_{2M-1} 为 $(2M-1)$

$\times (2M-1)$ 的单位矩阵。

根据正态分布性质^[19], 可得

$$\left\| \mathbf{H}^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\Upsilon}} - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}}) \right\|_2^2 \sim \text{As}\chi^2(2M-1) \quad (19)$$

其中, $\text{As}\chi^2(2M-1)$ 表示自由度为 $2M-1$ 的 chi-square 分布。

由式(19)可知, η 可通过自由度为 $2M-1$ 的 $\chi^2(\cdot)$ 分布函数 $\text{ch2inv}(1-\bar{p}, 2M-1)$ 取得, \bar{p} 为一概率率值。由于 \bar{p} 难以通过求解式(19)求得, 因而, 实际应用中, 一般通过仿真实验确定 \bar{p} 值^[23]。文献[23]仿真表明, 当 $\bar{p} = 0.01$ 时, 可获得较好的 DOA 估计精度。

由式(16)可知, 基于 L1 范数约束的优化问题对目标信号大系数的约束比对小系数的约束更为严格, 导致其事实上是一种有偏的估计^[23]。

基于此, 本文采用统计上改善的加权 L1 范数稀疏重构算法实现非均匀噪声下的信源 DOA 估计, 即

$$\min \|\mathbf{W}^{(i)}\tilde{\mathbf{P}}\|_1, \text{ s.t. } \left\| \mathbf{H}^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\Upsilon}} - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}}) \right\|_F^2 \leq \eta \quad (20)$$

式(20)可进一步改写为

$$\min \sum_{i=1}^N w_i |\tilde{P}_i|, \text{ s.t. } \left\| \mathbf{H}^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\Upsilon}} - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}}) \right\|_F \leq \sqrt{\eta} \quad (21)$$

凸问题式(21)可通过二阶锥规划(SOCP)^[24]求解实现 DOA 参数估计。

基于上述讨论, 本文提出的 MC-WLOSRS 算法可表述如下:

初始化: (1) $\boldsymbol{\Upsilon} = \text{avr}(\mathbf{R}_0)$, Maxiter , ε , λ , η ;

$$(2) \tilde{\mathbf{P}}_{N,0} = \arg \min \sum_{i=1}^N |\tilde{P}_i| \\ \text{s.t. } \|\boldsymbol{\Upsilon} - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}}\|_F \leq \eta;$$

迭代: (3) 权值 $w_i = 1/(\tilde{P}_{N,0}(i) + \lambda)$;

(4) 求解问题

$$\tilde{\mathbf{P}}_{N,\text{miter}} = \arg \min \sum_{i=1}^N w_i |\tilde{P}_i| \\ \text{s.t. } \left\| \mathbf{H}^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\Upsilon}} - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Psi})\tilde{\mathbf{P}}) \right\|_F \leq \sqrt{\eta}$$

以更新系数;

(5) 重复步骤(3), 步骤(4)直至满足如下条件: $|\tilde{\mathbf{P}}_{N,\text{miter}} - \tilde{\mathbf{P}}_{N,\text{miter}-1}| \leq \varepsilon$ 或者 $\text{miter} \geq \text{Maxiter}$ 。

其中, 算子 $\text{avr}(\cdot)$ 代表式(14)矩阵求和平均; Maxiter 表示最大迭代次数; ε 为迭代终止参数; λ 为权值 \mathbf{w} 平衡约束因子, 防止算法迭代时权值分母趋于无穷大; η 为凸优化问题误差参数; miter 为迭代次数; $\tilde{\mathbf{P}}_{N,0}$ 为谱峰估计初始值; $\tilde{\mathbf{P}}_{N,\text{miter}}$ 为第 miter 次迭代的谱峰估计值。

5 实验仿真及分析

本节通过实验仿真验证所提算法有效性。仿真条件如下：阵元个数 $M = 8$ ，快拍数 $L = 500$ ，非相干信号功率为 σ_s^2 ， $\xi = 5$ ， $\tau = 60$ ， $\varepsilon = 0.01$ ， $\lambda = 0.1P_n$ ，网格数量 $N = 181$ 。信噪比^[25]定义为 $SNR = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sigma_s^2 / \sigma_m^2$ ，其中 σ_m^2 为单噪声功率。均方

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{KQ} \sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^Q (\hat{\theta}_{q,k} - \theta_q)^2}$$

K 为蒙特卡洛试验次数。非均匀高斯噪声协方差设为： $\mathbf{W} = \text{diag}\{2.0 \ 10.0 \ 2.5 \ 5.0 \ 0.5 \ 1.5 \ 3.0 \ 5.0\}$ 。

实验 1 考虑入射角度分别为 -3° 、 10° 和 16° 的非相干信号， $SNR = 0 \text{ dB}$ 和 -5 dB 两种情况。图 1(a) 为 $SNR = 0 \text{ dB}$ 的空域谱。由图 1(a) 知，MC-WLOSRSS，IL1-SRACV 和 MC-MUSIC 算法可正确分辨 10° 和 16° 目标，其他 3 种算法不能正确分辨位于 10° 和 16° 两个目标。图 1(b) 为 $SNR = -5 \text{ dB}$ 的空域谱。由图 1(b) 知，低信噪比情况下，本文所提 MC-WLOSRSS 及 IL1-SRACV 算法可有效分辨 3 个角度，而其它算法均不能辨识 10° 和 16° 两个目标，且与 IL1-SRACV 算法相比，所提算法具有更窄的主瓣和更低的旁瓣。图 1 表明所提算法在非均匀高斯噪声和低信噪比条件下具有较高的角度估计精度和分辨力。

实验 2 考虑入射角度分别为 -3° 、 10° 和 13° 的非相干信号， $SNR = 5 \text{ dB}$ 。图 2 为 6 种算法空域谱。由图 2 可知，本文算法，IL1-SRACV 及理想高斯白噪声下的 L1-SVD (Ideal-L1-SVD) 算法可有效分辨 10° 和 13° 两个邻近角度，而其它 3 种算法失效。IL1-SRACV 及 Ideal-L1-SVD 算法虽可正确辨识两邻近角度，但相对于本文算法而言，此两种算法在两邻近角度之间的谱峰估计精度较差，且由于本文

算法在二阶统计量域下利用更多信号协方差所含角度信息，则本文算法在低信噪比和相邻角度条件下具有较高的角度估计精度和分辨力，并具有更低旁瓣。图 2 表明所提算法对邻近角度具有较高角度分辨力。

实验 3 考虑 3 个入射角度分别为 -3° 、 10° 和 16° 的非相干信号，信噪比 $SNR = 5 \text{ dB}$ ，信源数 $K = 1, 2, 3$ 时，MUSIC, MC-WLOSRSS 算法的 DOA 估计有效性。图 3(a) 为信源数变化对 MUSIC 算法性能影响。从图 3(a) 可知，只有当信源数等于待估计角度数量，即 $K = 3$ 时，MUSIC 才能有效分辨 3 个角度。图 3(b) 为信源数变化对 MC-WLOSRSS 算法性能影响。从图 3(b) 可知，当信源数 K 分别为 1, 2, 3 时，本文所提算法均能有效分辨 3 个角度。图 3 表明，传统子空间类 DOA 估计算法对信源数变化较为敏感，而本文所提算法利用目标空域稀疏性，采用稀疏重构对待估计信号进行稀疏逼近，而无需已知信源先验信息。

实验 4 考虑两个入射角度分别为 -3° 和 5° 的非相干信号，快拍数 $L = 500$ ，信噪比 $SNR = [-8: 2: 12]$ ，进行 200 次蒙特卡洛独立重复实验。从图 4 可以看出，低信噪比条件下，传统 MUSIC 算法的 DOA 估计 RMSE 相对较高，其它 5 种算法有一个相对较低的 RMSE。需要说明的是，在给定仿真条件下，本文所提 MC-WLOSRSS 算法估计性能明显优于 IL1-SRACV, WL1 和 L1-SVD 算法，具有较低 RMSE，特别是在低信噪比条件下，这种优势更加明显，表明所提算法具有较好的 DOA 估计性能。

实验 5 考虑两个入射角度分别为 -3° 和 5° 的非相干信号，信噪比 $SNR = 0 \text{ dB}$ ，快拍数 $L = [100: 1200]$ ，进行 200 次蒙特卡洛独立重复实验。从图 5 可以看出，随着快拍数增加，本文所提 MC-WLOSRSS 算法及其它 5 种算法的 RMSE 均逐渐降

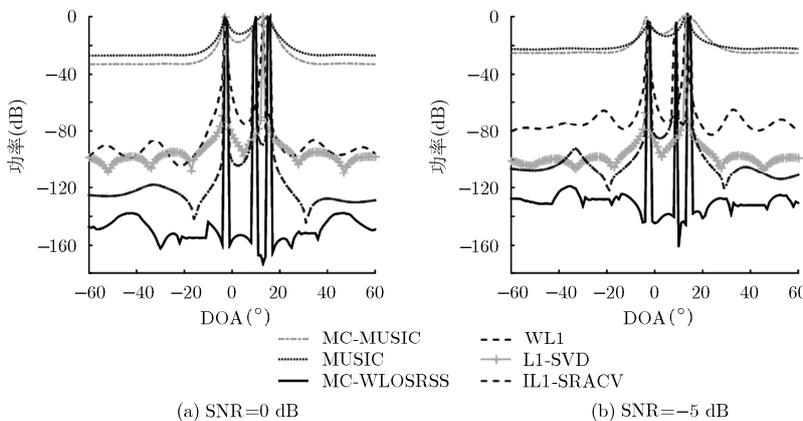


图 1 信噪比 $SNR = 0 \text{ dB}$ 和 -5 dB 条件下的非相干信号空域谱对比图

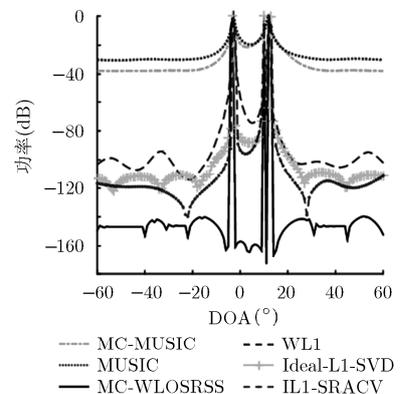


图 2 邻近非相干信号空域谱对比图

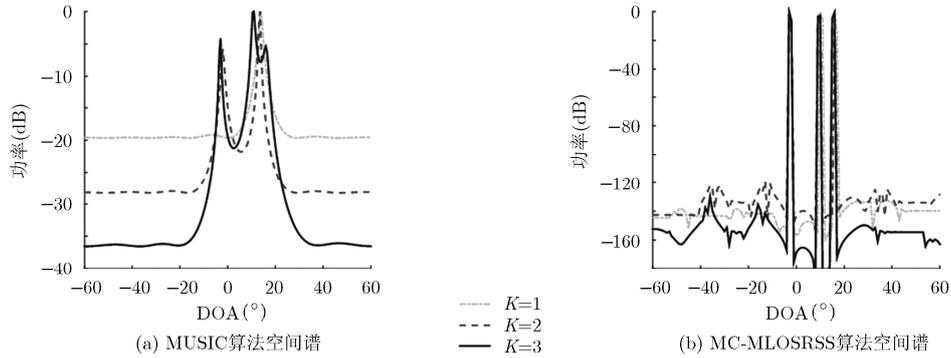


图 3 信源数变化对 MUSIC, MC-WLOSRS 算法的影响

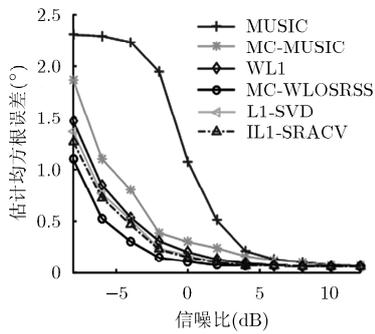


图 4 DOA 估计 RMSE 随信噪比 SNR 的变化对比图

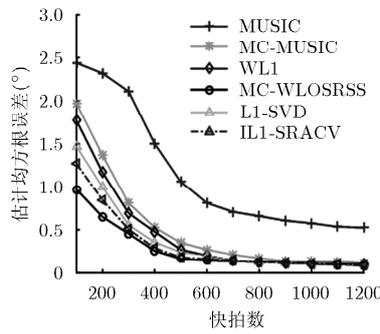


图 5 DOA 估计 RMSE 随快拍数的变化对比图

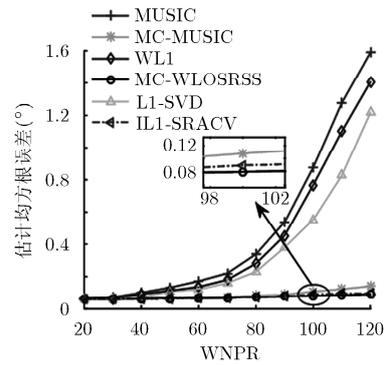


图 6 DOA 估计 RMSE 随 WNPR 变化对比图

低。然而，需要注意的是，所提算法的 RMSE 均低于其它 5 种算法，表明所提算法在非均匀高斯噪声下具有更优的 DOA 参数估计性能。

实验 6 考虑两个入射角度分别为 -3° 和 5° 的非相干信号，信噪比 $SNR = 10$ dB，快拍数 $L = 500$ ，进行 200 次蒙特卡洛独立重复实验。非均匀高斯噪声最大噪声功率与最小功率之比(WNPR)定义为 $WNPR = \sigma_{\max}^2 / \sigma_{\min}^2$ ，其中 $\sigma_{\min}^2 = 0.5, \sigma_{\max}^2 = [10 : 5 : 60]$ ，即 $WNPR = [20 : 120]$ 。由图 6 可以看出，随着 WNPR 的逐渐增大，本文所提算法的 DOA 估计 RMSE 变化范围较小，且在大 WNPR 值条件下，所提 MC-WLOSRS 算法的性能略优于 IL_1 -SRACV 算法及 MC-MUSIC 算法。

为较全面评估上述算法性能，本文在此将分析所提 MC-WLOSRS 算法的计算复杂度。对于所提算法，其解决式(12)中 SDP 优化问题、 $\mathbf{H}^{-1/2}$ 的构建、权值 \mathbf{w} 的构造及信号稀疏重构计算复杂度分别为 $O(M^{3.5}), O(M^3), O(M^2N)$ 和 $O(N^3)$ ，即计算复杂度近似为 $O(M^{3.5} + M^3 + M^2N + N^3)$ 。作为分析比较，L1-SVD, IL_1 -SRACV 和 PAL 算法计算复杂度分别近似为 $O(Q^3N^3), O(M^3 + M^3N^3)$ 和

$O(M^{3.5} + M^3)$ 。当主要考虑对象为信源数或字典个数时，所提算法计算复杂度低于 L1-SVD 和 IL_1 -SRACV 算法，略高于 PAL 方法；当阵元数占主导地位时，所提算法计算复杂度也低于 IL_1 -SRACV 算法，且近似等于 PAL 算法。然而，所提算法在二阶统计量域下可利用协方差矩阵更多的角度信息，从而可提高低信噪比条件下 DOA 估计性能。

6 结束语

基于矩阵补全理论，本文提出了一种二阶统计量域下的加权 L1 稀疏重构 DOA 估计算法。该算法基于矩阵补全理论，并引入弹性正则化因子以重构无噪声信号协方差，从而降低非均匀高斯噪声影响，同时也提高了矩阵补全求解数值稳定性。为进一步提高低信噪比条件下 DOA 估计精度，所提算法在二阶统计量域下通过矩阵求和平均将稀疏多矢量重构问题转化为单矢量重构问题，一定程度上降低了算法计算复杂度。而后，该算法采用加权 L1 范数对二阶统计量域下的稀疏信号单矢量进行重构以实现 DOA 参数估计。仿真结果表明，在非均匀高斯噪声和低信噪比条件下，所提算法具有较好的 DOA 参数估计性能。

参考文献

- [1] VAN TREES H L. Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation and Modulation Theory[M]. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2002: 917–1317.
- [2] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: 10.1109/TAP.1986.1143830.
- [3] LIAO B, HUANG L, GUO C, *et al.* New approaches to direction-of-arrival estimation with sensor arrays in unknown nonuniform noise[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(24): 8982–8989. doi: 10.1109/JSEN.2016.2621057.
- [4] TIAN Y, SHI H, and XU H. DOA estimation in the presence of unknown nonuniform noise with coprime array[J]. *Electronics Letters*, 2016, 53(2): 113–115. doi: 10.1049/el.2016.3944.
- [5] HU R, FU Y, CHEN Z, *et al.* Robust DOA estimation via sparse signal reconstruction with impulsive noise[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 21(6): 1333–1336. doi: 10.1109/LCOMM.2017.2675407.
- [6] MALIOUTOV D, CETIN M, and WILLSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022. doi: 10.1109/TSP.2005.850882.
- [7] PAL P and VAIDYANATHAN P P. A grid-less approach to underdetermined direction of arrival estimation via low rank matrix denoising[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(6): 737–741. doi: 10.1109/LSP.2014.2314175.
- [8] PESAVENTO M and GERSHMAN A B. Maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 49(7): 1310–1324. doi: 10.1109/78.928686.
- [9] HE Z Q, SHI Z P, and HUANG L. Covariance sparsity-aware DOA estimation for nonuniform noise[J]. *Digital Signal Processing*, 2014, 28(1): 75–81. doi: 10.1016/j.dsp.2014.02.013.
- [10] YIN J H and CHEN T Q. Direction-of-arrival estimation using a sparse representation of array covariance vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4489–4493. doi: 10.1109/TSP.2011.2158425.
- [11] LIAO B, GUO C, HUANG L, *et al.* Matrix completion based direction-of-arrival estimation in nonuniform noise[C]. *IEEE International Conference on Digital Signal Processing*, Beijing, China, 2017: 66–69. doi: 10.1109/ICDSP.2016.7868517.
- [12] CANDES E J and RECHT B. Exact matrix completion via convex optimization[J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 9(6): 717–772. doi: 10.1007/s10208-009-9045-5.
- [13] CANDES E J and PLAN Y. Matrix completion with noise[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2009, 98(6): 925–936. doi: 10.1109/JPROC.2009.2035722.
- [14] JIANG X, ZHONG Z, LIU X, *et al.* Robust matrix completion via alternating projection[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(5): 579–583. doi: 10.1109/LSP.2017.2685518.
- [15] CANDES E J, WAKIN M B, and BOYD S P. Enhancing sparsity by reweighted L1 minimization[J]. *Journal of Fourier Analysis & Applications*, 2008, 14(5): 877–905. doi: 10.1007/s00041-008-9045-x.
- [16] 方庆园, 韩勇, 金铭, 等. 基于噪声子空间特征值重构的 DOA 估计算法[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(12): 2876–2881. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.02014.
- [17] FANG Qingyuan, HAN Yong, JIN Ming, *et al.* DOA estimation based on eigenvalue reconstruction of noise subspace[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(12): 2876–2881. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.02014.
- [18] SUN S and PETROPULU A P. Waveform design for MIMO radars with matrix completion[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2015, 9(8): 1400–1414. doi: 10.1109/JSTSP.2015.2469641.
- [19] CAI J F, CANDES E J, and SHEN Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, 20(4): 1956–1982. doi: 10.1137/080738970.
- [20] HOR R A and JOHNSON C R. *Matrix Analysis*[M]. Cambridge, U.K: Cambridge University Press, 1985: 1–162.
- [21] GRANT M and BOYD S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1[OL]. <http://cvxr.com/cvx>, Jun.2015.
- [22] 冯明月, 何明浩, 徐璟, 等. 低信噪比条件下宽带欠定信号高精度 DOA 估计[J]. *电子与信息学报*, 2017, 39(6): 1340–1347. doi: 10.11999/JEIT160921.
- [23] FENG Mingyue, HE Minghao, XU Jing, *et al.* High accuracy DOA estimation under low SNR condition for wideband underdetermined signals[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(6): 1340–1347. doi: 10.11999/JEIT160921.
- [24] OTTERSTEN B, STOICA P, and ROY R. Covariance matching estimation techniques for array signal processing applications[J]. *Digital Signal Processing*, 1998, 8(3): 185–210. doi: 10.1006/dspr.1998.0316.
- [25] TIAN Y, SUN X, and ZHAO S. DOA and power estimation using a sparse representation of second-order statistics vector and l_1 -norm approximation[J]. *Signal Processing*, 2014, 105(12): 98–108. doi: 10.1016/j.sigpro.2014.05.014.
- [26] LOBO M, VANDENBERGHE L, BOYD S, *et al.* Application of second-order cone programming[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 1998, 284(1/3): 193–228. doi: 10.1016/S0024-3795(98)10032-0.
- [27] LIAO B, CHAN S C, HUANG L, *et al.* Iterative methods for subspace and DOA estimation in nonuniform noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(12): 3008–3020. doi: 10.1109/TSP.2016.2537265.
- 王洪雁: 男, 1979 年生, 博士, 副教授, 研究方向为 MIMO 雷达信号处理、毫米波通信。
- 房云飞: 男, 1991 年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理、毫米波通信。
- 裴炳南: 男, 1956 年生, 教授, 研究方向为雷达信号处理、毫米波通信。