

一种基于角度惩罚距离的高维多目标进化算法

毕晓君 王朝*

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院 哈尔滨 150001)

摘要: 为了使多目标进化算法在收敛性和分布性之间保持平衡, 该文提出一种基于角度惩罚距离的高维多目标进化算法(Many-Objective Evolutionary Algorithm based on Angle Penalized Distance, MaOEA-APD)。首先, 综合考虑收敛性和分布性在进化不同阶段的重要性, 构造一种角度惩罚距离, 使两者随进化进程动态平衡; 其次, 开发基于删除劣质个体的环境选择策略, 在提高种群分布性的同时提高收敛性; 最后, 根据环境选择的原理, 设计与之相协调且互补的匹配选择过程, 提高算法的整体进化效率。将所提算法与目前国内外性能优异的3种高维多目标进化算法进行对比, 实验结果表明在WFG标准测试函数集上, 该文算法相对于其他算法, 综合性能有了较大的提升。

关键词: 高维多目标优化; 进化算法; 删除策略; 角度惩罚距离

中图分类号: TP18

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)02-0314-09

DOI: 10.11999/JEIT170454

A Many-objective Evolutionary Algorithm Based on Angle Penalized Distance

BI Xiaojun WANG Chao

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: In order to balance between convergence and distribution in Multi-Objective Evolutionary Algorithms (MOEAs), a Many-Objective Evolutionary Algorithm based on Angle Penalized Distance (MaOEA-APD) is proposed. Firstly, considering the importance of convergence and diversity in the different stages of the evolutionary process, an angle penalized distance is constructed to dynamically balance between them. Then, the environmental selection based on removing the worse individual is designed to maintain the distribution and improve the convergence. Finally, the mating selection is designed based on the principle of the environmental selection. Both are complement and coordinated to each other for improving the evolutionary efficiency of the algorithm. Compared with three state-of-the-art many-objective evolutionary algorithms (MaOEAs), the experimental results on WFG test suite show that MaOEA-APD has more advantage than other algorithms in terms of the overall performance.

Key words: Many-objective optimization; Evolutionary algorithm; Elimination strategy; Angle penalized distance

1 引言

高维多目标优化问题(Many-Objective Optimization Problems, MaOPs)是指目标数大于3的多目标优化问题, 因为具有更多的目标需要处理, 解之间的优劣关系变得更加难以评价, 同时目标数量的增加会提高目标空间的复杂度, 解集难以收敛, 其分布性也更加难以维持, 因此高维多目标优化问题是目前优化领域公认的研究难点和热点^[1,2]。目前, 高维多目标优化在科学研究和工程管理等众多领域

的应用需求日益突出, 例如雷达波形优化问题^[3]、地下水监控问题^[4]、发动机标定问题^[5]等, 开展高维多目标进化算法的研究具有重要的理论意义和实际应用价值^[6]。

在高维多目标进化算法中, 最关键的是如何保持解集收敛性和分布性之间的平衡, 以得到最好的综合性能^[7]。近期有学者通过在分布性维护操作中引入额外的收敛信息, 用以解决收敛性和分布性之间失衡的问题。比如, 文献[8]通过个体在单位超平面上投影点的密度间接反映其分布性, 引入基于成绩标量函数(Achievement Scalarizing Function, ASF)的收敛度指标, 消除了个体收敛程度对分布性评估的影响, 但是在超平面上均匀分布的投影点并不能保证映射的解集是均匀分布的。文献[9]通过引入点到超平面的垂直距离这一收敛信息, 并结合邻域惩罚的思想, 定义具有优秀收敛性和分布性的拐点,

收稿日期: 2017-05-12; 改回日期: 2017-09-22; 网络出版: 2017-11-08

*通信作者: 王朝 wangzhao@hrbeu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61175126), 中央高校基本科研业务费专项资金(HEUCFP201709)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61175126), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (HEUCFP201709)

使得算法的综合性能大大提高,但是拐点比率却因求解问题特性的不同而不同,很难统一设置。最近研究表明:角度信息能更精确地反映个体分布性,并能很好地融合收敛信息提高收敛性^[10]。文献[11]构造一种基于角度信息的惩罚距离,能根据进化进程动态地调整收敛性和分布性的重要程度,但需要预先设置均匀分布的权重向量,一方面这在高维情况下非常困难,另一方面对于不规则前沿面问题,固定均匀分布的权重向量并不能保证最终解集的均匀分布性。文献[12]利用最小向量夹角找出一对相似个体,采用删除策略删除其中收敛性较差或分布性较差的个体,试图在两者之间取得平衡,但是差距阈值不易设定。文献[13]提出的最大向量夹角优先选取策略很好地维护了种群分布性,在角度阈值之内的收敛性差的个体可以被替换,以期望提高收敛性,但是角度阈值对问题前沿面形状敏感,不便于调节。

综上所述,高维多目标进化算法的核心在于如何保持收敛性和分布性之间的平衡。为此,基于角度信息的求解思路,本文提出一种基于角度惩罚距离的高维多目标进化算法(Many-Objective Evolutionary Algorithm based on Angle Penalized Distance, MaOEA-APD)。首先,由于在进化前期需要偏重收敛性而在进化后期需要偏重分布性,构造一种角度惩罚距离,综合考虑收敛性和分布性在进化不同阶段的重要性,使两者随进化进程动态平衡;其次,不同于以往基于选择优秀个体的环境选择策略,本文提出的删除策略是在环境选择阶段通过选取劣质个体进行删除,能同时提高种群的收敛性和分布性;最后,根据环境选择的机制和原理,设计基于收敛性度量和分布性度量的匹配选择过程,两者相互协调,提高算法的整体进化效率。

2 基于角度惩罚距离的高维多目标进化算法 MaOEA-APD

对于高维多目标进化算法,最关键的是要保持收敛性和分布性之间的平衡,为此本文对环境选择过程的分布性维护阶段进行了改进:首先定义收敛性度量和分布性度量,然后基于这两个度量构造能随进化进程动态平衡收敛性和分布性的角度惩罚距离,最后采用这一距离定义劣质个体,开发基于劣质个体的删除策略,提高种群整体的收敛性和分布性。同时,为了与环境选择过程相协调,对匹配选择过程进行相应改进。值得注意的是,考虑到最小化与最大化问题可以相互转化,本文只针对最小化高维多目标优化问题进行研究。

2.1 收敛性度量和分布性度量

收敛性度量定义为个体目标向量的 2 范数距

离。尽管文献[14]中表明不同范数的收敛效果会受到 Pareto 前沿面形状的影响,但由于本文收敛性比较是在一对夹角最小的个体之间进行,邻域关系使其受 Pareto 前沿面形状的影响较小。一般情况下,这里可以选取任意范数距离来表征个体的收敛程度,为方便后面角度的计算,本文选取 2 范数距离,其计算公式为

$$d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{F}^n(\mathbf{x})\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^M f_i^n(\mathbf{x})^2} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{F}^n(\mathbf{x})$ 表示归一化后的目标向量, M 表示目标维数, $d(\mathbf{x})$ 值越小表示个体 $\mathbf{x}$ 的收敛性越好。

传统的分布性维护操作,如小生境、拥挤距离、聚类等,都是基于距离信息的评价准则,会导致一些收敛性很差的个体会获得很好的密度估计值^[15]。基于角度信息的评价准则能消除个体收敛程度的影响,很纯粹地对个体的分布性进行评价,并能很好地结合收敛信息,缓解 Pareto 支配关系在高维情况下收敛性不足的问题。这里,个体 $\mathbf{x}$ 分布性度量用与种群 P 中其他个体的最小夹角表示,其计算公式为

$$\theta(\mathbf{x}) = \min_{y \in P, y \neq \mathbf{x}} \text{angle}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\text{angle}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos \left(\frac{\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}^n(\mathbf{y})}{\|\mathbf{F}^n(\mathbf{x})\|_2 \cdot \|\mathbf{F}^n(\mathbf{y})\|_2} \right) \quad (2)$$

式中, $\cdot$ 表示向量的内积, $\theta(\mathbf{x})$ 值越大表示个体 $\mathbf{x}$ 的分布性越好。

2.2 角度惩罚距离

对于高维多目标优化问题,收敛性和分布性的重要程度不能在整个进化过程中一成不变:在进化前期,由于个体在高维空间中极度稀疏分布,这时需要偏重收敛性使种群快速靠近 Pareto 前沿面;在进化后期,种群几乎收敛到 Pareto 前沿面,这时需要偏重分布性以使种群很好地在前沿面上分散开^[11]。文献[11]中的角度惩罚距离(Angle Penalized Distance, APD)能随进化进程动态平衡收敛性和分布性,很好地满足以上要求,其表达式为

$$\text{APD}(\mathbf{x}) = (1 + P(\theta)) \cdot d(\mathbf{x}) \quad (3)$$

式中, $d(\mathbf{x})$ 表示个体 $\mathbf{x}$ 的 2 范数距离, $P(\theta)$ 表示角度惩罚因子。

$$P(\theta) = M \cdot \left(\frac{G}{G_{\max}} \right)^\alpha \cdot \frac{\theta(\mathbf{x})}{\gamma} \quad (4)$$

式中, G 表示当前迭代数, $G_{\max}$ 表示最大迭代次数。 α 用以控制惩罚因子 $P(\theta)$ 随迭代次数变化的快慢。 $\theta(\mathbf{x})$ 表示个体 $\mathbf{x}$ 与其对应参考方向的夹角,其值越小表示个体分布性越好; γ 表示个体 $\mathbf{x}$ 所对应参考方向与其他所有参考方向夹角最小的角,用以归一

化 $\theta(\mathbf{x})$ 。

但由于本文不存在通过预设均匀分布的参考方向来定向引导个体进化,因此需对上述 $P(\theta)$ 结合个体自适应进化的特点进行改进,这里选取与之夹角最小的个体的方向替换参考方向,则改进 $P(\theta)$ 表达式为

$$P(\theta) = M \left(\frac{G}{G_{\max}} \right)^\alpha \cos(\theta(\mathbf{x})) \quad (5)$$

式中, $\theta(\mathbf{x})$ 表示个体与种群中其他个体的最小夹角,即2.1节定义的分布性度量。由于 $\theta(\mathbf{x})$ 值是越大表明分布性越好,为此本文取其余弦值使之与式(4)变化规律一致,且本身位于 $[0,1]$ 之间,无需归一化。

2.3 基于角度惩罚距离的删除策略

传统多目标进化算法的环境选择策略只针对临界层个体进行分布性选择操作,而前面较优 Pareto 等级层的个体直接进入下一代,但这些个体极有可能分布性远差于临界层的个体,严重降低种群分布性,另外这些个体有可能收敛性(如2.1节定义的2范数距离)还不如临界层个体。具体情形如图1所示,个体 a, b, c, d, f, g 属于 Pareto 等级第1层,个体 e 属于第2层,个体 b 无论是用拥挤距离还是本文提出的分布性度量,其分布性都差于个体 e ,尽管位于较优等级层,其收敛性也不如个体 e ,应当首先被删除。因此,本文将整个种群看成一个整体,忽略个体所处的 Pareto 等级层,综合2范数距离和最小角度选择其中最差的个体删除。

对于种群来说,删除其中一个个体势必会增加种群整体的分布性和收敛性,而基于角度惩罚距离的删除策略可以最大化这两方面的提升,以下是具体的删除过程。首先,寻找种群 P 中向量夹角最小的一对个体,即它们位于相似的搜索方向上,因此没有必要同时保留这两个个体,需选取其中性能较差的劣质个体进行删除。这里,劣质个体不能单单只依据收敛性差或是分布性差来评价,而应结合进化进程动态地定义,而2.2节构造的 APD 能满足这一要求。

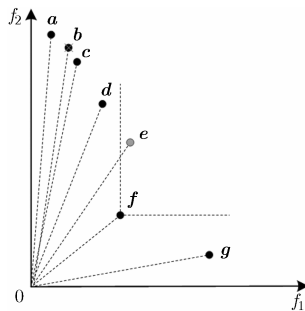


图1 删除策略示意图

基于 APD 的删除过程如图2所示。在进化前期,如图2(a)所示,由于夹角最小的一对个体 a, b 都远离 Pareto 前沿面,个体的进化应以收敛性为主,由于 $G \ll G_{\max}$, $P(\theta) \approx 0$, 会有 $\text{APD}(\mathbf{x}) \approx d(\mathbf{x})$, $d(\mathbf{a}) < d(\mathbf{b}) \Rightarrow \text{APD}(\mathbf{a}) < \text{APD}(\mathbf{b})$, 个体 b 会被删除,满足收敛性要求;随着 G 逐渐接近 $G_{\max}$, $d(\mathbf{x})$ 和 $\theta(\mathbf{x})$ 会同时对个体进化起作用;在进化后期,如图2(b)所示,种群位于 Pareto 前沿面附近且夹角最小的一对个体 a, b 的收敛程度差异微小,这时分布性要占据主导地位使个体在 Pareto 前沿面均匀分布,由于 $d(\mathbf{a}) \approx d(\mathbf{b})$, $G \approx G_{\max}$, 会有 $\text{APD}(\mathbf{x}) \propto \cos(\theta(\mathbf{x}))$, $\theta(\mathbf{a}) < \theta(\mathbf{b}) \Rightarrow \text{APD}(\mathbf{b}) < \text{APD}(\mathbf{a})$, 个体 a 会被删除,满足分布性要求。值得注意的是,在删除操作中,夹角最小的一对个体的分布性评估采用到其他个体(不包括这对个体)的最小夹角。

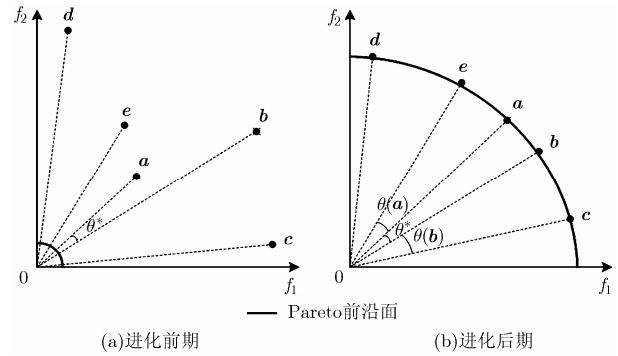


图2 基于 APD 的删除过程示意图

基于角度惩罚距离的删除策略(APD-based Elimination)流程如表1的算法1所示。

2.4 匹配选择的改进

匹配选择旨在选择优秀的个体进行交叉变异,对算法的性能起着重要的作用。首先,收敛性好的个体应该以较大概率被选中去生成后代个体,然而由于 Pareto 支配关系在高维多目标优化问题中无法有效区分个体的收敛程度,导致这一阶段选择的个

表1 基于角度惩罚的删除策略流程

算法1 基于角度惩罚距离的删除策略。

输入: 未删减种群 P , 收敛性度量 d , 分布性度量 θ

输出: 删减种群 P

- (1) 确定种群 P 中夹角最小的一对个体 (a, b)
- (2) **if** $\text{APD}(\mathbf{a}) < \text{APD}(\mathbf{b})$
- (3) $\text{delet} = b$
- (4) **else**
- (5) $\text{delet} = a$
- (6) **end if**
- (7) $P = P \setminus \{\text{delet}\}$

体是以分布性为主，影响了算法的收敛性能。所以，高维多目标进化算法需要引入选择压力更强的比较准则来区分个体。为此，本文采用目前评价收敛性效果最好的成绩标量函数 ASF 评价个体的收敛程度，具体公式如式(6)所示。

$$\text{ASF}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{\min}, \mathbf{w}) = \max_{i=1}^M \left(\frac{f_i(\mathbf{x}) - z_i^{\min}}{w_i} \right) \quad (6)$$

式中， $z_i^{\min}$ 表示种群 P 中所有个体在第 i 维目标上的最小值， $\mathbf{w}$ 表示个体 $\mathbf{x}$ 所对应的偏好权重向量，其第 i 维数值计算公式如式(7)：

$$w_i = \frac{f_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^M f_j(\mathbf{x})} \quad (7)$$

为了使式(6)有意义，当 $w_i = 0$ 时，一般取较小值 10^{-6} 。

虽然 2 范数距离也能对个体的收敛性进行评价，但其受 Pareto 前沿面形状的影响，而 ASF 是基于自身权重向量方向上的收敛程度，能客观反映个体的收敛性。结合环境选择中定义的个体分布性度量 θ 值，设计如下与之相协调的匹配选择过程：随机从种群中挑选两个个体，如果一个个体的 ASF 值且 θ 值均优于另一个个体，则选择前者加入匹配池；如果两个个体在这两个值上互不占优，则随机选取一个个体加入匹配池。MaOEA-APD 的匹配选择流程如表 2 的算法 2 所示。

2.5 算法流程

为了更好地平衡解集收敛性和分布性，本文分别对环境选择阶段和匹配选择阶段进行改进，提出

表 2 MaOEA-APD 的匹配选择流程

算法 2 匹配选择。

输入：种群 P ，匹配池大小 N

输出：父代种群 Q

- (1) $Q = \emptyset$
- (2) **while** $|Q| < N$ **do**
- (3) 从种群 P 随机选择两个个体 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$
- (4) **if** $\text{ASF}(\mathbf{a}) < \text{ASF}(\mathbf{b}) \& \& \theta(\mathbf{a}) > \theta(\mathbf{b})$
- (5) $Q = Q \cup \{\mathbf{a}\}$
- (6) **else if** $\text{ASF}(\mathbf{b}) < \text{ASF}(\mathbf{a}) \& \& \theta(\mathbf{b}) > \theta(\mathbf{a})$
- (7) $Q = Q \cup \{\mathbf{b}\}$
- (8) **else**
- (9) **if** $\text{rand}() < 0.5$ **then**
- (10) $Q = Q \cup \{\mathbf{a}\}$
- (11) **else**
- (12) $Q = Q \cup \{\mathbf{b}\}$
- (13) **end if**
- (14) **end if**
- (15) **end while**

基于角度惩罚距离的高维多目标进化算法 MaOEA-APD，其总体流程如表 3 的算法 3 所示。

表 3 基于角度惩罚距离的高维多目标进化算法 MaOEA-APD 总体流程

算法 3 高维多目标进化算法 MaOEA-APD。

输入：种群大小 N ，目标维数 M ，最大迭代次数 $G_{\max}$

输出：种群 P

- (1) 随机初始化种群 P
- (2) $G = 0$
- (3) **while** $G < G_{\max}$ **do**
- (4) $P' = \text{Mating-selection}(P)$
- (5) $Q = \text{Genetic-operator}(P')$
- (6) $U = P \cup Q$
- (7) $P = \text{Environmental-selection}(U)$
- (8) **end while**

在算法 3 中，环境选择的流程如表 4 的算法 4 所示。首先对合并种群 U 进行快速非支配排序，然后采用文献[16]的极端点归一化技术对归档集 P 进行归一化，接着分别计算个体的收敛性度量和分布性度量，最后采用基于 APD 的删除策略删除劣质个体。

2.6 计算复杂度分析

MaOEA-APD 的算法复杂度主要集中在环境选择和匹配选择。设种群规模为 N ，目标维数为 M ，这里考虑最坏的情况，即所有的个体都是互不支配的。在环境选择阶段，合并种群的非支配排序计算复杂度为 $O(MN^2)$ ，极端点归一化的计算复杂度为

表 4 环境选择流程

算法 4 环境选择。

输入：合并种群 U ，种群大小 N

输出：种群 P

- (1) $(F_1, F_2, \dots) = \text{Non-dominated-sort}(U)$
- (2) $P = \emptyset, i = 1$
- (3) **while** $|P| < N$ **do**
- (4) $P = P \cup F_i, i = i + 1$
- (5) **end while**
- (6) **if** $|P| = N$ **then**
- (7) **break**
- (8) **else**
- (9) $P' = \text{Normalization}(P)$
- (10) **Compute** $d(P')$
- (11) **Compute** $\theta(P')$
- (12) $K = |P| - N, k = 0$
- (13) **while** $k < K$ **do**
- (14) $P = \text{APD-based Elimination}(P, d, \theta)$
- (15) **end while**
- (16) **end if**

$O(M^2N)$, 种群收敛性度量的计算复杂度为 $O(MN)$, 种群分布性度量的计算复杂度为 $O(N^2)$ 。基于 APD 的删除策略的计算复杂度分别为 $O(N)$, 由于这个过程在最坏情况下需要被执行 N 次, 总计算复杂度为 $O(N^2)$ 。综合考虑这 5 个过程, 环境选择总的计算复杂度为 $O(MN^2)$ 。匹配选择中 ASF 值计算所需复杂度大小为 $O(MN)$, 其中 θ 值可以通过环境选择过程得到, 无需重复计算。为了构建规模为 N 的匹配池, 需对 ASF 值和 θ 值进行大小比较, 所需复杂度为 $O(N)$ 。最后, MaOEA-APD 总的计算复杂度为 $O(MN^2)$ 。

3 仿真实验与结果分析

为了测试本文算法 MaOEA-APD 的性能, 选取目前性能优异的 3 种算法进行对比, 分别是基于权重向量的算法 RVEA^[11], 以及 2 种基于个体自适应进化的算法 KnEA^[9]和 VaEA^[13]。所有的算法都是在多目标进化算法开源平台 PlatEMO 上运行。实验仿真都是在 Intel Pentium、4G 内存、2.6 GHz 主频, win10 64 位操作系统的计算机上运行。

3.1 测试函数及评价指标

选取目前高维多目标优化领域通用的 WFG^[17]测试函数集进行仿真实验。WFG1-3 函数 Pareto 前沿面不规则: WFG1 是混合型有偏好的、WFG2 是凸面不连续且多模态; WFG3 是线性退化的。WFG4-9 函数 Pareto 前沿面形状都是凹面超椭圆: WFG4 是多模态; WFG5 具有欺骗性; WFG6 是不可分的; WFG7 是有偏好的; WFG8 是不可分且有偏好的; WFG9 是多模、有偏好、不可分且具有欺骗性。所有测试函数的决策变量个数 $V = k + l$, 其中位置变量 $k = M - 1$, M 为目标维数; 距离变量 $l = 10$ 。值得注意的是, WFG 所有测试函数都具有不同量纲的目标值。

文中采用反世代距离 (Inverted Generation Distance, IGD)^[18]测量算法的综合性能, 能够同时评价解集的收敛性和分布性, 其定义为

$$\text{IGD}(P, P^*) = \frac{\sum_{v \in P^*} d(v, P)}{|P^*|} \quad (8)$$

式中, P 表示算法在目标空间获得的最终解集, P^* 表示均匀分布的真实 Pareto 前沿, $d(v, P)$ 表示真实 Pareto 前沿上的点 $v \in P^*$ 到最终解集的最小欧氏距离, $|P^*|$ 表示 P^* 的势, 即真实 Pareto 前沿上点的总数。只有当解集的收敛性和分布性都好时, IGD 的值才会小, 所以 IGD 越小, 算法的综合性能越好。为了计算 IGD 指标, 为每个测试函数生成了 10000 个均匀分布的非支配解近似表征 Pareto 前沿。

3.2 实验参数设置

算法在每一例测试函数上独立运行 30 次, $G_{\max} = 1000$ 。交叉算子采用模拟二进制交叉, $\eta_c = 30$, 交叉率为 $p_c = 1.0$; 变异算子采用多项式变异 $\eta_m = 20$, $p_m = 1/V$ 。由于 RVEA 的种群大小与均匀分布的权重向量规模有关, 且由目标维数 M 和每维目标上分段数 H 的组合数决定, 所以不能随意设置, 这里采用文献[16]中的双层分布法, 具体参数设置如表 5 所示。为了公平比较, 其他 3 种算法的种群大小与之相同。MaOEA-APD 和 RVEA 中惩罚因子变化率 $\alpha = 2$; KnEA 中拐点比率 T 参考原文设置; VaEA 中角度阈值 $\delta = (\pi/2)/(N+1)$ 。

表 5 权重向量规模和种群大小

M	权重向量规模	种群大小 N
3	91	91
5	210	210
8	156($H_1 = 3, H_2 = 2$)	156
10	275($H_1 = 3, H_2 = 2$)	275
15	135($H_1 = 2, H_2 = 1$)	135

注: H_1 表示双层分布法中外层分段数, H_2 表示内层分段数

3.3 实验仿真与分析

3.3.1 α 参数分析 式(5)中惩罚因子变化率 α 需人为设置, 下面通过对其取不同的值分析其对算法性能的影响。这里对参数 α 取值[1,9]之间的 9 个整数, 其值越大表示收敛性越在前期占主导地位, 并分别选取 3 到 15 目标的多模态问题 WFG4 和有偏好问题 WFG7 进行实验以统计其变化规律, 实验独立重复进行 30 次, 求取 IGD 平均值, 最后以折线图的形式表现, 如图 3 所示。

从图 3 中可以看出: (1)参数 α 在 WFG4 和 WFG7 测试问题上的变化规律大致相同, 说明参数 α 对问题属性不是很敏感; (2)对于 3 目标和 5 目标, IGD 值随参数 α 的变化相对平稳, 说明 MaOEA-APD 算法在低维空间对参数 α 不是很敏感; (3)对于 8, 10 和 15 目标, IGD 值变化规律大致是先减小后增大, 特别对于大于 3 的 α 值, IGD 值明显恶化, 这说明在高维空间中相对较小的 α 值能使收敛性和分布性的重要程度在进化前后期的分配更为合理。

综上所述, MaOEA-APD 算法性能对参数 α 不是很敏感, 一般情况下较小的 α 值能取得相对较好的结果。因此, 本文中取 $\alpha = 2$ 。

3.3.2 实验结果分析 MaOEA-APD 与 RVEA, KnEA 和 VaEA 在 WFG 测试函数集上 IGD 统计结果如表 6 所示, 分别为 30 次独立运行结果的平均值

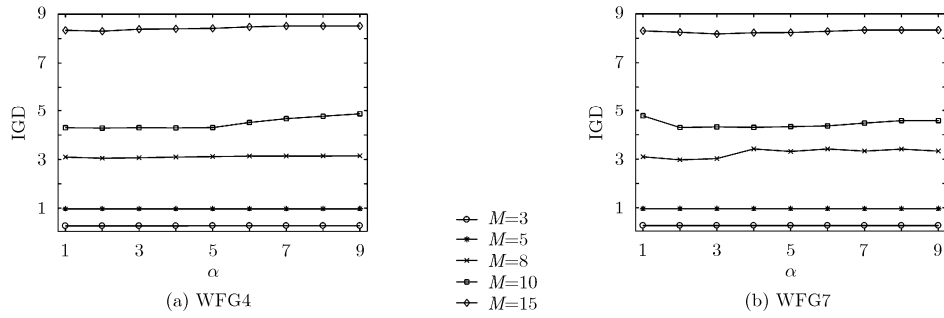


图3 在9个不同 α 值下, MaOEA-APD在3到15目标WFG4和WFG7测试问题上获得的IGD平均值

与标准差,其中最好的结果用黑色加粗表示。另外,为了比较MaOEA-APD与另外3种算法获得的平均IGD值之间差异的显著性,本文采用Wilcoxon秩和检验进行两两比较,显著性水平取0.05,表中“+”、“-”、“ $\approx$ ”分别表示其他算法显著优于、显著劣于和无差别于MaOEA-APD。

从表6的数据中可以看出:MaOEA-APD算法整体表现最好,能够有效处理所有的测试函数,尤其是WFG3测试问题上,在所有不同维数的目标上都取得了最优结果,说明基于APD的删除策略非常适合处理退化问题。另外在WFG1, WFG5, WFG7和WFG9的低维目标以及WFG8的高维目标上取得最好的整体结果,说明基于向量夹角的分布性度量对有偏好的问题能很好地保持算法的分布性。相比之下,在WFG2和WFG4两个多模态问题上效果不太突出,说明MaOEA-APD算法的收敛能力不是很优秀,原因在于MaOEA-APD算法虽然采用了非支配排序,但并不是从临界层中选择分布性好的个体进入下一代,而是将整个种群作为整体,忽略个体所处的Pareto等级层,从中挑选最相似的一对个体,其实是偏重分布性轻收敛性。

VaEA算法整体表现与MaOEA-APD接近,在WFG5, WFG6和WFG7的高维目标上取得了最好的结果,原因在于VaEA算法也采用了基于向量夹角的分布性度量,能很好地在有偏好的问题上保持分布性,由于提前预设好角度阈值,大致划定了个体分布的范围,能在高维目标情况下保持更好的分布性。但是其角度阈值的设定是假设Pareto前沿面在整个目标空间上均匀分布,对于WFG1, WFG2和WFG3问题的Pareto前沿面不规则情况,这一理想情况下的角度阈值就不太合适,导致在这3个问题上效果不太理想。由于其选择机制是从临界层中选择个体,前面较优等级层的个体直接进入下一代,且其中个体如果收敛性差于临界层的个体还会被替换,大大加强了算法的收敛能力,使其在WFG4上取得了最好的效果。

KnEA算法在WFG1和WFG9的高维目标上取得了最好的结果,并且KnEA在大部分高维目标例子上具有很好的效果,其原因是一般在分布性维护阶段,首先考虑的是分布性,其次是收敛性;而基于拐点的邻域惩罚机制选择离超平面最远的个体,首先考虑的是收敛性,然后邻域惩罚保证分布性,使其在高维目标情况下具有很强的收敛能力,同时能保证一定的分布性。

RVEA算法在WFG8问题上有优异的表现,这说明基于角度惩罚距离的分布性维护策略能很好地平衡收敛性和分布性。值得注意的是,基于权重向量定向进化的RVEA在WFG1, WFG2和WFG3问题上的实验结果都明显差于基于个体自适应进化的MaOEA-APD, VaEA和KnEA。这是因为对于不规则前沿面问题,固定均匀分布的权重向量由于不能随前沿面特性自适应调整,导致有的权重向量关联多个个体而有的权重向量没有个体相关联,严重影响算法的分布性。

最后从Wilcoxon秩和检验的统计结果中可以看出:在45例WFG测试问题中, MaOEA-APD显著优于RVEA 28次、KnEA 26次和VaEA 19次,由此说明在WFG测试函数集上,本文算法相对于其他算法在IGD指标上具有较大的优势,具有最好的综合性能。

为了直观地反映所有算法得到的最终解集在高维目标空间中的分布情况,本文采用平行坐标来可视化高维数据,其中数据来源于30次独立运行中IGD值最接近平均值的那一组数据。限于篇幅,本文只给出了4种算法在15目标WFG8上最终解集的平行坐标图,如图4所示。在高维目标空间中的一个点被表示为一条拐点在 M 条平行坐标轴的折线,在第 k 个坐标轴上的位置就表示第 k 维的目标函数值,其中WFG8问题的第 k 维目标函数值在 $[0, 2k]$ 之间。从图中可以看出:MaOEA-APD和VaEA在收敛性和分布性上都获得了满意的效果;RVEA和KnEA均能满足收敛性要求,但都存在某

表6 4种算法在不同目标维数的WFG测试例子上获得的IGD平均值与标准差

问题	M	RVEA	KnEA	VaEA	MaOEA-APD
WFG1	3	1.7413e-1 (3.86e-3) -	2.3341e-1 (5.42e-2) -	1.6264e-1 (1.34e-2)≈	1.4933e-1 (1.18e-2)
	5	3.7504e-1 (8.80e-3) ≈	4.1183e-1 (6.02e-3) -	4.3545e-1 (1.95e-2) -	3.8682e-1 (7.32e-3)
	8	1.1549e+0 (7.29e-2) -	9.8141e-1 (1.13e-1) -	1.0018e+0 (1.16e-1) -	8.7372e-1 (4.20e-2)
	10	1.6231e+0 (8.49e-2) -	1.1455e+0 (3.12e-2) +	1.2763e+0 (5.91e-2) -	1.2388e+0 (4.73e-2)
	15	3.1637e+0 (3.93e-1) -	2.7300e+0 (1.07e-1) +	2.7445e+0 (1.08e-1)≈	2.7759e+0 (3.86e-1)
WFG2	3	2.1584e-1 (1.52e-2) -	2.4677e-1 (2.04e-2) -	2.5969e-1 (2.09e-2) -	1.9388e-1 (9.32e-3)
	5	8.0769e-1 (5.59e-2) -	4.7590e-1 (2.80e-2) +	7.8065e-1 (7.28e-2)≈	7.7740e-1 (2.78e-2)
	8	1.9366e+0 (1.91e-1) +	1.1487e+0 (4.40e-2) +	2.1112e+0 (1.98e-1) -	1.9528e+0 (5.67e-1)
	10	6.0251e+0 (7.57e-1) -	1.4486e+0 (1.44e-1) +	2.4523e+0 (1.37e-1) +	2.8051e+0 (7.96e-1)
	15	9.4410e+0 (2.01e+0) -	6.4208e+0 (1.19e+0) +	2.1767e+0 (2.53e-1) +	8.6271e+0 (1.48e+0)
WFG3	3	2.3209e-1 (1.26e-2) -	1.1743e-1 (4.52e-3)≈	1.4120e-1 (1.46e-2) -	1.1345e-1 (1.08e-2)
	5	4.7176e-1 (3.44e-2) ≈	5.5148e-1 (9.49e-2) -	5.2604e-1 (3.36e-2) -	4.5798e-1 (4.94e-2)
	8	2.5857e+0 (8.23e-1) -	1.6581e+0 (5.24e-1) -	1.3887e+0 (1.72e-1) -	1.0459e+0 (2.77e-1)
	10	3.3495e+0 (6.70e-1) -	2.3271e+0 (7.52e-1) -	1.8758e+0 (2.70e-1)≈	1.6619e+0 (4.88e-1)
	15	9.3127e+0 (3.18e+0) -	5.5335e+0 (7.38e-1) -	3.5660e+0 (4.47e-1) -	2.9039e+0 (3.77e-1)
WFG4	3	2.4269e-1 (3.49e-3) -	2.7662e-1 (1.64e-2) -	2.3220e-1 (4.37e-3) -	2.2226e-1 (2.84e-4)
	5	9.6161e-1 (1.51e-3) +	1.0174e+0 (5.18e-3) -	9.4592e-1 (7.54e-3) +	9.6682e-1 (1.33e-3)
	8	3.0292e+0 (2.58e-2)≈	3.3551e+0 (5.14e-3) -	3.0051e+0 (1.10e-2)≈	3.0524e+0 (1.92e-1)
	10	4.0758e+0 (3.35e-2) +	4.0818e+0 (2.20e-2) +	3.8593e+0 (2.94e-2) +	4.2877e+0 (8.99e-3)
	15	8.5907e+0 (1.72e-1) -	8.1316e+0 (1.99e-1) +	8.0945e+0 (1.42e-1) +	8.3041e+0 (6.09e-2)
WFG5	3	2.3726e-1 (2.22e-3) -	2.9382e-1 (1.13e-2) -	2.4070e-1 (3.64e-3) -	2.3133e-1 (5.81e-4)
	5	9.5435e-1 (1.61e-3)≈	1.0157e+0 (1.55e-2) -	9.4666e-1 (6.47e-3) +	9.5602e-1 (1.60e-3)
	8	3.0248e+0 (5.35e-2) -	3.3605e+0 (2.87e-2) -	3.0376e+0 (2.26e-2) -	2.9404e+0 (5.11e-3)
	10	4.0635e+0 (2.20e-2) +	4.1362e+0 (3.42e-2) +	3.8567e+0 (1.66e-2) +	4.2481e+0 (1.01e-2)
	15	8.7691e+0 (2.07e-1) -	8.0423e+0 (1.10e-1) +	7.8060e+0 (1.13e-1) +	8.3273e+0 (1.24e-2)
WFG6	3	2.7317e-1 (1.98e-2) -	3.0972e-1 (7.30e-3) -	2.6617e-1 (1.25e-2) -	2.4072e-1 (6.17e-3)
	5	9.6269e-1 (3.21e-3) +	1.0506e+0 (1.48e-2) -	9.7410e-1 (3.33e-3)≈	9.6898e-1 (4.07e-3)
	8	3.1499e+0 (5.16e-2) -	3.4803e+0 (7.99e-2) -	3.1280e+0 (2.83e-2) -	2.9632e+0 (9.30e-3)
	10	3.9849e+0 (3.12e-2) +	4.2298e+0 (5.48e-2) +	3.8847e+0 (2.79e-2) +	4.3388e+0 (1.02e-2)
	15	9.8829e+0 (4.87e-1) -	8.7322e+0 (5.71e-1) ≈	7.4775e+0 (1.02e-1) +	8.8449e+0 (9.05e-1)
WFG7	3	2.4099e-1 (2.95e-3) -	2.6213e-1 (8.48e-3) -	2.3561e-1 (3.44e-3) -	2.2386e-1 (1.47e-3)
	5	9.6508e-1 (1.40e-3)≈	1.0186e+0 (1.50e-2) -	9.6156e-1 (8.98e-3)≈	9.6540e-1 (1.28e-3)
	8	3.1009e+0 (2.16e-2) -	3.3528e+0 (3.48e-2) -	3.0921e+0 (4.30e-2) -	2.9746e+0 (1.23e-2)
	10	4.0605e+0 (4.42e-2) +	3.8552e+0 (4.41e-2) +	3.8253e+0 (2.53e-2) +	4.2975e+0 (1.55e-2)
	15	8.5276e+0 (1.32e-1)≈	7.9086e+0 (1.09e-1) +	7.8581e+0 (7.50e-2) +	8.3503e+0 (1.39e-1)
WFG8	3	3.2091e-1 (9.61e-3) -	3.5319e-1 (1.28e-2) -	3.0894e-1 (4.56e-3)≈	3.0052e-1 (8.23e-3)
	5	9.9632e-1 (2.29e-3) +	1.0869e+0 (1.21e-2) -	1.0744e+0 (9.05e-3) -	9.9753e-1 (5.85e-3)
	8	3.1886e+0 (5.35e-2) +	3.5027e+0 (7.77e-2)≈	3.2652e+0 (1.69e-2) +	3.3593e+0 (2.58e-1)
	10	4.0513e+0 (7.75e-2) +	4.3782e+0 (5.96e-2)+	4.3337e+0(6.33e-2) +	4.4427e+0 (5.12e-1)
	15	9.7281e+0 (5.17e-1) -	9.3248e+0(5.52e-1) -	8.6147e+0(1.01e-1)≈	8.4254e+0 (6.59e-1)
WFG9	3	2.3529e-1 (6.28e-3) -	2.4558e-1(5.75e-3) -	2.3097e-1(4.37e-3) -	2.2630e-1 (1.57e-3)
	5	9.4235e-1 (1.29e-3) -	9.5637e-1(6.17e-3) -	9.3657e-1(2.09e-3)≈	9.3345e-1 (3.36e-3)
	8	3.0037e+0 (2.08e-2) -	3.2356e+0(1.87e-2) -	3.0158e+0 (2.80e-2) -	2.9412e+0 (1.68e-2)
	10	4.1088e+0 (1.03e-1) +	3.9813e+0(6.47e-2) +	4.0665e+0 (4.52e-2) +	4.2209e+0 (5.28e-2)
	15	8.8422e+0 (3.44e-1) -	8.1630e+0(1.29e-1) +	8.1723e+0 (1.19e-1) +	8.6882e+0 (4.31e-1)
+/-/≈		11/28/6	16/26/3	16/19/10	

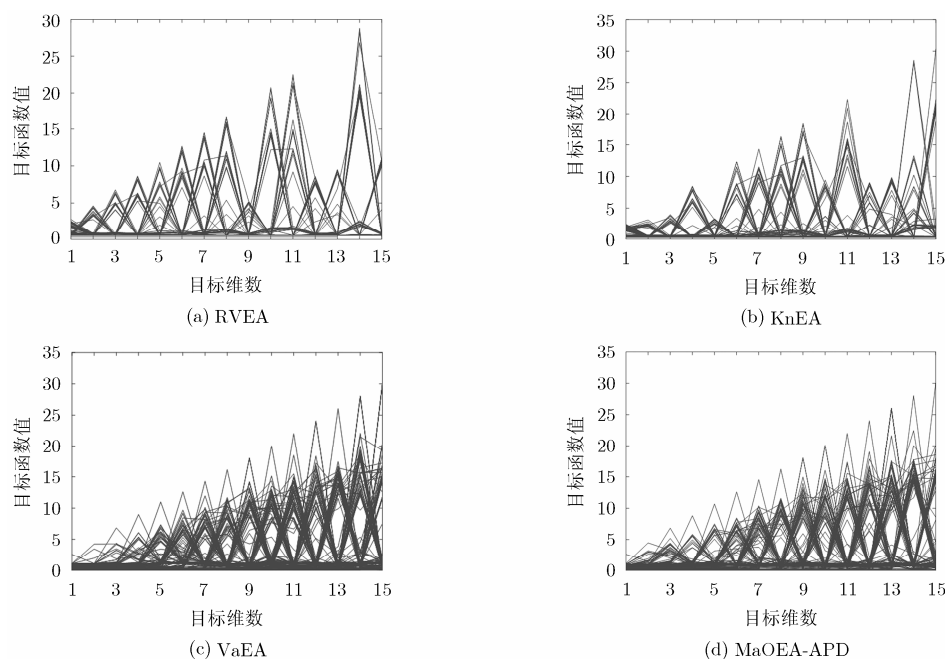


图4 4种算法在15目标WFG8测试问题上最终解集的平行坐标图

维目标解丢失的情况，导致分布性差于 MaOEA-APD。

4 结束语

为了更好地在解集收敛性和分布性之间保持平衡，本文提出一种基于角度惩罚距离的高维多目标进化算法 MaOEA-APD。首先，综合考虑收敛性和分布性在进化进程不同阶段的重要性，构造了一种角度惩罚距离，能使两者随进化进程动态平衡；其次，利用角度惩罚距离动态定义劣质个体，开发了基于角度惩罚距离的删除策略，能同时提高种群的综合性能；最后，根据环境选择的机制和原理对匹配选择过程进行了相应的改进，使两者相互协调，提高算法的整体进化效率。在标准测试函数集 WFG 上的实验结果表明：本文算法相比于另外3种算法，能更好地在解集收敛性和分布性之间取得平衡，提高解集质量。接下来的工作将会把本文提出的 MaOEA-APD 算法与约束处理技术相结合，使之能处理带约束的高维多目标优化问题，这也是目前进化算法领域的一个研究难点。

参考文献

- [1] 巩敦卫, 季新芳, 孙晓燕. 基于集合的高维多目标优化问题的进化算法[J]. 电子学报, 2014, 42(1): 77-83. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.01.012.
GONG Dunwei, JI Xinfang, and SUN Xiaoyan. Solving many-objective optimization problems using set-based evolutionary algorithms[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2014, 42(1): 77-83. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.01.012.
- [2] 陈小红, 李霞, 王娜. 高维多目标优化中基于稀疏特征选择的目标降维方法[J]. 电子学报, 2015, 43(7): 1300-1307. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.07.008.
CHEN Xiaohong, LI Xia, and WANG Na. Objective reduction with sparse feature selection for many objective optimization problem[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(7): 1300-1307. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.07.008.
- [3] HUGHES E J. Radar waveform optimisation as a many-objective application benchmark[C]. International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Springer-Verlag, 2007: 700-714. doi: 10.1007/978-3-540-70928-2_53.
- [4] REED P M and KOLLAT J B. Save now, pay later? Multi-period many-objective groundwater monitoring design given systematic model errors and uncertainty[J]. *Advances in Water Resources*, 2012, 35: 55-68. doi: 10.1016/j.advwatres.2011.10.011.
- [5] LYGOE R J, CARY M, and FLEMING P J. A Real-World Application Of A Many-Objective Optimisation Complexity Reduction Process[M]. Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Springer Berlin Heidelberg, 2013: 641-655.
- [6] 孔维健, 丁进良, 柴天佑. 高维多目标进化算法研究综述[J]. 控制与决策, 2010, 25(3): 321-326. doi: 10.13195/j.cd.2010.03.4.kongwj.008.
KONG Weijian, DING Jinliang, and CHAI Tianyou. Survey on large-dimensional multi-objective evolutionary algorithms [J]. *Control & Decision*, 2010, 25(3): 321-326. doi: 10.13195/j.cd.2010.03.4.kongwj.008.
- [7] LI Ke, DEB K, ZHANG Q, et al. An evolutionary many-

- objective optimization algorithm based on dominance and decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(5): 694–716. doi: 10.1109/TEVC.2014.2373386.
- [8] CHENG Jixiang, YEN G G, and ZHANG G. A many-objective evolutionary algorithm with enhanced mating and environmental selections[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(4): 592–605. doi: 10.1109/TEVC.2015.2424921.
- [9] ZHANG Xingyi, TIAN Ye, and JIN Yaochu. A knee point-driven evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(6): 761–776. doi: 10.1109/TEVC.2014.2378512.
- [10] 陈振兴, 严宣辉, 吴坤安, 等. 融合张角拥挤控制策略的高维多目标优化[J]. 自动化学报, 2015, 41(6): 1145–1158. doi: 10.16383/j.aas.2015.c140555.
- CHEN Zhenxing, YAN Xuanhui, WU Kunan, *et al.* Many-objective optimization integrating open angle based congestion control strategy[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(6): 1145–1158. doi: 10.16383/j.aas.2015.c140555.
- [11] CHENG Ran, JIN Yaochu, OLHOFFER M, *et al.* A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773–791. doi: 10.1109/TEVC.2016.2519378.
- [12] HE Zhenan and YEN G G. Many-objective evolutionary algorithms based on coordinated selection strategy[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(2): 220–233. doi: 10.1109/TEVC.2016.2598687.
- [13] XIANG Yi, ZHOU Yuren, LI Miqing, *et al.* A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(1): 131–152. doi: 10.1109/TEVC.2016.2587808.
- [14] LI Miqing, YANG Shengxiang, and LIU Xiaohui. Bi-goal evolution for many-objective optimization problems[J]. *Artificial Intelligence*, 2015, 228: 45–65.
- [15] 郑金华, 申瑞珉, 李密青, 等. 一种基于信息分离的高维多目标进化算法[J]. 软件学报, 2015, 26(5): 1013–1036. doi: 10.13328/j.cnki.jos.004676.
- ZHENG Jinhua, SHEN Ruimin, LI Miqing, *et al.* Evolutionary algorithm based on information separation for many-objective optimization[J]. *Journal of Software*, 2015, 26(5): 1013–1036. doi: 10.13328/j.cnki.jos.004676.
- [16] DEB K and JAIN H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577–601. doi: 10.1109/TEVC.2013.2281535.
- [17] HUBAND S, HINGSTON P, BARONE L, *et al.* A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477–506. doi: 10.1109/TEVC.2005.861417.
- [18] ZITZLER E, THIELE L, LAUMANN M, *et al.* Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2003, 7(2): 117–132. doi: 10.1109/TEVC.2003.810758.
- 毕晓君: 女, 1964年生, 教授, 研究方向为智能信息处理、进化计算、图像处理.
- 王朝: 男, 1989年生, 博士生, 研究方向为多目标优化、进化计算、数据挖掘.