

基于随机矩阵非渐近谱理论的协作频谱感知算法研究

许炜阳* 李有均 徐宏乾 谢汇强
(重庆大学通信工程学院 重庆 400044)

摘 要: 将随机矩阵的非渐近谱理论应用到协作频谱感知中, 对接收信号样本协方差矩阵的最大特征值和最小特征值进行分析, 该文提出一种精确的最大最小特征值差(Exact Maximum Minimum Eigenvalue Difference, EMMED)的协作感知算法。对于任意给定的协作用户个数 K 和采样点数 N , 首先推导了最大最小特征值之差的精确概率密度函数(Probability Density Function, PDF)和累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF), 然后利用该分布函数设计了所提算法的判决阈值。理论分析表明, EMMED 算法的判决阈值较已有的渐进最大最小特征值差(Asymptotic Maximum Minimum Eigenvalue Difference, AMMED)检测更为精确, 算法无需主用户信号特征并且能够对抗噪声不确定度影响。仿真结果表明, 存在噪声不确定度的感知环境下, EMMED 算法较已有的精确最大特征值(Exact Maximum Eigenvalue, EME)和 EMMER 等频谱感知算法具有更好的检测性能。

关键词: 频谱感知; 随机矩阵; 非渐近谱理论; 最大最小特征值

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)01-0123-07

DOI: 10.11999/JEIT170309

Study on Cooperative Spectrum Sensing Algorithm Based on Random Matrix Non-asymptotic Spectral Theory

XU Weiyang LI Youjun XU Hongqian XIE Huiqiang

(College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The non-asymptotic spectral theory of random matrix is applied to cooperative spectrum sensing, the maximum eigenvalue and the minimum eigenvalue of the sampled signal covariance matrix are analyzed and an Exact Maximum Minimum Eigenvalues Difference (EMMED) algorithm is proposed. For any given numbers of cooperative users K and sampling points N , the exact Probability Density Function (PDF) and Cumulative Distribution Function (CDF) of the difference between the maximum and minimum eigenvalues are derived. Then, an accurate decision threshold is designed by using the distribution function. Theoretical analysis shows, the EMMED algorithm has the characteristics that the decision threshold is more accurate than the existing Asymptotic Maximum Minimum Eigenvalue Difference (AMMED) algorithm, without the characteristics of the main user signal and not affected by noise uncertainty. In addition, the simulation results show that the EMMED algorithm has better detection performance than the existing Exact Maximum Eigenvalue (EME) and EMMER algorithms in the real sensing environment with noisy uncertainty.

Key words: Spectrum sensing; Random matrix; Non-asymptotic spectral theory; Maximum minimum eigenvalue

1 引言

认知无线电(Cognitive Radio, CR)技术可以提高频谱资源利用率, 是解决频谱资源短缺和提高系统容量的有效方法之一^[1]。自认知无线电在 1999 年被提出之后, 就受到了学术界的广泛关注和研究; 同时也在应用领域, 诸如 IEEE 的无线区域网(Wireless

Regional Area Networks, WRANs) 标准 IEEE 802.22.1 和无线革新联盟(Wireless Innovation Alliance, WIA)等均提倡开放电视频段中潜在的空闲频谱^[2]。

在实际应用场景中, 由于无线信道的多径衰落和时间弥散性, 认知用户接收信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)可能较低, 在信道条件恶劣时甚至低于 -20 dB。另一方面, CR 系统通常要求认知用户在低信噪比下仍然具有较高的检测概率(Probability of detection, Pd)和较低的虚警概率(Probability of false alarm, Pfa)。如 IEEE 802.22.1

收稿日期: 2017-04-07; 改回日期: 2017-09-01; 网络出版: 2017-11-01

*通信作者: 许炜阳 weiyangxu@cqu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61201177)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61201177)

标准要求认知用户在 SNR 低于 -20 dB 时, 对电视信号的 Pd 要高于 90%, Pfa 低于 10%。

传统的频谱感知技术主要包括^[3]: 能量检测 (Energy Detection, ED)、循环平稳检测、匹配滤波检测以及协方差检测。鉴于 CR 系统对认知用户检测性能的苛刻要求, 探索恶劣环境下具备高性能的频谱感知算法越显重要。事实上, 单用户检测往往不能达到实际需要的 Pd 和 Pfa。多用户协作检测技术可以提供空间分集增益, 从而有效对抗信道衰落对通信造成的影响。因此将多用户协作检测应用于频谱感知中, 能够确保在恶劣信道环境下仍然具有较好的检测性能^[4-6]。

另一方面, 传统感知算法的性能与实际需求存在有较大差距。研究表明, 应用与无线通信领域密切相关的随机矩阵理论 (Random Matrix Theory, RMT) 是缩小这一差距的重要手段。随机矩阵理论最先应用于主成分分析、金融数学和数字通信系统容量分析等领域, 是一种处理大维数据的有效方法。随后学者们将随机矩阵渐近谱理论 (谱理论: 随机矩阵特征值的分布理论) 结合多用户协作检测应用于频谱感知, 并获得了较传统算法更好的检测性能。如 Cardoso 等人^[6]提出了基于 Marcenko-Pastur 律 (MP 律) 的极限最大最小特征值比 (Limit Maximum Minimum Eigenvalue Ratio, LMMER) 算法。Zeng 等人^[7]提出了基于最大特征值 Tracy-Widom 分布 (TW 分布) 的渐近最大特征值 (Asymptotic Maximum Eigenvalue, AME) 算法和渐近最大最小特征值比 (Asymptotic Maximum Minimum Eigenvalue Ratio, AMMER) 算法^[8]。弥寅等人^[4]利用最小特征值的 TW 分布, 提出了改进的渐近最大最小特征值比 (Improved Asymptotic Maximum Minimum Eigenvalue Ratio, IAMMER) 算法。王颖喜等人^[9]提出了渐近最大最小特征值之差 (Asymptotic Maximum Minimum Eigenvalue Difference, AMMED) 算法。尽管以上渐近类感知算法的检测性能优于传统方案, 但是此类算法都是基于随机矩阵极限分布或渐近分布理论, 其假设样本空间趋近于无穷大, 因此不适用于样本有限的实际感知环境。而随着有限维随机矩阵理论的发展, Zanella 等人^[10]分析了 Wishart 矩阵特征值的联合分布函数以及边缘分布函数。Penna 等人^[11]将 RMT 的非渐近谱理论应用到频谱感知中, 提出了精确的最大最小特征值比 (Exact Maximum Minimum Eigenvalue Ratio, EMMER) 算法。Ratnarajah 等人^[12]提出了精确最大特征值 (Exact Maximum Eigenvalue, EME) 算法和精确的能量与最小特征值

比 (Exact Energy and Minimum Eigenvalue Ratio, EEMER) 算法。Chatzinotas 等人^[13]对常见的基于特征值的感知算法进行了比较, 研究表明在噪声功率已知的条件下, EME 算法优于 EMMER、EEMER 算法。Taherpour 等人^[5]分析了在已知噪声功率的条件下, EME 算法为满足广义似然比检验 (Generalized Likelihood Ratio Test, GLRT) 准则的最佳感知算法。

本文利用随机矩阵非渐近谱理论, 提出了一种基于样本协方差矩阵的精确最大最小特征值之差 (Exact Maximum Minimum Eigenvalue Difference, EMMED) 的协作频谱感知算法。首先分析了最大最小特征值之差的精确概率密度函数 (Probability Density Function, PDF) 和累积分布函数 (Cumulative Distribution Function, CDF), 然后利用 Neyman-Pearson (NP) 准则, 推导了该算法的精确判决阈值。理论分析表明, EMMED 算法的判决阈值较已有的 AMMED 检测更为精确, 算法无需主用户信号特征并且能够对抗噪声不确定度影响。仿真结果表明, 存在噪声不确定度的感知环境下, EMMED 算法较已有的 EME 和 EMMER 等频谱感知算法具有更好的检测性能。

2 系统模型

协作频谱感知网络主要由主用户 (Primary User, PU)、感知用户 (Cognitive User, CU) 以及融合中心 (Fusion Center, FC) 等多部分组成。在协作频谱感知中, 不同地理位置的 CU 共享检测到的感知信息并传送给 FC, FC 对接收数据进行数据融合并对 PU 信号的存在与否做出判决。假设认知网络中感知用户 CU 的个数为 K , 每个 CU 在感知时间内的采样数为 N , $K \leq N$ 。用 $y_k(n)$ 表示第 k ($k = 1, 2, \dots, K$) 个感知用户在 n ($n = 1, 2, \dots, N$) 时刻的离散基带采样信号。用 H_0 表示频谱空闲, 即 PU 不存在; 用 H_1 表示频谱被占用, 即 PU 存在。则频谱感知可以建模为如式(1)的二元检验问题。

$$y_k(n) = \begin{cases} w_k(n), & H_0 \\ h_k(n)s(n) + w_k(n), & H_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $w_k(n)$ 表示均值为 0, 方差为 σ_w^2 的复高斯白噪声, 即 $w_k(n) \sim \text{CN}(0, \sigma_w^2)$, 并且任意 $w_{k_1}(n_1)$ 和 $w_{k_2}(n_2)$ 之间相互独立, 其中 $k_1, k_2 \in [1, K]$, $n_1, n_2 \in [1, N]$; $s(n)$ 为主用户信号, 且 $E\{|s(n)|^2\} = \sigma_s^2$; $h_k(n)$ 为主用户与第 k 个认知用户在 n 时刻的信道冲激响应。

在接收端, 用 $\mathbf{y}_n = [y_1(n), y_2(n), \dots, y_K(n)]^T$ 表示

K 个 CU 在 n 时刻的样点矢量, 用 $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N]$ 表示感知时间段内 K 个认知用户构成的样点矩阵。同样, 用 $\mathbf{w}_n = [w_1(n), w_2(n), \dots, w_K(n)]^T$ 表示噪声矢量, 用 $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N]$ 表示噪声矩阵。通常采用样本协方差矩阵来估计统计协方差矩阵 \mathbf{R} , 见式 (2)。显然 $\hat{\mathbf{R}}$ 为半正定矩阵, 其特征值非负, 记 $\hat{\mathbf{R}}$ 的 K 个有序特征值为 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > \dots > \lambda_K \geq 0$, $\lambda_k(\mathbf{M})$ 表示取矩阵 \mathbf{M} 的第 k 大的特征值。

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H \quad (2)$$

由于不同系统和不同环境下, 信道信息和信号特征难以获得, 因此本文考虑的感知算法的阈值设定仅仅取决于 H_0 检验下样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 的统计特性和系统所需要的 Pfa, 用 P_{fa} 表示。则根据式 (1) 中的二元检验, 通过构造不同的检验统计量 T 和相应的判决阈值 γ 来进行判决, 表示为

$$T \begin{cases} > \\ < \end{cases} \gamma \quad (3)$$

3 随机矩阵理论与 AMMED 算法

3.1 随机矩阵的渐近分布理论

由于 \mathbf{W} 是 $K \times N$ 维复高斯矩阵, 因此 $\mathbf{W} \mathbf{W}^H$ 为 $K \times K$ 维的复 Wishart 矩阵, 其分布函数可以记为 $\mathbf{W} \mathbf{W}^H \sim \omega_K(N, \Sigma)$, 其中 $\Sigma = E\{\mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^H\}$ [14]。Wishart 矩阵的渐近谱理论主要研究当样本空间趋于无穷大时, 其特征值的分布规律。这方面的主要研究成果包括 Marchenko 等人 [15] 建立的 MP 律以及 Tracy 等人 [16] 建立的 TW 律, 分别如引理 1 和引理 2 所示。

引理 1 对于复 Wishart 矩阵 $\mathbf{W} \mathbf{W}^H$, 若 \mathbf{W} 中元素 $w_k(n) \sim \text{CN}(0, 1)$, 且满足 $0 < \lim_{N \rightarrow \infty} (K/N) < 1$, 则根据 MP 律, $\mathbf{W} \mathbf{W}^H$ 的最大最小特征值分别收敛到特定值 \tilde{a} 和 \tilde{b} 为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a} &= (\sqrt{N} + \sqrt{K})^2 \\ \tilde{b} &= (\sqrt{N} - \sqrt{K})^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

引理 2 在 H_0 检测下, $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{W} \mathbf{W}^H / N$, 此时令 $\hat{\mathbf{A}} = N \hat{\mathbf{R}} / \sigma_w^2$, 则 $\hat{\mathbf{A}}$ 为中心非相关复 Wishart 矩阵。令 $u = (\sqrt{N} + \sqrt{K})^2$, $v = (\sqrt{N} + \sqrt{K})(1/\sqrt{N} + 1/\sqrt{K})^{1/3}$, $\beta = K/N$, 若满足条件 $0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \beta < 1$, 则 $(\lambda_1(\hat{\mathbf{A}}) - u)/v$ 收敛于 TW 律的第 2 阶分布 (TW2 分布), 记为 $(\lambda_1(\hat{\mathbf{A}}) - u)/v \sim \text{TW}2(t)$, TW2 的分布函数记为 $F_{\text{TW}2}(t)$, 其反函数记为 $F_{\text{TW}2}^{-1}(t)$ 。由于 TW2 分布没有闭合解析式, 因此最初刘宁等人 [17]

通过级数展开仅获取了其部分离散值。近年来随着对 TW2 分布研究的不断深入, Chiani 等人 [18] 通过缩放和偏移的伽马函数实现了对 TW2 分布的精确近似, 解决了最初 TW2 分布没有闭合解析式的问题。

3.2 有限维随机矩阵的谱分布理论

实际中, CU 的个数 K 和采样点数 N 总是有限的, 因此复 Wishart 矩阵 $\mathbf{W} \mathbf{W}^H$ 仅渐近收敛于 MP 律或 TW 律。当 K 和 N 较小时, 随机矩阵的 MP 律或 TW 律并不能准确刻画其特征值的分布规律。对于有限维的随机矩阵, 文献 [10] 建立了随机矩阵的非渐近谱理论。

引理 3 [10] 对于中心非相关复 Wishart 矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$, 其特征值的边缘概率密度函数和累积分布函数可以分别表示为

$$f_k(t) = C \sum_{n=1}^K \sum_{m=1}^K (-1)^{n+m} t^{N-K+n+m-2} e^{-t} \det(\mathbf{M}_k) \quad (5)$$

$$F_k(t) = \int_0^\infty f_k(t) dt \quad (6)$$

$$C = \left(\prod_{m=1}^K (N-m)! \prod_{m=1}^K (K-m)! \right)^{-1} \quad (7)$$

其中, $k \in \{1, K\}$, \mathbf{M}_k 为 $K-1$ 阶方阵。当 $k=1$ 或 $k=K$ 时, \mathbf{M}_1 和 \mathbf{M}_K 可以表示为

$$\mathbf{M}_1[i, j] = \begin{cases} \Gamma(N-K+i+j+1, l), & i < n, j < m \\ \Gamma(N-K+i+j+1, l), & i \geq n, j \geq m \\ \Gamma(N-K+i+j, l), & \text{其它} \end{cases} \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_K[i, j] = \begin{cases} \bar{\Gamma}(N-K+i+j-1, l), & i < n, j < m \\ \bar{\Gamma}(N-K+i+j+1, l), & i \geq n, j \geq m \\ \bar{\Gamma}(N-K+i+j, l), & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\Gamma(\cdot, \cdot)$ 表示不完全伽马函数的下界, 定义为 $\Gamma(q, t) = \int_0^t x^{q-1} e^{-x} dx$; $\bar{\Gamma}(\cdot, \cdot)$ 表示不完全伽马函数的上界, 定义为 $\bar{\Gamma}(q, t) = \int_t^\infty x^{q-1} e^{-x} dx$ 。

3.3 AMMED 算法

文献 [9] 利用引理 1 中最小特征值的极限收敛特性和引理 2 中最大特征值的渐近 TW2 分布规律, 提出了 AMMED 算法。其检验统计量和相应的判决阈值为

$$T_{\text{AMMED}} = \lambda_1 - \lambda_K \quad (10)$$

$$\gamma_{\text{AMMED}} = \sigma_w^2 \left[\frac{u + v F_{\text{TW}2}^{-1}(1 - P_{fa})}{N} - (1 - \sqrt{\beta})^2 \right] \quad (11)$$

其中, u, v, β 以及 $F_{\text{TW}2}^{-1}(t)$ 的定义见引理 1 和引理 2。AMMED 算法的检测原理为: 理想情况下, H_0 检验下有 $T_{\text{AMMED}} = \lambda_1 - \lambda_K = 0$; H_1 检验下有 T_{AMMED}

$= \lambda_1 - \lambda_K > 0$, 因此可以根据该差异对 PU 信号进行检验。

4 精确最大与最小特征值之差感知算法

根据 GLRT 准则, Taherpour 等人^[5]的研究表明 EME 算法为已知噪声功率条件下的最优感知算法, 但是其未考虑到实际环境中噪声功率总是存在波动这一现实条件。实际中, 通常用噪声不确定度 (Noise Uncertainty, NU) 来描述噪声功率的波动情况。由于 EME 算法阈值中包含噪声方差, 因此 EME 算法的性能随着噪声不确定度的增加而急剧下降。而 EMMER 算法虽然为非渐近算法, 并且不受噪声不确定度的影响, 但是仍然存在样本空间较小时检测性能不佳的缺点。

另一方面, 尽管 AMMED 算法需要估计噪声, 但该算法以最大最小特征值之差作为检验统计量, 消去了噪声的波动, 因此与最大最小特征值之比这一类的算法相似, 具有对抗噪声不确定度的特点; 同时当样本空间较小时, 最小特征值趋于 0, 因此 $T_{\text{AMMED}} \rightarrow \lambda_1$, 此时 AMMED 算法退化为最大特征值感知算法, 可以确保有较好的检测性能。

本文在 AMMED 算法的基础上, 针对 AMMED 算法由于同时利用了最大特征值的渐近 TW2 分布和最小特征值的 MP 律, 其理论分布函数与实际分布函数存在较大误差的缺点, 根据有限维复 Wishart 矩阵谱分布函数, 提出了改进的 EMMED 算法。

4.1 EMMED 算法的检验统计量

与 AMMED 类似, 理想条件下, 样本协方差矩阵等于统计协方差矩阵, 即 $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ 。因此, 在 H_1 检验下可以得到, $\lambda_1 - \lambda_K = (\sigma_s^2 + \sigma_w^2) - \sigma_w^2 = \sigma_s^2$ 。在 H_0 检验下, 可以得出 $\lambda_1 - \lambda_K = \sigma_w^2 - \sigma_w^2 = 0$ 。同理, 当存在噪声不确定度时, 最大特征值 λ_1 与最小特征值 λ_K 相减, 消去了噪声分量, 因此 H_1 检验下仍然有 $\lambda_1 - \lambda_K = \sigma_s^2$, H_0 检验下仍然有 $\lambda_1 - \lambda_K = 0$ 。根据以上分析, 可以得出: 以最大最小特征值之差为检验统计量的感知算法具有对抗噪声不确定度影响的特点(假设进行一次感知的极短时间内噪声功率保持不变)。在非理想条件下, 由于实际采样点数有限, 样本协方差矩阵为统计协方差矩阵的最大似然估计。此时, 在 H_0 检验下 $\lambda_1 - \lambda_K$ 将不为 0, 而是呈现以概率密度分布的形式, 所以可以将 $\lambda_1 - \lambda_K$ 作为 EMMED 算法的检验统计量。

$$T_{\text{EMMED}} = \lambda_1 - \lambda_K \quad (12)$$

4.2 EMMED 的 PDF 与 CDF 的推导

近年来, 随着 RMT 非渐近谱理论的发展, RMT 的特征值和条件数的 PDF 和 CDF 具有了闭合的表

达式^[10], 但这些表达式通常包含多重积分和超几何函数, 具有较高的计算复杂度。本文将 RMT 非渐近谱理论应用到频谱感知中, 对 T_{EMMED} 的分布特性进行了研究。

根据式(1)中的二元假设检验模型, 在 H_0 检验下, $\widehat{\mathbf{A}} = N\widehat{\mathbf{R}}/\sigma_w^2$ 为中心非相关复 Wishart 矩阵。则 $\widehat{\mathbf{A}}$ 任意两个特征值的联合概率密度函数可以表示为^[11]

$$f_{l,K}(t_l, t_K) = \overline{C}T(\mathbf{Q}) \quad (13)$$

其中, $\overline{C} = ((K-2)!(N-K)!)^{-1}C$, C 的定义见式(7), \mathbf{Q} 为 $N \times N \times N$ 的张量, \mathbf{Q} 的定义如下:

$$\mathbf{Q}(i, j, k) = \begin{cases} t_k^{q-1} e^{-t_k}, & k=1 \text{ 或 } k=K \\ \chi(q) - \overline{\Gamma}(q, t_1) - \Gamma(q, t_K), & 1 < k < K \\ \Gamma(q, t_K), & K < k < N \end{cases} \quad (14)$$

其中, $q = N - K + i + j - 1$, $\chi(t)$ 为伽马函数, 定义为 $\chi(q) = \int_0^\infty x^{q-1} e^{-x} dx$ 。

$T(\mathbf{Q})$ 表示对张量 \mathbf{Q} 进行式(15)的运算:

$$T(\mathbf{Q}) \triangleq \sum_{\alpha} \text{sgn}(\alpha) \sum_{\beta} \text{sgn}(\beta) \prod_{k=1}^N \mathbf{Q}(\alpha_k, \beta_k, k) \quad (15)$$

其中, $\text{sgn}(t)$ 表示取符号运算, 式(15)的计算需要考虑所有 α , β 与 k 的组合形式。由式(13)~式(15), T_{EMMED} 的 PDF 可以表示为

$$\begin{aligned} f_{\text{EMMED}}(t) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{l,K}(t+l, l) dl \right) u(t) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} f_{l,K}(t+l, l) dl \right) u(t) \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $f_{l,K}(\cdot, \cdot)$ 为 λ_1 和 λ_K 的联合概率密度函数, $u(t)$ 表示阶跃函数。由于 $\widehat{\mathbf{R}}$ 为半正定矩阵, 其特征值 λ_k 非负, 因此式(16)的积分区间可以简化为 $[0, +\infty)$ 。

由式(16)可以看出, 因为包含积分和张量 \mathbf{Q} 的计算, $f_{\text{EMMED}}(t)$ 的计算复杂度较高。而由于噪声独立同分布, 可以利用引理 3 定义的 λ_1 和 λ_K 的边缘概率密度函数来近似 λ_1 和 λ_K 的联合概率密度函数^[15], 因此式(16)可以化简为

$$\begin{aligned} f'_{\text{EMMED}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{l,K}(t+l, l) dl \\ &\approx \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+l) f_K(l) dl \right] u(t) \\ &\approx \int_{\tilde{b}-\Delta 2}^{\tilde{a}+\Delta 1} f_1(t+l) f_K(l) dl \end{aligned} \quad (17)$$

其中, \tilde{a} 和 \tilde{b} 为最大最小特征值的极限收敛值, 定义见式(4)。 $\Delta 1$ 与 $\Delta 2$ 皆为正实数, 且满足 $\tilde{a} + \Delta 1 \geq \tilde{b} - \Delta 2 \geq 0$ 。根据文献[15]的结论, 中心非相关复 Wishart 矩阵的任意特征值超过 93% 的概率落在区间 $[\tilde{b}, \tilde{a}]$ 上; 同时为了减少 $f'_{\text{EMMED}}(t)$ 的计算误差, 本

文在此基础上引入微变量 $\Delta 1$ 与 $\Delta 2$ ，将积分区间从 $[-\infty, +\infty]$ 简化到 $[\tilde{b} - \Delta 2, \tilde{a} + \Delta 1]$ 以减少运算量。根据经验，通常可以取 $\Delta 1 \approx (10\% \sim 20\%) \tilde{a}$ ， $\Delta 2 \approx (10\% \sim 20\%) \tilde{b}$ 。

根据式(17)，则最大最小特征值之差的 CDF 可以表示为

$$\begin{aligned} F_{\text{EMMED}}(t) &= \int_{-\infty}^t f'_{\text{EMMED}}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+l) f_K(l) dl \right\} u(t) dt \\ &= \int_0^t \left[\int_{\tilde{b}-\Delta 2}^{\tilde{a}+\Delta 1} f_1(t+l) f_K(l) dl \right] dt, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

4.3 EMMED 算法的判决阈值

在 H_0 检验下，根据 NP 准则可以推导得到

$$\begin{aligned} P_{\text{fa}} &= P(T_{\text{EMMED}} > \gamma_{\text{EMMED}} | H_0) \\ &= P(\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}) - \lambda_K(\hat{\mathbf{R}}) > \gamma_{\text{EMMED}} | H_0) \\ &= P\left(\lambda_1\left(\frac{\sigma_w^2}{N} \hat{\mathbf{A}}\right) - \lambda_K\left(\frac{\sigma_w^2}{N} \hat{\mathbf{A}}\right) > \gamma_{\text{EMMED}} | H_0\right) \\ &= 1 - P\left(\lambda_1(\hat{\mathbf{A}}) - \lambda_K(\hat{\mathbf{A}}) < \frac{N}{\sigma_w^2} \gamma_{\text{EMMED}} | H_0\right) \\ &= 1 - F_{\text{EMMED}}\left(\frac{N}{\sigma_w^2} \gamma_{\text{EMMED}}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

其中， $F_{\text{EMMED}}(t)$ 为 $\lambda_1 - \lambda_K$ 的分布函数，见式(18)。

由式(19)，可以推导出 EMMED 的判决阈值 γ_{EMMED} 如式(20)所示。

$$\gamma_{\text{EMMED}} = \frac{\sigma_w^2}{N} F_{\text{EMMED}}^{-1}(1 - P_{\text{fa}}) \quad (20)$$

其中， $F_{\text{EMMED}}^{-1}(t)$ 为 $F_{\text{EMMED}}(t)$ 的反函数。

实际应用中若 σ_w^2 未知，则可以利用噪声方差的特征值估计法获得^[5]

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=2}^K \lambda_k \quad (21)$$

根据噪声方差的特征值法获得 σ_w^2 的估计值 $\hat{\sigma}_w^2$ 后，可以将 $\hat{\sigma}_w^2$ 代入式(20)中替代 σ_w^2 ，则 EMMED 的判决阈值 γ_{EMMED} 可以更新为

$$\gamma_{\text{EMMED}} = \frac{1}{N(K-1)} \left(\sum_{k=2}^K \lambda_k \right) F_{\text{EMMED}}^{-1}(1 - P_{\text{fa}}) \quad (22)$$

4.4 算法步骤

综上所述，EMMED 算法步骤如下：

(1) 各 SU 进行数据采样，并将数据传送给 FC，FC 根据式(2)计算接收信号样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ ；

(2) 对 $\hat{\mathbf{R}}$ 进行特征值分解，求其最大特征值 λ_1 和最小特征值 λ_K ，并根据式(12)计算得到 T_{EMMED} ；

(3) 若噪声功率 σ_w^2 已知，根据式(20)求得

γ_{EMMED} ；若噪声信息未知，先根据式(22)求解 γ_{EMMED} ；

(4) 若 $\gamma_{\text{EMMED}} \geq T_{\text{EMMED}}$ 则假设检验 H_1 成立；反之，则 H_0 成立。

5 数值仿真与分析

本节从多个方面对所提算法和其他感知方法进行比较，从而验证 EMMED 算法的有效性。所有仿真采用 10000 次蒙特卡洛仿真实验，假设主用户信号采用 QPSK 调制，PU 到各个 CU 的信道为独立的 Rayleigh 多径衰落信道。

图 1 通过设定不同的 K 和 N ，对理论推导的 CDF 函数 $F_{\text{EMMED}}(t)$ 和蒙特卡洛仿真得到的 CDF 函数进行了对比。由图 1 可以看到，在 K 和 N 取不同值的条件下，理论曲线和仿真曲线重合，验证了本文推导的 CDF 的正确性。

图 2 对 EMMED 算法和 AMMED 算法的理论阈值与设定虚警概率下实际所需阈值进行了对比，仿真条件： $\sigma_w^2 = 1.25$ ，图 2(a)中 $K = 4, N = 20$ ，图 2(b)中 $K = 8, N = 100$ 。从图 2 可以看出，EMMED 算法的理论阈值与蒙特卡洛仿真阈值重合，准确度远高于 AMMED 的理论阈值。

由于渐近类感知算法的性能不具备优势，这里主要对非渐近类感知算法的性能进行对比。本文总结的非渐近算法可以分为两类，第 1 类算法需要知道噪声方差，如 ED 算法、EME 算法和 EMMED 算法。第 2 类算法不需要知道噪声方差，如 EMMER 算法。下面分别从不同的角度出发，对各个算法的性能进行对比。

假设噪声方差已知，图 3 在没有噪声不确定度的条件下对各个算法的工作特征曲线 (Receiver Operating Characteristic, ROC) 进行了仿真分析。仿真条件： $K = 8, N = 100, \text{SNR} = -10 \text{ dB}$ 。从图 3 可以看到，当 P_{fa} 较小时，性能从优到劣排序为：EME, EMMED, ED, EMMER。当 P_{fa} 较高时，排序为 EME, ED, EMMED, EMMER。实际上，随着 CU 个数 K 的增加，EMMED 算法和 ED 算法的 ROC 曲线交点将显著向右移动。考虑实际系统通常要求虚警概率小于 0.1，因此 EMMED 算法在已知噪声方差的条件下，仅次于 EME，具有较好的检测性能。

实际感知环境中，CU 并不知道噪声方差，因此需要实时估计噪声方差。对于 EMMED 等需要预先知道噪声方差的感知算法，可以通过噪声方差的特征值法进行估计，见式(21)。

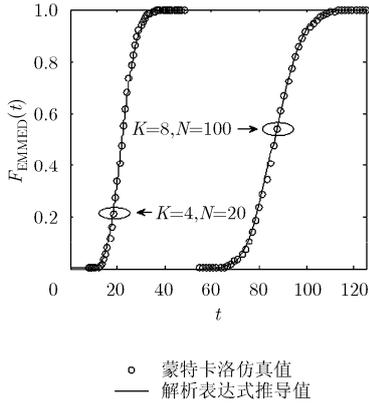


图 1 不同K和N条件下理论与仿真的累积分布函数对比

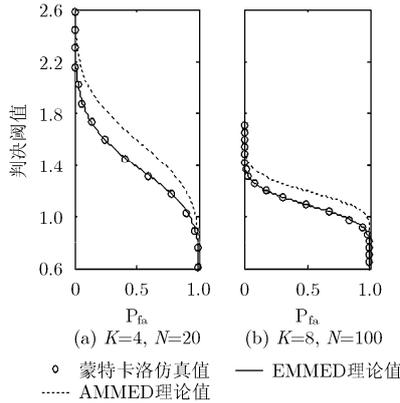


图 2 不同K和N条件下AMMED算法和EMMED算法的阈值对比

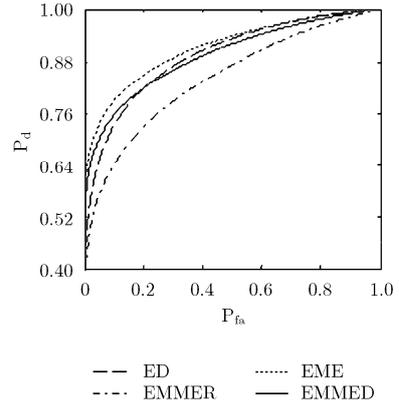


图 3 已知噪声方差时不同算法的ROC曲线

图 4 在不同噪声不确定度下对各种算法的性能进行了仿真对比。仿真条件： $SNR = -5$ dB, $K = 5$, $N = 500$, $P_{fa} = 0.01$ 。从图 4 可以看到，在噪声不确定度小于 0.7 dB 时，EME 性能最佳，略优于 EMMED，而 ED 性能最差；在噪声不确定度大于 0.7 dB 时，EMMED 性能最佳，EMMER 次之，ED 算法性能最差。分析可知，随着噪声不确定度的增加，EME 和 ED 算法由于受噪声不确定度的影响，其检测性能急剧降低。而对于 EMMED 和 EMMER 算法，由于其检验统计量分别为最大最小特征值之差和最大最小特征值之比，抵消了噪声的波动，所以受噪声不确定度的影响较小。考虑到实际系统通常存在至少 1 dB 的噪声不确定度，因此 EMMED 算法具有最优性能。

图 5 和图 6 分别对不同 K 和 N 条件下各算法的性能进行仿真。图 5 仿真条件为 $SNR = -5$ dB, $K = 5$, $NU = 1$ dB, $P_{fa} = 0.01$ 。从图 5 可以看到，在 $N < 300$ 时，EME 性能最佳，EMMED 次之，ED 最差；当 $N > 300$ 时，EMMED 和 EMMER 性能逐渐优于 EME。分析可知，当 N 较小时，各算法的检测性能主要受采样点数的影响；而当 N 较大时，由

于 EME 和 ED 算法受噪声不确定度的影响，因此检测性能几乎不随样点个数的增加而提升。而 EMMED 和 EMMER 具有对抗噪声不确定度影响的特点，因此不会出现检测平台，与前述分析相符。同时可以看到，由于 EMMED 和 EMMER 算法的检验统计量使用了相同的信息，因此随着 N 的增加 EMMER 算法的检测性能逐渐逼近 EMMED。图 6 仿真条件为 $SNR = -5$ dB, $N = 200$, $NU = 2$ dB。从图 6 可以看出，CU 个数 K 与采样点数 N 对算法检测性能的影响具有相似的效果。

6 结论

利用随机矩阵的非渐近谱理论，本文提出了一种改进的最大最小特征值之差的协作感知算法。由于该感知算法是基于随机矩阵的有限维谱分布理论，不需要假设无穷维的样本空间，因此适用于样本有限的实际感知环境。同时该检测方法具有不需要信道信息与信号特征，能够对抗噪声不确定度的特点。此外，仿真结果表明，该检测算法与其他基于特征值的非渐近感知算法相比，具有更好的检测性能。

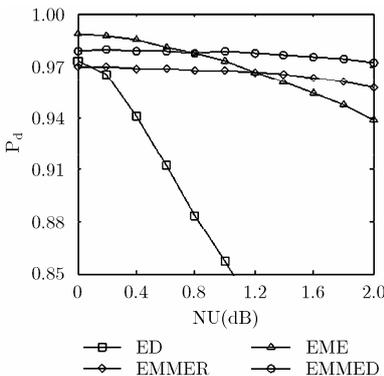


图 4 不同噪声不确定度下各算法的性能

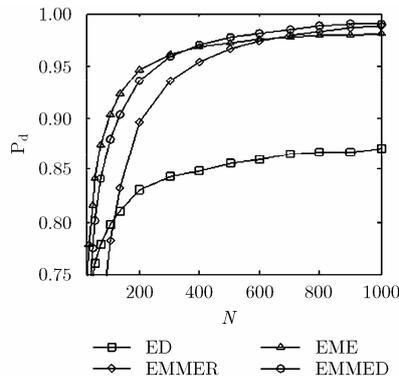


图 5 不同N条件下各算法的性能对比

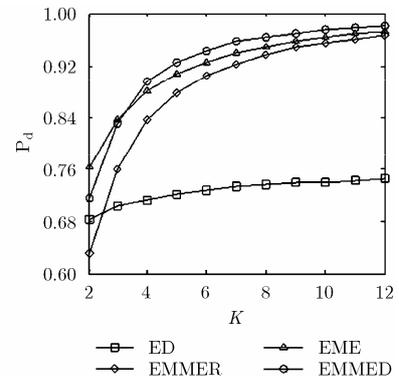


图 6 不同K条件下各算法的性能对比

参 考 文 献

- [1] OH S W, MA Y, PEH E, *et al.* Introduction to Cognitive Radio and Television White Space[M]. Hoboken, NJ,USA, John Wiley & Sons, Inc., 2016: 1-22. doi: 10.1002/9781119110491.ch1.
- [2] KHATTAB A and BAYOUMI M A. An overview of IEEE standardization efforts for cognitive radio networks[C]. 2015 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Lisbon, 2015: 982-985. doi: 10.1109/ISCAS.2015.7168800.
- [3] SHARMA S K, BOGALE T E, CHATZINOTAS S, *et al.* Cognitive radio techniques under practical imperfections: A survey[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2015, 17(4): 1858-1884. doi: 10.1109/COMST.2015.2452414.
- [4] 弥寅, 卢光跃. 基于特征值极限分布的合作频谱感知算法[J]. *通信学报*, 2015, 36(1): 84-89. doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2015010.
- MI Yin and LU Guangyue. Cooperative spectrum sensing algorithm based on limiting eigenvalue distribution[J]. *Journal on Communications*, 2015, 36(1): 84-89. doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2015010.
- [5] TAHERPOUR A, NASIRI-KENARI M, and GAZOR S. Multiple antenna spectrum sensing in cognitive radios[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2010, 9(2): 814-823. doi: 10.1109/TWC.2009.02.090385.
- [6] CARDOSO L S, DEBBAH M, BIANCHI P, *et al.* Cooperative spectrum sensing using random matrix theory [C]. 2008 3rd International Symposium on Wireless Pervasive Computing, Santorini, 2008: 334-338. doi: 10.1109/ISWPC.2008.4556225.
- [7] ZENG Y, KOH C L, and LIANG Y C. Maximum eigenvalue detection: Theory and application[C]. 2008 IEEE International Conference on Communications, Beijing, 2008: 4160-4164. doi: 10.1109/ICC.2008.781.
- [8] ZENG Y and LIANG Y C. Eigenvalue based spectrum sensing algorithms for cognitive radio[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(6): 1784-1793. doi: 10.1109/TCOMM.2009.06.070402.
- [9] 王颖喜, 卢光跃. 基于最大最小特征值之差的频谱感知技术研究[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(11): 2571-2575. doi: 10.3724/SP.J.1146.2009.01434.
- WANG Yingxi and LU Guangyue. DMM based spectrum sensing method for cognitive radio systems[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(11): 2571-2575. doi: 10.3724/SP.J.1146.2009.01434.
- [10] ZANELLA A, CHIARI M, and WIN M Z. On the marginal distribution of the eigenvalues of Wishart matrices[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(4): 1050-1060. doi: 10.1109/TCOMM.2009.04.070143.
- [11] PENNA F, GARELLO R, FIGLIOLI D, *et al.* Exact non-asymptotic threshold for eigenvalue-based spectrum sensing[C]. 2009 4th International Conference on Cognitive Radio Oriented Wireless Networks and Communications, Hannover, 2009: 1-5. doi: 10.1109/CROWNCOM.2009.5189008.
- [12] RATNARAJAH T, ZHONG C, KORTUN A, *et al.* Complex random matrices and multiple-antenna spectrum sensing[C]. 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Prague, 2011: 3848-3851. doi: 10.1109/ICASSP.2011.5947191.
- [13] CHATZINOTAS S, SHARMA S K, and OTTERSTEN B. Asymptotic analysis of eigenvalue-based blind Spectrum Sensing techniques[C]. 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vancouver, 2013: 4464-4468. doi: 10.1109/ICASSP.2013.6638504.
- [14] RATNARAJAH T, VAILLANCOURT R, and ALVO M. Eigenvalues and condition numbers of complex random matrices[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis & Applications*, 2005, 26(2): 441-456. doi: 10.1137/S089547980342204X.
- [15] CHIARI M. On the probability that all eigenvalues of Gaussian and Wishart random matrices lie within an interval[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2017, 63(7): 4521-4531. doi: 10.1109/TIT.2017.2694846.
- [16] TRACY C A and WIDOM H. On orthogonal and symplectic matrix ensembles[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1996, 177(3): 727-754. doi: 10.1007/BF02099545.
- [17] 刘宁, 史浩山, 刘利平, 等. 基于随机矩阵的新型频谱盲感知方法[J]. *西北工业大学学报*, 2016, 34(2): 262-267. doi: 10.3969/j.issn.1000-2758.2016.02.013.
- LIU Ning, SHI Haoshan, LIU Liping, *et al.* A novel blind spectrum sensing algorithm based on random matrix[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2016, 34(2): 262-267. doi: 10.3969/j.issn.1000-2758.2016.02.013.
- [18] CHIARI M. Distribution of the largest eigenvalue for real Wishart and Gaussian random matrices and a simple approximation for the Tracy-Widom distribution[J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 2014, 129: 69-81. doi: 10.1016/j.jmva.2014.04.002.
- 许炜阳: 男, 1982年生, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为认知无线电、信号检测与MIMO技术。
- 李有均: 男, 1991年生, 硕士生, 研究方向为认知无线电。
- 徐宏乾: 男, 1987年生, 硕士生, 研究方向为频谱感知技术。
- 谢汇强: 男, 1995年生, 硕士生, 研究方向为大规模MIMO。