

基于形式概念分析的多输入多输出真值表并行约简算法

陈泽华* 闫继雄 柴 晶
(太原理工大学信息工程学院 太原 030024)

摘 要: 真值表约简是数字逻辑电路分析与设计的关键问题之一, 形式概念分析(Formal Concept Analysis, FCA) 是一种从形式背景进行数据分析和规则提取的工具。该文将多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO) 真值表转化为决策形式背景, 将真值表的约简问题转化为决策形式背景的最简规则提取过程, 提出一种基于 FCA 的 MIMO 真值表并行约简算法。通过理论证明、实例演示和算法的复杂性分析, 说明了新算法的正确性、有效性和快速性。

关键词: 数字逻辑电路; 真值表约简; 形式概念分析; 规则提取

中图分类号: TP331; TP181

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)09-2259-07

DOI: 10.11999/JEIT170023

Formal Concept Analysis Based Parallel Reduction Algorithm for MIMO Truth Table

CHEN Zehua YAN Jixiong CHAI Jing

(College of Information Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: Truth table reduction is one of the key problems in the analysis and design of digital logic circuits, FCA (Formal Concept Analysis) is a tool for data analysis and rule extraction from formal contexts. In this paper, MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) truth table is transformed into formal decision context, thus the reduction problem of truth table is transformed into the simplest rule extraction process of formal decision context. Then, a parallel reduction algorithm for MIMO truth table based on FCA is proposed. The correctness, efficiency and rapidity of the new algorithm are illustrated by the theoretical proof, example demonstration and complexity analysis of the proposed algorithm.

Key words: Digital logic circuit; Truth table reduction; Formal Concept Analysis (FCA); Rule extraction

1 引言

真值表约简^[1]是逻辑电路分析和设计的关键问题之一, 对于逻辑电路的优化具有重要意义。经典的约简方法包括卡诺图法^[2]、Q-M 算法及其改进算法^[3-5]以及立方体方法^[6,7]等。当输入变量增大时经典算法的复杂度急剧增加, 且对多输出真值表不能并行处理。文献[8]中将真值表看作逻辑信息系统, 将真值表约简过程转变为基于粒矩阵计算的最简规则提取过程, 提高了约简的效率, 其不足之处是只能串行处理多输出的真值表。文献[9]提出一种针对

多输入多输出真值表的并行约简算法, 该算法通过矩阵运算和设置启发式因子使算法快速收敛, 提高了计算效率, 为真值表约简提供了新思路。

形式概念分析(Formal Concept Analysis, FCA)^[10]是 Wille 提出的一种从形式背景进行数据分析和规则提取的工具, 现已广泛应用于机器学习、数据挖掘等领域。形式概念的生成是 FCA 的关键问题之一, 研究者们对此进行了广泛的研究: Chein^[11]最初提出了自底向上的 Chein 算法; Ganter^[12]提出了基于枚举方法的 NextClosure 概念生成算法; 何苗等人^[13]利用包含度理论对各种建格问题进行了统一描述, 完成了 4 种形式背景的概念格构造问题。概念生成之后, 便可进行数据分析。魏玲等人^[14]首先提出了决策形式背景的概念, 并针对强协调和弱协调决策形式背景研究了属性约简问题。文献[15]利用决策形式背景进行规则提取和去冗余, 但冗余规则的判断比较复杂。文献[16]通过求取条件背景和

收稿日期: 2017-01-09; 改回日期: 2017-05-25; 网络出版: 2017-06-27

*通信作者: 陈泽华 zehuachen@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61402319, 61403273), 山西省自然科学基金(2014021022-4)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61402319, 61403273), The Natural Science Foundation of Shanxi Province (2014021022-4)

决策背景中的概念,寻找概念之间的包含关系,并用分辨矩阵得到约简后的属性集,但并无规则提取过程。2015年,李金海等人^[17]将启发式算法引入至概念格知识约简算法中,得到决策形式背景的约简属性集,使得获取的规则更加紧凑,有利于数据的决策分析,但是该算法并不能保证约简结果一定为最小约简。翟岩慧等人^[18]提出了决策蕴涵规范基,抑制了冗余规则的生成,但在某些情况下不能保证生成规则的准确性。苗夺谦等人^[19]将形式背景中的属性和对象都进行了粒化,降低了形式背景的规模、减少了算法复杂度,但是粒化使得算法在一定程度上损失了知识约简的准确性。

本文将真值表转化为决策形式背景,运用经典Chein概念构造算法求得形式背景中所有的概念,提出了基于FCA的MIMO真值表并行约简算法,该算法的实质是利用FCA对真值表进行最简规则提取。在参考文献[11, 13-18]基础上定义了启发式因子,提出了一种新的提取非冗余规则的知识获取算法。该算法不仅简化了现有FCA最简规则提取过程,同时实现了MIMO真值表的并行规则提取过程。通过定理证明、实例演示和算法复杂性分析证明了该算法的正确性、有效性和快速性。

2 预备知识

2.1 形式概念分析(FCA)

下面先介绍本文用到的一些FCA基本概念。

定义 1^[10] 形式背景用一个三元组 $T = (U, A, I)$ 表示,其中 U 表示非空有限对象集,称为论域; A 表示非空有限属性集; I 满足 $I \subseteq U \times A$,表示形式背景的一种二元关系,设 $u \in U, a \in A$,若 $(u, a) \in I$,则称 u 具有属性 a ,记作 uIa 。

在形式背景 $T = (U, A, I)$ 中,令 $2^U, 2^A$ 分别为对象集 U 和属性集 A 的幂集,对于任意对象集合 $P (P \subseteq U)$ 和任意属性集合 $Q (Q \subseteq A)$,Wille 定义了两个映射 $P^\uparrow: 2^U \rightarrow 2^A$ 和 $Q^\downarrow: 2^A \rightarrow 2^U$ ^[10]。

$$P^\uparrow = \{a \in A \mid \forall u \in P, uIa\} \quad (1)$$

$$Q^\downarrow = \{u \in U \mid \forall a \in Q, uIa\} \quad (2)$$

易知, $(^\uparrow, ^\downarrow)$ 为 2^U 和 2^A 之间的伽罗瓦(Galois)连接^[10]。

定义 2^[10] 三元组 $T = (U, A, I)$ 为一个形式背景,令 $P \subseteq U, Q \subseteq A$,若 $P^\uparrow = Q$ 且 $Q^\downarrow = P$,则称二元组 (P, Q) 为一个形式概念,其中 P 被称为这个概念的外延, Q 被称为这个概念的内涵。

为方便叙述,可将形式背景 T 下的所有概念存

入 $\Psi(T)$ 中。

记 $\Psi(T)$ 中的两个概念为 $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$,可定义这两个概念之间的逻辑计算:

$$(P_1, Q_1) \wedge (P_2, Q_2) = (P_1 \cap P_2, (Q_1 \cup Q_2)^\uparrow) \quad (3)$$

$$(P_1, Q_1) \vee (P_2, Q_2) = ((P_1 \cup P_2)^\downarrow, Q_1 \cap Q_2) \quad (4)$$

其中, $(\cup_{t \in T} P_t)^\uparrow = \cap_{t \in T} P_t^\uparrow, (\cup_{t \in T} Q_t)^\downarrow = \cap_{t \in T} Q_t^\downarrow$ 。

2.2 决策形式背景

定义 3^[14] 决策形式背景可以用一个五元组 $S = (U, C, I, D, J)$ 来表示,也可以表示为两个三元组 (U, C, I) 和 (U, D, J) 的组合,且 (U, C, I) 和 (U, D, J) 分别为一个形式背景,满足 $C \cap D = \emptyset$, C 和 D 分别被称作该决策形式背景的条件属性集和决策属性集。

真值表是表征逻辑事件输入和输出之间全部可能状态的表格,其中的每一条记录均可以看作是一条逻辑规则。本文用五元组定义真值表。

定义 4 用一个五元组 $L = \{U, X \cup Y, V, f\}$ 定义真值表,其中 U 为论域, X 表示输入逻辑变量, Y 表示输出逻辑变量, V 是逻辑变量值的集合,且 $V = \{0, 1\}$ 。 $f: U \times X \cup Y \rightarrow V$ 是一个信息函数,它指定 U 中每一个对象的变量值。

表 1 是一个简单的真值表,其中 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{Y\}$ 。

在真值表规则提取前,需要将真值表转化为决策形式背景。对于任意的输入变量 $x \in X$,将其转化为形式背景,可扩展为 $x, \bar{x}$ 两个输入变量(x 表示原变量, $\bar{x}$ 表示反变量^[1]),其中 $x^\downarrow = V_{x=1}, \bar{x}^\downarrow = V_{x=0}$ 。真值表中规则提取只需识别输出为“1”的规则,因此输出变量不需扩展,对于任意的输出变量 $y \in Y$,记 $y^\downarrow = V_{y=1}$ 。

根据上述转化过程,将表 1 转化成决策形式背景,如表 2 所示。其中 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, c, \bar{c}\}$, $D = \{Y\}$ 。

得到决策形式背景后,计算形式背景 (U, C, I) 中的所有形式概念。本文核心思想是形式背景的无冗

表 1 真值表

U	输入 X			输出 Y
	a	b	c	Y
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1

表2 决策形式背景

U	C						D
	a	$\bar{a}$	b	$\bar{b}$	c	$\bar{c}$	Y
1		×		×		×	×
2		×		×	×		
3		×	×			×	×
4		×	×		×		×
5	×			×		×	
6	×			×	×		×

余规则提取，这里先采用 Chein 算法^[11]进行建格运算，其算法步骤如表3。

表3 基于 Chein 算法计算概念(算法1)

输入：形式背景 (U, C, I)
输出：所有概念 $W_1 \sim W_n$ (n 为总概念数)
(1) 对于所有属性 $a \in C$ 计算 $(a^\downarrow, a^{\uparrow})$ ，计算得第1层为 $ C $ 个概念，分别为 $W_1 \sim W_{ C }$ ；
(2) 建立表格，将 $W_1 \sim W_{ C }$ 分别作为行和列，用第 i 行 ($i = 1, 2, \dots, C $) 与第 j 列 ($j = i, i+1, \dots, C $) 的概念相交，生成一个 $ C \times C $ 维的上三角矩阵，记为 V ，则 $V(i, j)$ 即为 W_i 与 W_j 的交 ($V(i, j) = W_i \wedge W_j$)；
(3) 判断 V 中的概念是否满足定义2，若满足则保留；否则删去；
(4) 记录所有产生的新概念，即为第2层得到的形式概念；
(5) 将该层所有新概念重复步骤(2)~步骤(4)，直到不再产生新概念，最后一个概念为 W_n ，计算结束；
(6) 输出所有概念 $W_1 \sim W_n$ ，算法结束。

注：在步骤(2)中，由于 $W_i \wedge W_j = W_j \wedge W_i$ ，故在 V 中只计算上三角，下三角可置为空集

由表2中的决策形式背景，根据算法1对表2的条件属性下的形式背景 (U, C, I) 进行建格，得形式背景的第1层概念为： $W_1 = (56, a\bar{b})$, $W_2 = (1234, \bar{a})$, $W_3 = (34, \bar{a}\bar{b})$, $W_4 = (1256, \bar{b})$, $W_5 = (246, c)$, $W_6 = (135, \bar{c})$ 。

第2层的新概念： $W_7 = (6, a\bar{b}c)$, $W_8 = (5, a\bar{b}\bar{c})$, $W_9 = (12, \bar{a}\bar{b})$, $W_{10} = (24, \bar{a}c)$, $W_{11} = (13, \bar{a}\bar{c})$, $W_{12} = (4, \bar{a}bc)$, $W_{13} = (3, \bar{a}b\bar{c})$, $W_{14} = (26, \bar{b}c)$, $W_{15} = (15, \bar{b}\bar{c})$ 。

第3层的新概念： $W_{16} = (2, \bar{a}\bar{b}c)$, $W_{17} = (1, \bar{a}\bar{b}\bar{c})$ 。

由 $W_{16} \wedge W_{17} = \emptyset$ ，可知计算结束。表2中 (U, C, I) 建立的所有概念为 $W_1 \sim W_{17}$ 。

3 非冗余规则提取

下面介绍本文提出的形式背景非冗余规则提取方面的相关定理及证明。

定义5^[14] 设 $\Psi(U, C, I)$ 和 $\Psi(U, D, J)$ 是两个概念格， $(P, Q) \in \Psi(U, C, I)$ ， $(M, N) \in \Psi(U, D, J)$ 。若集合

P, Q, M, N 均不为空集，且满足 $P \subseteq M$ ，则称概念 (P, Q) 蕴含概念 (M, N) ，记作 $(P, Q) \Rightarrow (M, N)$ 。

如果 $(P, Q) \Rightarrow (M, N)$ ，则可得内涵之间的蕴含 $Q \rightarrow N$ 。

在真值表扩展后的决策形式背景 $\Psi(U, D, J)$ 中，通常提取单个决策属性下的规则，因此可得推论1。

推论1 在决策形式背景 $S = (U, C, I, D, J)$ 中，任意的概念 $(P, Q) \in \Psi(U, C, I)$ ， $d \in D$ ，若满足 $P \subseteq d^\downarrow$ ，则表达式 $Q \rightarrow d$ 即为一条决策规则。

根据推论1，可以省去求取决策形式背景 $\Psi(U, D, J)$ 中所有概念的过程。但是据此提取的规则可能存在冗余^[20]，需进行进一步判断。

定义6^[20] 在决策形式背景 $S = (U, C, I, D, J)$ 中，设 $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2) \in \Psi(U, C, I)$ ， $d \in D$ ，且可生成两条决策规则 $Q_1 \rightarrow d, Q_2 \rightarrow d$ 。若满足条件 $Q_1 \subseteq Q_2$ 且 $P_1 \supseteq P_2$ ，则规则 $Q_2 \rightarrow d$ 可由规则 $Q_1 \rightarrow d$ 推导得到，即 $Q_1 \rightarrow d \Rightarrow Q_2 \rightarrow d$ 。这时，我们便称规则 $Q_2 \rightarrow d$ 是冗余规则。若规则 $Q_1 \rightarrow d$ 不可以由其他规则推导得到，称该规则为非冗余规则。

基于推论1，本文给出一种简单的冗余规则判断方法，该方法定义了启发式因子 He 值，按 He 值的大小顺序对论域进行识别，加快了冗余规则的判断，提高了算法效率。

定义7 在决策形式背景 $S = (U, C, I, D, J)$ 中，设一条决策规则为 $Q \rightarrow d$ ，且属性 Q 所对应的形式概念为 (P, Q) ，定义概念 (P, Q) 的 He 值(启发式算子)为

$$He = |P| \quad (5)$$

其中， $|P|$ 表示 P 中元素的个数。

通过启发式算子得到的规则仍然包含冗余属性，可通过定理1判断规则是否为最简规则。

定理1 在决策形式背景 $S = (U, C, I, D, J)$ 中，设一条决策规则 $Q \rightarrow d$ ，且属性 Q 所对应的形式概念为 (P, Q) ，计算 Q 中关于每个属性的“ $\downarrow$ ”映射，若求得的任意两属性映射集之间没有包含关系，即 $\forall q_1, q_2 \in Q$ ，满足 $q_1^\downarrow \not\subseteq q_2^\downarrow$ 且 $q_2^\downarrow \not\subseteq q_1^\downarrow$ ，则规则 $Q \rightarrow d$ 为最简规则。

证明 假设 $Q \rightarrow d$ 为任意一条决策规则，且属性 Q 所对应的形式概念为 (P, Q) 。根据推论1得 $P \subseteq d^\downarrow$ ，而 P 是由 Q 中的所有元素的外延求交集得来的(定义1、定义2)。设 $q_1, q_2 \in Q$ ，若满足 $q_1^\downarrow \subseteq q_2^\downarrow$ ，则必然存在 $q_1^\downarrow \cap q_2^\downarrow = q_1^\downarrow$ ，即对于 Q 而言，若求所有元素的“ $\downarrow$ ”映射的交集， q_2 属性必为冗余属性。可以判断，规则 $Q \rightarrow d$ 中有冗余属性且冗余为属性 q_2 。设 $\forall q_1, q_2 \in Q$ ，均满足 $q_1^\downarrow \not\subseteq q_2^\downarrow$ 且 $q_2^\downarrow \not\subseteq q_1^\downarrow$ ，则

规则 $Q \rightarrow d$ 为最简规则。

证毕

最简规则修正方法: $\forall q_1, q_2 \in Q$, 若满足 $q_1^\perp \subseteq q_2^\perp$, 则需要将属性 q_2 从 Q 中剔除, 即 $Q = Q - q_2$, 直到 Q 中不存在上述关系, 此时规则 $Q \rightarrow d$ 即为最简规则。

4 基于 FCA 的 MIMO 真值表并行约简算法

4.1 算法描述

在形式概念的基本理论和本文提出的非冗余规则提取方法基础上, 本文提出一种基于 FCA 的 MIMO 真值表并行约简算法, 该算法描述如表 4。

表 4 基于 FCA 的 MIMO 真值表并行约简算法(算法 2)

输入: 真值表 $L = \{U, X \cup Y, V, f\}$ 。
输出: 输出变量 d ($\forall d \in Y$) 的输出规则 rule_d 。
(1) 将真值表转化为决策形式背景 $S = (U, C, I, D, J)$;
(2) 求出形式背景 (U, C, I) 下所有的形式概念(根据算法 1);
(3) 计算 S 中所有输出变量的 “ $\perp$ ” 映射, 即 $\forall d \in D$, 求 $d^\perp$, 并做以下分析:
(4) 寻找背景 (U, C, I) 求得的概念中满足 $P \subseteq d^\perp$ 的概念 (P, Q) , 并计算 He ;
(5) 按照 He 从大到小的顺序对寻找得来的概念进行排序, 并存放入规则表中;
(6) 识别规则表中所有的新规则, 直到识别论域元素覆盖 $d^\perp$;
(7) 判断每个已寻到的规则中是否存在冗余属性, 若存在, 则剔除冗余属性;
(8) 将规则存入 rule_d , 并输出;
(9) $\forall d \in D$, 求得 rule_d , 即为输出变量 y 的输出规则 rule_d , 结束计算。

4.2 算法正确性分析

算法 2 中多输出真值表约简原理与单输出相同, 下面证明单输入下本算法与文献[9]中的算法(记作算法 3)的等价性。记 D_i 为第 i 个输出逻辑变量, 显然 $D_i = \{0, 1\}$ 。

由概念的定义(定义 3)可知, 真值表转化为决策形式背景后求取的每一个概念 (P, Q) , 满足 $Q^\perp = P$, 即若形式背景中论域子集 P 在逻辑变量 Q 下的值均为 “ $\times$ ”, 则在原真值表中 P 在 Q 变量下的取值相同, 此时 P 对应算法 3 中的一个等价类, 而等价类是在粒度为 $|Q|$ 的粒度空间下产生的。根据推论 1, 若 $P \subseteq D_i^\perp$, 则说明外延 P 是使得 $D_i = 1$ 的论域元素的子集。

算法 3^[9]中的输出粒矩阵 $\mathbf{Y}_0$, 输入粒矩阵 $\mathbf{X}$ 由等价类产生, 如前所述, P 是等价类, 若粒关系矩阵 $\mathbf{C} = \mathbf{X}\mathbf{Y}_0$ 中存在 $c_{ij} = 0$, 则表示等价类 P 与使得 $D_i = 0$ 的论域元素的交集为空集, 即 P 与使得 $D_i = 1$ 的论域元素的交集为 P 的全集, 即 $P \subseteq D_i^\perp$ 。

说明算法 2 与算法 3 的规则提取原理等价。

文献[9]中已证明算法 3 与卡诺图法等价, 因此算法 2 与卡诺图法也互相等价。等价性则说明了算法 2 的正确性。

4.3 并行性分析

算法 2 的并行思想体现在: 对于多输入多输出真值表, 不同的输出需要建造的概念格都是一样的, 即若给定真值表的输入, 可以构建概念池(提取所有概念), 不论真值表输出变量个数和输出值为何值, 都可直接对输入对应的形式背景中的概念采取资源共享的方式进行数据分析和最简规则提取, 因此可以实现多个输出变量的并行运算。而传统 Q-M 方法和卡诺图方法, 则需要对多个输出变量分别进行计算和约简。

5 实验分析

5.1 实例说明

例 1 数字显示译码器^[9]。

发光二极管 7 段数字显示器通常采用 (a, b, c, d, e, f, g) 字形显示, 如图 1 所示。表 5 给出一种 7 段译码器的真值表, 它接收 8421BCD 码, 输出逻辑值为 1 时, 对应的字段点亮, 输出为 0 时, 对应的字段熄灭。显示的字形图如图 2 所示, 真值表如表 5。

设表 5 为 $L = \{U, X \cup Y, V, f\}$, 其中 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $X = \{A_3, A_2, A_1, A_0\}$, $Y = \{a, b\}$ (本例仅以 a 和 b 并行输出为例)。将其转化为决策形式背景 $S = (U, C, I, D, J)$ 后, U 不变, $C = \{A_3, \bar{A}_3, A_2, \bar{A}_2, A_1, \bar{A}_1, A_0, \bar{A}_0\}$, $D = \{a, b\}$, 可得表 6。

根据算法 1 求 (U, C, I) 中的所有概念, 最终可得 43 个概念: $W_1 \sim W_{43}$ 。

下面是算法 2 的非冗余规则提取过程:

分别求出 D 中所有输出变量的 “ $\perp$ ” 映射, 即 $a^\perp = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $b^\perp = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}$ 。找出概念中外延为 $a^\perp$ 和 $b^\perp$ 子集的所有概念, 根据外延个数计算 He 并排序, 分别得到表 7、表 8。

由表 7, 按照序号 1~18 的顺序进行规则提取:

(1) 概念 $(3478, \bar{A}_3 A_1)$ 可得规则 $\bar{A}_3 \wedge A_1 \rightarrow a$, 覆盖 $a^\perp$ 中的新元素为 $\{3, 4, 7, 8\}$;

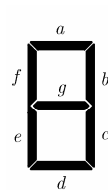


图 1 7 段字形显示

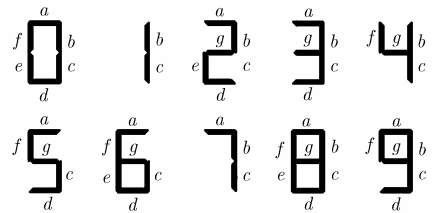


图 2 十进制数字

表5 7段译码器的真值表

U	逻辑输入 A				逻辑输出 Y						
	A ₃	A ₂	A ₁	A ₀	a	b	c	d	e	f	g
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
4	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
5	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
6	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
7	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
8	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
9	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
10	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1

表6 决策形式背景

U	C								D	
	A ₃	$\bar{A}_3$	A ₂	$\bar{A}_2$	A ₁	$\bar{A}_1$	A ₀	$\bar{A}_0$	a	b
1		×		×		×		×	×	×
2		×		×		×	×			×
3		×		×	×			×	×	×
4		×		×	×		×		×	×
5		×	×			×		×		×
6		×	×			×	×		×	
7		×	×		×			×	×	
8		×	×		×		×		×	×
9	×			×		×		×	×	×
10	×			×		×	×		×	×

(2)概念 $(139, \bar{A}_2 \bar{A}_0)$ 得规则 $\bar{A}_2 \wedge \bar{A}_0 \rightarrow a$, 覆盖 $a^\downarrow$ 中的新元素为 $\{1,9\}$;

(3)概念 $(9, 10, A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1)$ 得规则 $A_3 \wedge \bar{A}_2 \wedge \bar{A}_1 \rightarrow$

a , 覆盖 $a^\downarrow$ 中的新元素为 $\{10\}$;

(4)概念 $(78, \bar{A}_3 A_2 A_1)$, $(34, \bar{A}_3 \bar{A}_2 A_1)$ 无法覆盖 $a^\downarrow$ 中的新元素, 因此无法得到规则;

(5)概念 $(68, \bar{A}_3 A_2 A_0)$ 得规则 $\bar{A}_3 \wedge A_2 \wedge A_0 \rightarrow a$, 覆盖 $a^\downarrow$ 中的新元素为 $\{6\}$; 此时, 已识别论域元素覆盖 $a^\downarrow$, 由概念寻找规则的过程结束, 余下概念皆生成冗余规则(表7中灰色规则), 不用参与计算。利用逻辑电路相关知识, 可将得到的规则表述为:
 $Y_a = \bar{A}_3 A_1 + \bar{A}_2 \bar{A}_0 + A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 + \bar{A}_3 A_2 A_0$ 。

同理, 由表8可将输出 b 的规则表述为: $Y_b = \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_0 + \bar{A}_3 A_1 A_0$ 。

分析输出 a 每条规则是否存在冗余属性:(1)对于规则 $\bar{A}_3 A_1$, 由 $\bar{A}_3^\downarrow = \{12345678\}$, $\bar{A}_1^\downarrow = \{3478\}$, 根据定理1可知存在冗余属性 $\bar{A}_3$; (2)对于 $\bar{A}_2 \bar{A}_0$, 由 $\bar{A}_2^\downarrow = \{12349, 10\}$, $\bar{A}_0^\downarrow = \{13579\}$, 可知不存在冗余; (3)对于 $A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1$ 可知存在冗余属性 $\bar{A}_2$ 和 $\bar{A}_1$; (4)对于 $\bar{A}_3 A_2 A_0$ 可知存在冗余属性 $\bar{A}_3$ 。得输出 a 的最终输出表达式为: $Y_a = A_1 + A_3 + \bar{A}_2 \bar{A}_0 + A_2 A_0$ 。

同理, 可得输出 b 的最终输出表达式为: $Y_b = \bar{A}_2 + A_0 A_1 + \bar{A}_0 \bar{A}_1$ 。当选择7个输出并行计算时, 可同时得到另外5个输出的计算结果: $Y_c = A_0 + A_2 + A_3 + \bar{A}_1$, $Y_d = A_3 + \bar{A}_0 A_1 + \bar{A}_0 \bar{A}_2 + A_1 \bar{A}_2 + A_0 \bar{A}_1 A_2$, $Y_e = \bar{A}_0 A_1 + \bar{A}_0 \bar{A}_2$, $Y_f = A_3 + \bar{A}_0 \bar{A}_1 + \bar{A}_0 A_2 + \bar{A}_1 A_2$, $Y_g = A_3 + \bar{A}_0 A_2 + A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$ 。与文献[9]结果一致。

5.2 时间复杂性分析

记算法研究对象为真值表 $L = \{U, X \cup Y, V, f\}$ 。

根据定义5, 记扩展后的决策形式背景为 $S = (U, C, I, D, J)$, 则满足 $|C| = 2 \times |X|$ 。本文采用算法1求形式背景下的所有形式概念, 根据文献[21]中Chein算法的复杂性分析, 形式背景 (U, C, I) 下满足 $(u, c) \in I (u \in U, c \in C)$ 的元素个数为 $|U||C|/2 =$

表7 输出 a 规则列表

序号	概念	外延	He	规则	序号	概念	外延	He	规则
1	$(3478, \bar{A}_3 A_1)$	3,4,7,8	4	$\bar{A}_3 A_1$	10	$(19, \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	1,9	2	$\bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
2	$(139, \bar{A}_2 \bar{A}_0)$	1,3,9	3	$\bar{A}_2 \bar{A}_0$	11	$(10, A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 A_0)$	10	1	$A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 A_0$
3	$(9, 10, A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1)$	9,10	2	$A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1$	12	$(9, A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	9	1	$A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
4	$(78, \bar{A}_3 A_2 A_1)$	7,8	2	$\bar{A}_3 A_2 A_1$	13	$(8, \bar{A}_3 A_2 A_1 A_0)$	8	1	$\bar{A}_3 A_2 A_1 A_0$
5	$(34, \bar{A}_3 \bar{A}_2 A_1)$	3,4	2	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 A_1$	14	$(7, \bar{A}_3 A_2 A_1 \bar{A}_0)$	7	1	$\bar{A}_3 A_2 A_1 \bar{A}_0$
6	$(68, \bar{A}_3 A_2 A_0)$	6,8	2	$\bar{A}_3 A_2 A_0$	15	$(6, \bar{A}_3 A_2 \bar{A}_1 A_0)$	6	1	$\bar{A}_3 A_2 \bar{A}_1 A_0$
7	$(13, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_0)$	1,3	2	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_0$	16	$(4, \bar{A}_3 \bar{A}_2 A_1 A_0)$	4	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 A_1 A_0$
8	$(48, \bar{A}_3 A_1 A_0)$	4,8	2	$\bar{A}_3 A_1 A_0$	17	$(3, \bar{A}_3 \bar{A}_2 A_1 \bar{A}_0)$	3	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 A_1 \bar{A}_0$
9	$(37, \bar{A}_3 A_1 \bar{A}_0)$	3,7	2	$\bar{A}_3 A_1 \bar{A}_0$	18	$(1, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	1	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$

表 8 输出 b 规则列表

序号	概念	外延	He	规则	序号	概念	外延	He	规则
1	$(12349\ 10, \bar{A}_2)$	1,2,3,4,9,10	6	$\bar{A}_2$	13	$(15, \bar{A}_3 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	1,5	2	$\bar{A}_3 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
2	$(1234, \bar{A}_3 \bar{A}_2)$	1,2,3,4	4	$\bar{A}_3 \bar{A}_2$	14	$(2\ 10, \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	2,10	2	$\bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
3	$(129\ 10, \bar{A}_2 \bar{A}_1)$	1,2,9,10	4	$\bar{A}_2 \bar{A}_1$	15	$(19, \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	1,9	2	$\bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
4	$(24\ 10, \bar{A}_2 \bar{A}_0)$	2,4,10	3	$\bar{A}_2 \bar{A}_0$	16	$(10, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	10	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
5	$(139, \bar{A}_2 \bar{A}_0)$	1,3,9	3	$\bar{A}_2 \bar{A}_0$	17	$(9, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	9	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
6	$(159, \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	1,5,9	3	$\bar{A}_1 \bar{A}_0$	18	$(8, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	8	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
7	$(9\ 10, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1)$	9,10	2	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1$	19	$(5, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	5	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
8	$(34, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1)$	3,4	2	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1$	20	$(4, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	4	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
9	$(12, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1)$	1,2	2	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1$	21	$(3, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	3	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
10	$(24, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_0)$	2,4	2	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_0$	22	$(2, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	2	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
11	$(13, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_0)$	1,3	2	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_0$	23	$(1, \bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	1	1	$\bar{A}_3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_0$
12	$(48, \bar{A}_3 \bar{A}_1 \bar{A}_0)$	4,8	2	$\bar{A}_3 \bar{A}_1 \bar{A}_0$					

$|U||X|$ ，因此每一层的复杂度基数为 $O(|U|^2 |X|^2)$ ，而总层数 M 满足 $M = \log_2(|U||X|)$ ，因此 Chein 算法的总时间复杂度为 $O(|U||X|) + O(|U|^2 |X|^2 \log_2(|U||X|))$ 。由算法 2 的步骤可知，其规则提取的复杂度为 $O(|Y|)$ ，且与概念求取之间为求和的关系，因此，算法 2 的总时间复杂度为 $O(|U||X|) + O(|U|^2 |X|^2 \log_2(|U||X|)) + O(|Y|)$ 。

在算法 3^[9]中，其计算单个粒关系矩阵的复杂度为 $O(|U| \cdot C_{|X|}^\omega)$ ，其规则提取的复杂度为 $O(|U| \cdot |Y|)$ ，因此算法 3 的总复杂度为 $O(|U|^2 \cdot |Y| \cdot 2^{|X|})$ ；文献[8]的算法(记作算法 4)中，其计算单个粒矩阵的时间复杂度为 $O(|U| \cdot C_{|X|}^\omega)$ (ω 为粒度)，单个粒关系矩阵的复杂度为 $O(2 \cdot |U| \cdot C_{|X|}^\omega)$ ，规则提取的复杂度为 $O(|U| \cdot |X|)$ ，因此单输出下算法的总时间复杂度为 $O(|U|^2 \cdot |X| \cdot 2^{|X|+1})$ ，多输出下其复杂度为 $O(|U|^2 \cdot |X| \cdot 2^{|X|+1} \cdot |Y|)$ ；传统 Q-M 算法^[3](记作算法 5)的复杂度为 $O(3^{|X|} \times |Y|)$ 。

由复杂度可以看出，算法 2 的复杂度为以 2 为底的对数阶，算法 3、算法 4 复杂度为基数为 2 的指数阶，算法 5 复杂度为基数为 3 的指数阶，因此算法 2 的时间复杂度更具优势。

5.3 信息缺失分析

根据算法 2 的计算步骤可知，利用 He 寻找新规则是为了得到决策值为“1”的论域元素的最小覆盖，

并且保证用最简的规则进行表示(概念内涵元素较少)；由定理 1，可知最终提取的规则为最简规则，且根据 4.2 节的算法正确性分析及 5.1 节的实例计算验证了规则的正确性，因此算法 2 过程并不存在信息缺失。

6 结束语

本文针对数字电路中真值表的约简问题，提出了基于形式概念的多输出真值表并行约简算法，该算法首先将真值表转化为决策形式背景，求出条件形式背景中所有概念，并且定义启发式算子，提取非冗余规则，最后对每条规则去除冗余属性，得到最简的输出规则。本文从数学证明、实例分析和复杂性分析 3 个方面说明了算法的正确性、可行性和有效性。本文算法有以下特点：(1)通过算法的复杂性分析，相比算法 3、算法 4、算法 5，本文算法降低了复杂度，加快了算法效率；(2)本文算法通过定义启发式算子和定理 1 消除了规则中的冗余属性，保证了规则的准确性和简洁性；(3)本文算法输出变量个数不会对算法的复杂度造成影响，可实现高效率的并行处理。本文算法的不足之处在于，该算法对于处理小型真值表具有一定优势，但对于大型真值表，由于爆炸性的概念数增长，会导致存储空间短缺，降低算法效率；而且对于一般性决策表，由于表中的属性值较多，因此由决策表扩展成的形式背景中属性个数也较多，也会使得算法的效率大大降低。因此，如何利用 FCA 实现大型真值表和决策表的快速约简仍是亟待思考的问题，相关工作仍在继续。

参 考 文 献

- [1] 阎石. 数字电子技术基础[M], 第5版, 北京: 高等教育出版社, 2006: 29-54.
YAN Shi. Fundamentals of Digital Electronics[M]. Beijing: 5th Edition, Higher Education Press, 2006: 29-54.
- [2] 刘宝琴. 数字电路与系统[M], 第2版, 北京: 清华大学出版社, 2007: 39-56.
LIU Baoqin. Digital Circuits and Systems[M]. 2nd Edition, Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 39-56.
- [3] QUINE W V. The problem of simplifying truth functions[J]. *American Mathematical Monthly*, 1952, 59(8): 521-531. doi: 10.2307/2308219.
- [4] DUSA A and THIEM A. Enhancing the minimization of boolean and multivalued output functions With QMC[J]. *The Journal of Mathematical Sociology*, 2015, 39(2): 92-108. doi: 10.1080/0022250X.2014.897949.
- [5] HUANG Xinjie, WU Ning, and ZHANG Xiaoqiang. Quine-McCluskey repair technique for evolutionary design of combinational logic circuits[J]. *Lecture Notes in Engineering & Computer Science*, 2015, 2216(1): 674-678.
- [6] 黄均鼐, 赵文庆. 自动逻辑综合[J]. 复旦学报(自然科学版), 1984, 23(2): 233-237.
HUANG Junnai and ZHAO Wenqing. Automatic logic synthesis[J]. *Journal of Fudan University (Natural Science)*, 1984, 23(2): 233-237.
- [7] 边计年, 薛宏熙, 苏明, 等. 数字系统设计自动化[M]. 第2版, 北京: 清华大学出版社, 2005: 221-226.
BIAN Jinian, XUE Hongxi, SU Ming, et al. Design Automation for Digital Systems[M]. 2nd Edition, Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 221-226.
- [8] 陈泽华, 曹长青, 谢刚. 基于粒矩阵的多变量真值表快速约简算法[J]. 模式识别与人工智能, 2013, 26(8): 745-750. doi: 10.3969/j.issn.1003-6059.2013.08.006.
CHEN Zehua, CAO Changqing, and XIE Gang. Granular matrix based rapid reduction algorithm for multivariable truth table[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2013, 26(8): 745-750. doi: 10.3969/j.issn.1003-6059.2013.08.006.
- [9] 陈泽华, 马贺. 基于粒矩阵的多输入多输出真值表快速并行约简算法[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(5): 1260-1265. doi: 10.11999/JEIT141129.
CHEN Zehua and MA He. Granular matrix based rapid parallel reduction algorithm for MIMO truth table[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(5): 1260-1265. doi: 10.11999/JEIT141129.
- [10] WILLE R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts[M]. Springer Netherlands, 1982: 445-470. doi: 10.1007/978-94-009-7798-3_15.
- [11] CHEIN Michel. Algorithmes de recherche des sous-matrices premières d'une matrice[J]. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie*, 1969, 13(1): 21-25.
- [12] GANTER B. Two basic algorithms in concept analysis[C]. International Conference on Formal Concept Analysis, Springer-Verlag, Agadir, Morocco, 2010: 312-340. doi: 10.1007/978-3-642-11928-6_22.
- [13] 何苗, 石慧, 魏玲. 基于包含度理论的概念格构造方法研究[J]. 西北大学学报: (自然科学版), 2014, 44(1): 6-10.
HE Miao, SHI Hui, and WEI Ling. Concept lattice construction based on inclusion degree[J]. *Journal of Northwest University (Natural Science Edition)*, 2014, 44(1): 6-10.
- [14] 魏玲, 祁建军, 张文修. 决策形式背景的概念格属性约简[J]. 中国科学(E辑:信息科学), 2008, 38(2): 195-208.
WEI Ling, QI Jianjun, and ZHANG Wenxiu. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. *Science in China (Series F: Information Sciences)*, 2008, 51(7): 910-923.
- [15] LI Jinhai, MEI Changlin, KUMAR Cherukuri-Aswani, et al. On rule acquisition in decision formal contexts[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2013, 4(6): 721-731. doi: 10.1007/s13042-013-0150-z.
- [16] SHAO Mingwen, LEUNG Yee, and WU Weizhi. Rule acquisition and complexity reduction in formal decision contexts[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(1): 259-274. doi: 10.1016/j.ijar.2013.04.011.
- [17] 李金海, 梅长林, 张红英, 等. 基于遗传算法的决策形式背景的属性约简方法及其在决策分析中的应用[J]. 小型微型计算机系统, 2015, 36(8): 1803-1808.
LI Jinhai, MEI Changlin, ZHANG Hongying, et al. Attribute reduction method for formal decision contexts based on genetic algorithm and its application to decision-making analysis[J]. *Journal of Chinese Mini-Micro Computer Systems*, 2015, 36(8): 1803-1808.
- [18] 翟岩慧, 李德玉, 曲开社. 决策蕴涵规范基[J]. 电子学报, 2015, 43(1): 18-23. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.01.004.
ZHAI Yanhui, LI Deyu, and QU Kaishe. Canonical basis for decision implications[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(1): 18-23. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.01.004.
- [19] KANG Xiangping and MIAO Duoqian. A study on information granularity in formal concept analysis based on concept-bases[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 105: 147-159. doi: 10.1016/j.knsys.2016.05.005.
- [20] LI Jinhai, MEI Changlin, and LÜ Yuejin. Knowledge reduction in decision formal contexts[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2011, 24(5): 709-715. doi: 10.1016/j.knsys.2011.02.011.
- [21] 田宏, 王绍斐. 概念格的批处理构造算法[J]. 大连交通大学学报, 2011, 32(3): 72-75. doi: 10.3969/j.issn.1673-9590.2011.03.017.
TIAN Hong and WANG Shaofei. Batch processing algorithm for concept lattice[J]. *Journal of Dalian Jiaotong University*, 2011, 32(3): 72-75. doi: 10.3969/j.issn.1673-9590.2011.03.017.

陈泽华: 女, 1974年生, 教授, 主要研究方向为粒计算、智能信息处理与智能控制。
 闫继雄: 男, 1992年生, 硕士生, 研究方向为粒计算、概念格、组合逻辑优化。
 柴 晶: 男, 1983年生, 讲师, 主要研究方向为机器学习、模式识别。