一种特殊的多米诺扩缩运算

刘小青　　许　进*
(北京大学信息科学技术学院　北京　100871)
(北京大学高可信软件技术教育部重点实验室　北京　100871)

摘　要：该文提出一种称为 334 扩缩运算的多米诺扩缩运算。使用该运算构造了一类特殊的极大平面图——334-型极大平面图，证明了该类图均为树型 2-色不变圈着色，且每个 $4k$-阶 334-型极大平面图恰有 2^{k-1} 个 2-色不变圈着色及 2^{k-2} 个树着色。证明了该运算可用于构造纯树着色极大平面图，并提出猜想：若极大平面图 G 是纯树(纯圈，混合)着色，则对 G 实施 334 扩(缩)轮运算后，所得之图仍是纯树(纯圈，混合)着色。

关键词：半封漏斗；树型 2-色不变圈着色；纯树着色；334 扩轮运算
中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2017)01-0221-10
DOI: 10.11999/JEIT160886

Special Type of Domino Extending-contracting Operations

LIU Xiaoqing　　XU Jin
(*School of Electronic Engineering and Computer Science*, *Peking University*, *Beijing* 100871, *China*)
(*Key Laboratory of High Confidence Software Technologies*, *Peking University*, *Beijing* 100871, *China*)

Abstract: In this paper, a new domino extending-contracting operation, called 334 extending-contracting operation, is put forward, on the basis of which, it is proposed to construct a particular kind of graphs, i.e., 334-type maximal planar graphs, and proved that all those graphs are tree-type and 2-chromatic cycle-unchanged colored and every 334-type maximal planar graphs of order $4k$ has exactly 2^{k-1} 2-chromatic cycled-unchanged colorings and 2^{k-2} tree-colorings. Additionally, it is proved that an infinite family of purely tree-colored graphs can be generated by implementing a series of 334 extending-wheel operations, and conjectured that if a maximal planar graph G is purely tree-colored (purely cycle-colored or impure-colored), then the graph obtained by implementing one 334 extending-wheel (contracting-wheel) operation on G is still purely tree-colored (purely cycle-colored or impure-colored).

Key words: Semi-funnels; Tree-type and 2-chromatic cycle-unchanged colored; Purely tree-colored; 334 extending-wheel operations

1　引言

本文所言之图皆指有限、简单、无向图。对于给定图 G，分别用 $V(G)$，$E(G)$ 和 $d_G(v)$ 来表示图 G 的顶点集，边集，顶点 v 的度数，可分别简记为 V，E，$d(v)$。图 G 的阶是 $V(G)$ 中元素的个数 $|V(G)|$。若 $V' \subseteq V$，$E' \subseteq E$，且 E' 中每条边的 2 个端点均在 V' 中，则称图 $H=(V',E')$ 是图 G 的一个**子图**。

图 G 的一个 k-**着色**，是指从图 G 的顶点集 V 到颜色集 $C(k)=\{1,2,\cdots,k\}$ 的一个映射 f，满足对任意的 $xy\in E(G)$，有 $f(x)\ne f(y)$。图 G 的**色数**，记作 $\chi(G)$，是指满足图 G 有一个 k-着色的最小数值 k。图 G 中所有不同的 k-着色构成的集合用 $C_k(G)$ 表示，若 2 种着色可通过颜色互换达到对方，则这 2 种着色被认为是相同的。

设 G 是一个 k-可着色的图，$f\in C_k(G)$，$\{1,2,\cdots,k\}$ 为颜色集。G 中所有着颜色 i 与颜色 t 的顶点构成的顶点子集导出的子图称为 **2-色导出子图**，2-色导出子图中的分支称为 **2-色分支**，其中，$i,t=1,2,\cdots,k$，$i\ne t$。**Kempe 变换**是指对图 G 中某个 2-色分支实施颜色互换，并使其余顶点着色不变的一种着色运算。设 $f,f'\in C_k(G)$，若从 f 出发，通过若干次 Kempe 变换可获得 f'，则称 f 与 f' 是

收稿日期：2016-08-29；改回日期：2016-12-06；网络出版：2016-12-14
*通信作者：许进　jxu@pku.edu.cn
基金项目：国家 973 计划项目(2013CB329600)，国家自然科学基金(61372191, 61472012, 61472433, 61572046, 61502012, 61572492, 61572153, 61402437)
Foundation Items: The National 973 Program of China (2013CB329600), The National Natural Science Foundation of China (61372191, 61472012, 61472433, 61572046, 61502012, 61572492, 61572153, 61402437)

Kempe 等价的。图G的基于f的 **Kempe 等价类**是指由f以及所有与f互为Kempe等价的着色构成之集。有关 Kempe 变换的最新研究进展可查看文献[1–5]。

设G是一个4-色极大平面图，$f \in C_4(G)$。若G有一个偶圈C，C在f下仅含有2种颜色，则称f为**圈着色**；否则，称f是**树着色**。若G不含树着色，则称G是**纯圈着色的**；若G不含圈着色，则称G是**纯树着色的**；若G含圈着色和树着色，则称G是**混合着色的**。若基于f的 Kempe 等价类F^f满足：存在一个偶圈C，使得C在任意$g \in F^f$下仅含2种颜色，则称f为 **2-色不变圈着色**。若G仅有树着色和2-色不变圈着色，则称G是**树型 2-色不变圈着色**。

文献[6,7]对平面图的着色类型进行了研究，将着色分为树着色和圈着色，依据着色类型将4-色平面图分为3类：纯树着色型、纯圈着色型和混合着色型，并提出了纯树着色猜想“一个平面图是纯树着色图当且仅当它是正二十面体或哑铃极大平面图”，若该猜想成立，则著名的已有43年历史的唯一4-色平面图猜想[8–12]成立。文献[13]定义了一类特殊的圈着色——2-色不变圈着色，在此基础上，将4-色非 Kempe 平面图的 Kempe 等价类分为树型，圈型和循环圈型，这也是非 Kempe 平面图存在的根源。若一个k-色图的都有k-着色构成一个 Kempe 等价类，则称该图为 **Kempe 图**。

本文给出了一种构造具有相同着色类型的极大平面图类的方法，包含 **334 扩轮运算**和 **334 缩轮运算**。具体安排如下：第2节给出了334扩轮运算及334缩轮运算的定义；第3节基于334扩缩运算研究了一类树型 2-色不变圈着色极大平面图——334-型极大平面图的基本性质；第4节讨论了334-型极大平面图的着色性质；第5节给出了用334扩轮运算构造纯树着色极大平面图的方法。

文中未给出的相关定义、记号与理论参见文献[6,13–15]。

2　334 扩缩运算

把图 1(a)中所示的图称为**漏斗**，其中度数为1的顶点称为**漏顶**；度数为3的顶点称为**漏腰**；2个度数为2的顶点称为**漏底**。若一个图的顶点导出子图是漏斗，则该子图称为**漏斗子图**。334 扩缩运算本质上是一种多米诺扩缩运算[14]，其中，334 扩轮运算包含2次扩3-轮运算以及一次扩4-轮运算；334缩轮运算包含2次缩3-轮运算以及一次缩4-轮运算。设G是一个极大平面图，图H是一个标号如图1(b)所示的半封漏斗。若H是G的一个子图，且$d_G(v_1) = d_G(v_3) = 4$，$d_G(v_2) = d_G(v_4) = 5$，则称H是G的一个 **45-型半封漏斗子图**，简称为 **45-型子图**。

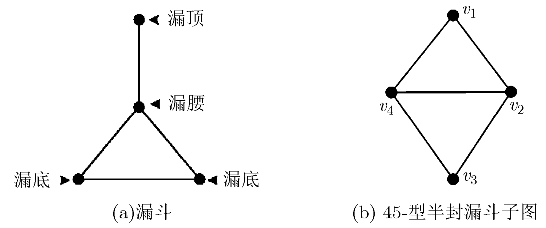


图1 漏斗与45-型半封漏斗子图

334 扩轮运算的对象图是极大平面图中的45-型子图。**334 扩轮运算**，记作ς，是指按照如下步骤，将G的一个 45-型子图H(如图 1(b)所示)变成图2(a)~2(d)中最右边所示构形的过程：

步骤1　确定H的漏腰顶点和漏底顶点。显然，漏腰要么是v_4，要么是v_2。若选择v_4作为漏腰，则2个漏底要么是v_1和v_2，要么是v_3和v_2；若选择v_2作为漏腰，则2个漏底要么是v_1和v_4，要么是v_3和v_4。以下步骤中假定选择v_4为漏腰，v_3和v_2分别为漏底。

步骤2　对由漏腰和2个漏底构成的三角形$v_2v_3v_4$实施扩3-轮运算，将新生成的3度顶点记作v_5，所得结果如图2(a)第2个图示。

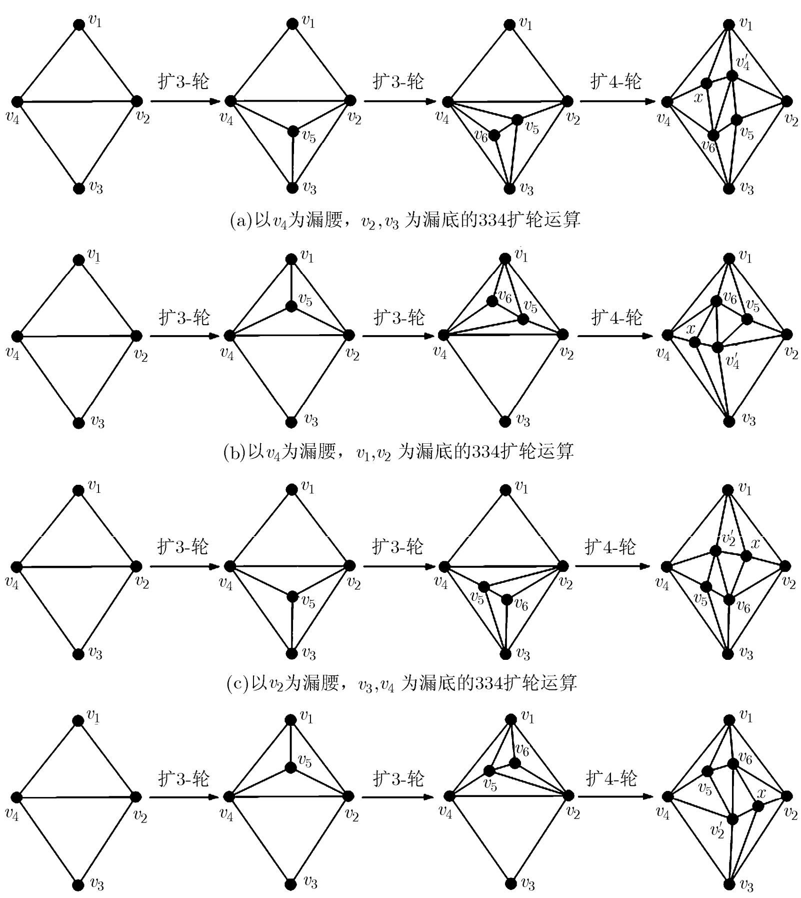
步骤3　对由漏腰、3度顶点v_5及一个漏底(满足：与漏顶v_1距离为2)构成的三角形实施扩3-轮运算，将新的3度顶点记作v_6，所得结果如图2(a)第3个图示。

步骤4　对以漏腰v_4为2-长路的内点，漏顶v_1和新生成的3度顶点v_6为该路的端点构成的2-长路实施扩4-轮运算，得到图2(a)最右边所示的构形。

334 扩轮运算的逆运算称为 **334 缩轮运算**，记作$\bar{\varsigma}$，并把图2(a)–图2(d)中最右边的构形称为$\varsigma(G)$的 **334 缩轮对象子图，简称为 334 子图**。显然，经过334扩轮运算后，v_1，v_2，v_3和v_4在$\varsigma(G)$中的度数均为6。

注意：(1)在上述334扩轮运算过程中，若选择v_4作为漏腰，v_1和v_2作为漏底，则得到图2(b)最右边所示构形；若选择v_2作为漏腰，v_3和v_4作为漏底，则得到图6(c)最右边所示构形；若选择v_2作为漏腰，v_1和v_4作为漏底，则得到图2(d)最右边所示构形。

(2)在图2(a)与图2(d)中，2个最右边构形的区别仅是构形的内部顶点标号不同，若对一个极大平面图的同一个45-型子图分别实施如图2(a)和图2(d)所示过程的334扩轮运算，则得到2个相同的极大平面图，故视这2个构形是**相同的**；同理，图2(b)与图2(c)中2个最右边的构形是**相同的**。



(a)以 v_4 为漏腰，v_2,v_3 为漏底的334扩轮运算

(b)以 v_4 为漏腰，v_1,v_2 为漏底的334扩轮运算

(c)以 v_2 为漏腰，v_3,v_4 为漏底的334扩轮运算

(d)以 v_2 为漏腰，v_1,v_4 为漏底的334扩轮运算

图 2 选择不同漏腰和漏底的 334 扩轮运算过程示意图

(3)在图 2(a)最右边所示构形中，v_1 与 v_4 有一个 4 度公共邻点，而在图 2(b)最右边构形中，v_1 与 v_4 不含 4 度公共邻点，对一个极大平面图的同一个 45-型子图分别实施如图 2(a)和图 2(b)所示过程的 334 扩轮运算后，得到的 2 个新的极大平面图很可能是不同构的，故视这 2 个构形是**不相同的**；同理，图 2(c)与图 2(d)中 2 个最右边的构形是**不相同的**。因此，**有且仅有 2 个不相同的 334 子图**。

下面，我们讨论不同的 334 缩轮运算的具体过程。设 G 是一个极大平面图，H 是 G 的一个 334 子图。由上述讨论知，存在 2 个不相同的 334 子图，故分 2 种情形讨论。

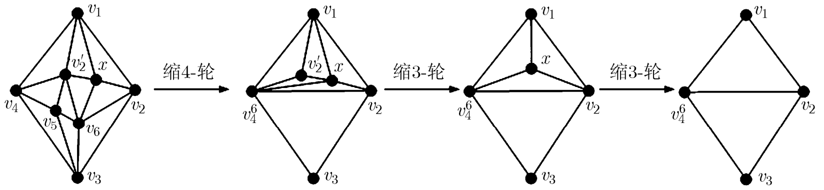
情形 1　H 为如图 2(c)最右边的构形。

在对 H 实施 334 缩轮运算过程中，若缩 4-轮运算的 2 个被收缩点为 v_4,v_6，则对应的 334 缩轮运算过程如图 3(a)所示，其中，v_4^6 表示收缩 v_4,v_6 后得到的新顶点，下同。若缩 4-轮运算中的 2 个被收缩点为 v_2',v_3，则对应的 334 缩轮运算过程如图 3(b)所示，其中，v_2^3 表示收缩 v_2',v_3 后得到的新顶点。若缩 4-轮运算中的 2 个被收缩点为 v_1,v_6，则对应的 334 缩轮运算过程如图 3(c)所示。若缩 4-轮运算中的 2 个被收缩点为 v_2',v_2，则对应的 334 缩轮运算过程如图 3(d)所示，其中，v_2^2 表示收缩 v_2',v_2 后得到的新顶点。

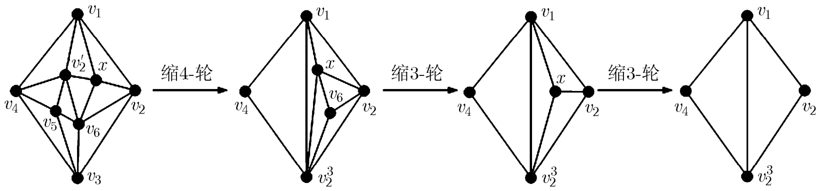
情形 2　H 为如图 2(d)最右边的构形。

在对 H 实施 334 缩轮运算过程中，若缩 4-轮运算的 2 个被收缩点为 v_4,v_6，则对应的 334 缩轮运算过程如图 3(e)所示。若缩 4-轮运算中的 2 个被收缩点为 v_2',v_1，则对应的 334 缩轮运算过程如图 3(f)所示，其中，v_1^2 表示收缩 v_2',v_1 后得到的新顶点。若缩 4-轮运算中的 2 个被收缩点为 v_3,v_6，则对应的 334 缩轮运算过程如图 3(g)所示。若缩 4-轮运算中的 2 个被收缩点为 v_2',v_2；则对应的 334 缩轮运算过程如图 3(h)所示，其中，v_2^2 表示收缩 v_2',v_2 后得到的新顶点。

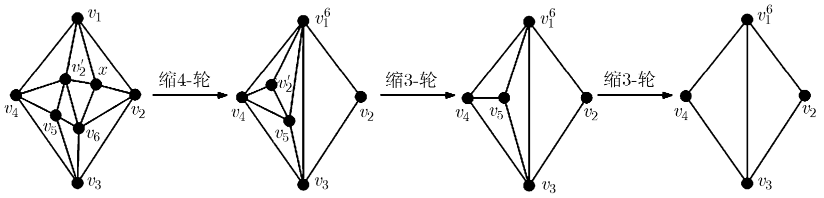
图 3(a)，图 3(d)，图 3(e)，图 3(h)中最右边构形的区别仅是构形的顶点标号方式不同，对一个极大平面图的同一个 334 子图分别实施如图 3(a)，图 3(d)，图 3(e)，图 3(h)所示过程的 334 缩轮运算，则得到 4 个相同的极大平面图，故视图 3(a)，图 3(d)，图 3(e)，图 3(h)中最右边的构形是**相同的**；同理，图 3(b)，图 3(c)，图 3(f)，图 3(g)中最右边的构形是**相同的**。



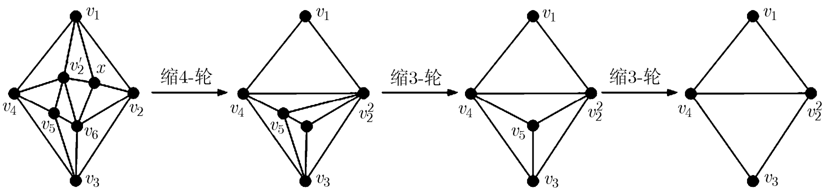
(a) v_4,v_6为被收缩顶点



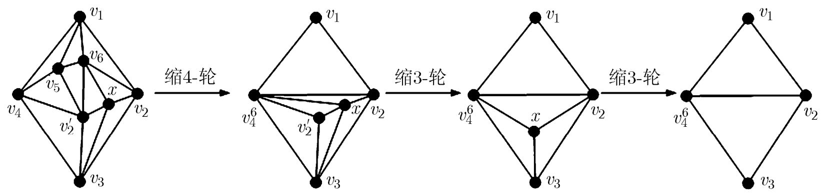
(b) v_2,v_3为被收缩顶点



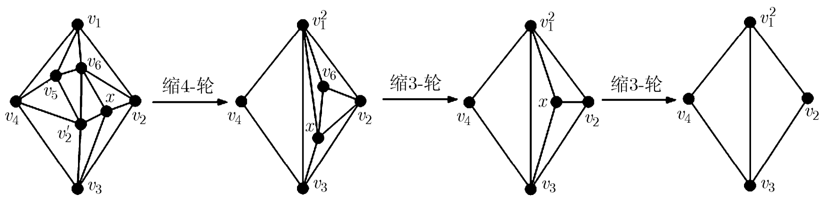
(c) v_1,v_6为被收缩顶点



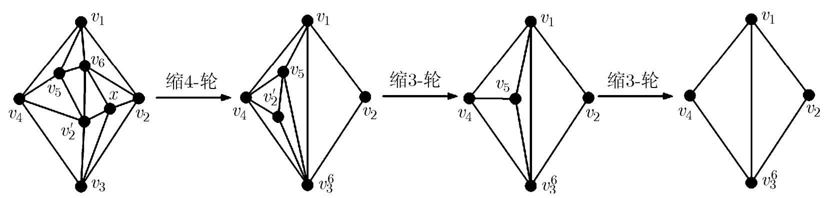
(d) v_2,v_2'为被收缩顶点



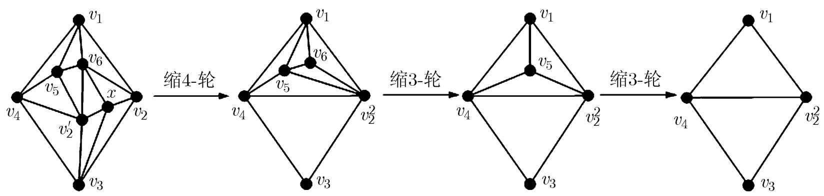
(e) v_4,v_6为被收缩顶点



(f) v_1,v_2'为被收缩顶点



(g) v_3,v_6为被收缩顶点



(h) v_2,v_2'为被收缩顶点

图 3 选择不同被收缩点对的 334 缩轮运算过程示意图

在图 3(a)最右边的构形中，v_2 可作为该构形(45-型子图)的漏腰，而在图 3(b)最右边构形中，v_2 不可作为该构形的漏腰，若对一个极大平面图的同一个 334 子图分别实施如图 3(a)，图 3(b)所示过程的 334 缩轮运算，则所得 2 个极大平面图很可能是不同构的，故视图 3(a)，图 3(b)中 2 个最右边的构形是**不相同的**。因此，对于任意 334 子图，对其实施不同过程的 334 缩轮运算后，所得**不相同构形有且仅有 2 个**。

3　334-型极大平面图

利用 334 扩轮运算，可以构造出一类着色非常特殊的图——334-型极大平面图，其有且仅有树着色和 2-色不变圈着色，且着色数随图的阶数呈指数增长(第 4 节证明了这一着色性质)。

3.1 334-型极大平面图及构造

图 4 所示的图是阶数最小的最小度为 4 且含 45-型子图的极大平面图，称为 **8-阶 334-型极大平面图**，记作 SF^8 。

设 SF^i ($i>8$)是一个 i-阶最小度为 4 的含 334 子图的极大平面图。对 SF^i 实施 334 缩轮运算，所得之图若仍含 334 子图，再对其实施 334 缩轮运算，按此步骤连续实施 334 缩轮运算，当最终所得之图为 SF^8 时，称 SF^i 为 **334-型极大平面图**。

由定义可知，对一个 i-阶($i>8$)334-型极大平面图实施 334 缩轮运算，所得之图必为 334-型极大平面图。 下面，基于 i-阶 334-型极大平面图 SF^i ($i\ge 8$)，给出构造 $(i+4)$-阶 334-型极大平面图的方法步骤：

步骤 1　找出 SF^i 中所有的 45-型子图；

步骤 2　对 SF^i 中的每个 45-型子图实施 334 扩轮运算，根据 334 扩轮运算中选择漏腰，漏底的选择不同，可能得到不同的 $(i+4)$-阶 334-型极大平面图。

3.2 334-型极大平面图的基本性质

定理 1　每个 334-型极大平面图的阶数为 $4k$, $k\ge 2$ 。

证明　由 334-型极大平面图定义可知，任意 i-阶($i>8$)334-型极大平面图均可由 SF^8 通过实施一系列 334 扩轮运算得到，而每次 334 扩轮运算均会导致增加 4 个顶点，故定理成立。

定理 2　设 SF^{4k} ($k\ge 3$)是一个 $4k$-阶 334-型极大平面图，H 是它的一个 45-型子图。$\forall u\in V(\mathrm{SF}^{4k})\setminus V(H)$，及 $\forall v\in V(H)$，若 $uv\in E(G)$，则 $d(u)=6$ 。

证明　当 $k=3$ 时，共有 2 个 334-型极大平面图，如图 5(a)，图 5(b)所示。每个 12-阶 334-型极大平面图均有 2 个 45-型子图，如图 5 中粗线所示，且满足定理要求。

由 334-型极大平面图定义可知，当 $k>3$ 时，任意的 SF^{4k} 均是从某个 SF^{12} 出发，通过实施一系列的 334 扩轮运算得到。因为每次 334 扩轮运算后仅改变作用对象子图(即 45-型子图)的顶点度数，使得原来对象子图中顶点的度数均变为 6 度，而不改变其它顶点的度数(如图 2 所示)，故本定理成立。

由定理 2 可推出下述结论：

推论 1　设 SF^{4k} ($k\ge 3$)是一个 334-型极大平面图。$\forall u\in V(\mathrm{SF}^{4k})$，若 u 不在 45-型子图中，则 $d_{\mathrm{SF}^{4k}}(u)=6$；若 $d_{\mathrm{SF}^{4k}}(u)=4$，则 u 是某个 45-型子图的顶点。

定理 3　设 SF^{4k} ($k\ge 3$)是一个 334-型极大平面图，H_1 是它的一个 334 子图。若将 H_1 替换为与之不相同的另一个 334 子图，则所得极大平面图仍为 334-型极大平面图。

证明　由前面讨论知，任意 334 子图仅有一个与之不相同的 334 子图。

当 $k=3$ 时，共有 2 个 334-型极大平面图。每个 12-阶 334-型极大平面图均有 2 个 334 子图(每个 334 子图中含有一个 45-型子图，如图 5(a)，图 5(b)中粗线所示)。

若将图 5(a)中上方的 334 子图替换为与之不相同的 334 子图，如图 6(a)所示，则得到一个与图 5(b)同构的图；若将图 5(a)中下方的 334 子图替换为与之不相同的 334 子图，如图 6(b)所示，则得到一个与图 5(b)同构的图。若将图 5(b)中的任意一个 334 子图替换为与之不相同的334子图，则得到与图5(a)同构的图。故 $k=3$ 时结论成立。

当 $k>3$ 时，设 H_1 是 SF^{4k} 的一个 334 子图，用

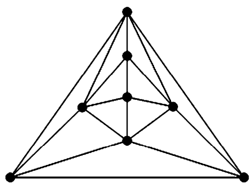
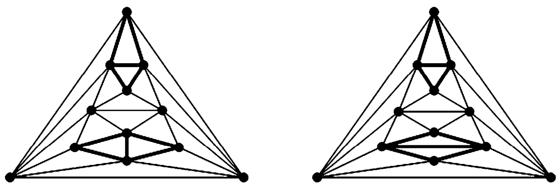
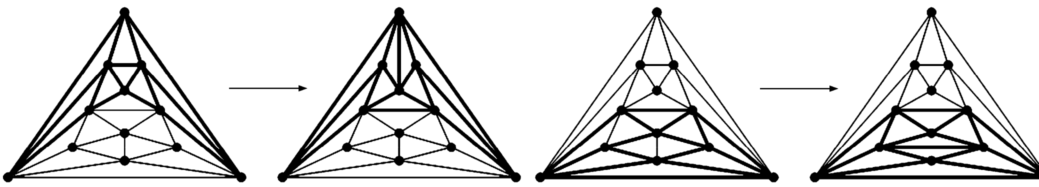


图 4　8-阶 334-型极大平面图



(a) 12-阶334-型极大平面图1　(b) 12-阶334-型极大平面图2

图 5　2 个 12-阶 334-型极大平面图



(a)将图5(a)中上方的334子图替换为与之不相同的334子图　　(b)将图5(a)中下方的334子图替换为与之不相同的334子图

图6 定理3证明示意图

SF_1^{4k}表示将H_1替换为与之不相同的334子图H_2而得到的极大平面图。在对SF^{4k}连续实施334缩轮运算使之变为12-阶334-型极大平面图G_1的过程中，若没有对H_1实施334缩轮运算，则我们可以对SF_1^{4k}采取与SF^{4k}相同的连续334缩轮运算过程，使SF_1^{4k}变为12-阶极大平面图，记作G_2。显然，在G_1中将H_1替换为H_2所得之图即为G_2。根据对$k=3$时的情况讨论可知，G_2是334-型极大平面图，故SF_1^{4k}也是334-型极大平面图，结论成立。若在对SF^{4k}连续实施334缩轮运算使之变为12-阶334-型极大平面图的过程中，存在对H_1实施334缩轮运算的过程，由图3可知，分别对SF^{4k}的H_1和SF_1^{4k}的H_2实施334缩轮运算后，可得到2个同构的极大平面图，因此，SF_1^{4k}也是334-型极大平面图。　证毕

由推论1和定理3，可直接推出下述结论：

推论2　设SF^{4k}($k\ge 2$)是一个334-型极大平面图，H_1是它的一个45-型子图。若将H_1替换为与之不相同的另一个45-型子图H_2，则所得极大平面图为334-型极大平面图。

定理4　每个334-型极大平面图恰有4个4度顶点。

证明　由定理1知，334-型极大平面图的阶数可表示为$4k$，$k\ge 2$。设SF^{4k}($k\ge 2$)是一个$4k$-阶334-型极大平面图，对k实施数学归纳法。

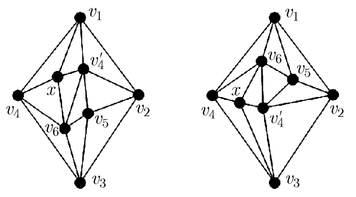
8-阶334-型极大平面图为如图4所示的图，其度序列为44445555，结论成立。12-阶334-型极大平面图共有2个，分别如图5(a)，图5(b)所示，它们均恰含4个4度顶点，结论成立。

假设$k\ge 3$时结论成立，现在来考察$k+1$的情况。设H_1是$\mathrm{SF}^{4(k+1)}$的一个334子图，则其结构要么如图7(a)所示，要么如图7(b)所示。

设H_1为如图7(a)所示的图(当H_1为如图7(b)所示结构时，证明过程与下面相同)。对H_1实施334缩轮运算，则所得45-型子图如图8(a)所示$\left(d_{\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)}(v_1)=d_{\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)}(v_3)=4,\ d_{\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)}(v_2)=d_{\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)}(v_4)=5\right)$，或如图8(b)所示$\left(d_{\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)}(v_1)=d_{\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)}(v_3)=5,\ d_{\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)}(v_4)=d_{\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)}(v_2)=4\right)$，无论是哪种情况，由归纳假设知，$\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)$恰有4个4度顶点，故$\mathrm{SF}^{4(k+1)}$恰有4个4度顶点。　证毕

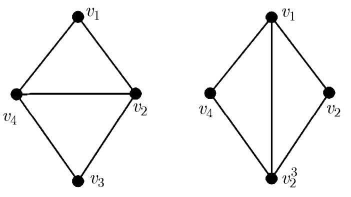
4　334-型极大平面图着色性质

在扩4-轮运算过程中，对象子图2-长路的内点被划开成为2个顶点，如图9所示，将该内点称为**扩点**，由划开产生的2个顶点称为扩点的**拷贝顶点**。



(a) 334子图1　(b) 334子图2

图7　2个不相同的334子图



(a) 45-型子图1　(b) 45-型子图2

图8　2个不相同的45-型子图

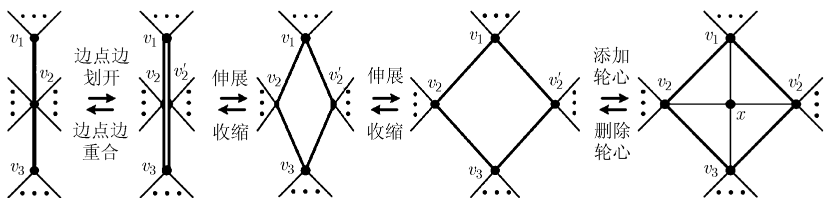


图9 扩缩4-轮运算的示意图

类似，把扩 5-轮运算对象子图的漏腰称为**扩点**，扩点被划开后产生的 2 个顶点称为扩点的**拷贝顶点**。

设 G 是一个 4-可着色的极大平面图，$f \in C_4(G)$。对 G 实施一次多米诺扩轮运算[14]，所得之图记作 $\zeta^+(G)$，若 $\exists f^* \in \zeta^+(G)$，满足：对任意顶点 $u \in V(\zeta^+(G)) \cap V(G)$，有 $f^*(u) = f(u)$，任意扩点的拷贝顶点着色均与对应扩点在 f 下的着色相同，则称 f^* 为 $\zeta^+(G)$ 的基于 f 的一个**扩展 4-着色**。在 f 下，对 G 实施一次多米诺缩轮运算[14]，其中，任意缩 i-轮运算均满足被收缩的 2 个顶点着相同颜色，$i = 2,3,4,5$。将所得之图及着色分别记作 $\zeta^-(G)$ 和 f^*，称 f^* 为 $\zeta^-(G)$ 的基于 f 的一个**自然 4-着色**。

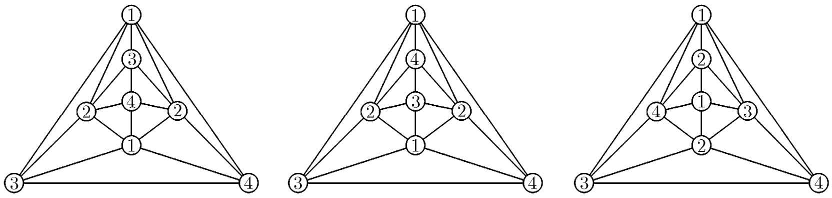
定理 5　每个 334-型极大平面图均是树型 2-色不变圈着色。

证明　设 SF^{4k} ($k \ge 2$) 是任意一个阶数为 $4k$ 的 334-型极大平面图，对 k 实施数学归纳法。

当 $k = 2$ 时，8-阶 334-型极大平面图只有一个，其所有着色如图 10 所示，故结论成立。

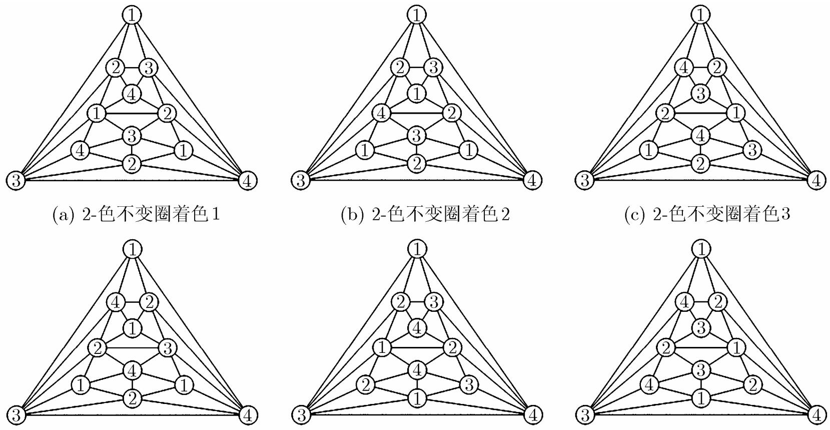
当 $k = 3$ 时，共有 2 个 334-型极大平面图，分别记作 SF_1^{12} 和 SF_2^{12}。SF_1^{12} 与 SF_2^{12} 的所有着色分别如图 11 和图 12 所示，故结论成立。

假设当 $k \ge 3$ 时结论成立，现在考察 $k+1$ 的情



(a) 2-色不变圈着色 1　(b) 2-色不变圈着色 2　(c)树着色

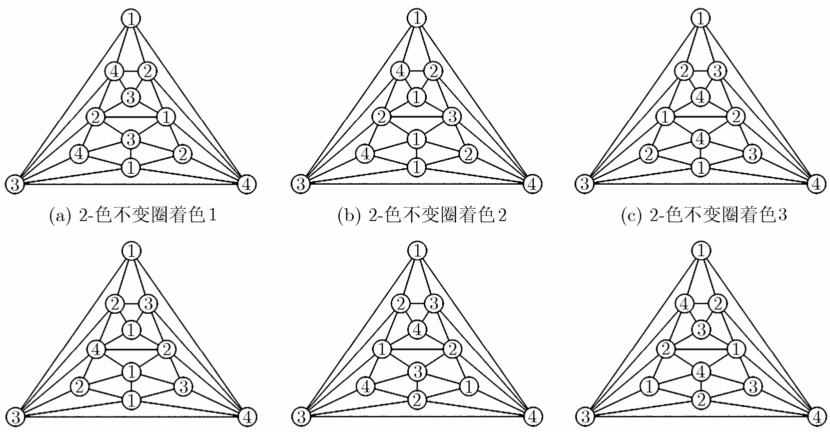
图 10　SF^8 的所有着色



(a) 2-色不变圈着色 1　(b) 2-色不变圈着色 2　(c) 2-色不变圈着色 3

(d) 2-色不变圈着色 4　(e)树着色 1　(f)树着色 2

图 11　SF_1^{12} 的所有着色



(a) 2-色不变圈着色 1　(b) 2-色不变圈着色 2　(c) 2-色不变圈着色 3

(d) 2-色不变圈着色 4　(e)树着色 1　(f)树着色 2

图 12　SF_2^{12} 的所有着色

况。设 H_1 是 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 的一个 334 子图，则其结构要么如图 7(a)所示，要么如图 7(b)所示。设 H_1 为图 7(a)所示构形(当 H_1 为图 7(b)所示构形时，证明过程类似)。

首先证明 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 不含非 2-色不变圈着色的圈着色。假设 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 有一个非 2-色不变圈着色的圈着色 f。设 C 是 f 的一个 2-色圈，且 C 不是 2-色不变圈，分 2 种情况讨论。

情况 1 $V(C)\cap V(H_1)=\phi$；

在 f 下，对 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 中的 H_1 实施 334 缩轮运算，其中，在缩 4-轮时，被收缩的 2 个顶点着相同颜色，则 $\varsigma(H_1)$ 要么如图 8(a)所示，要么如图 8(b)所示，且所得 $4k$-阶 334-型极大平面图 $\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)$ 含一个非 2-色不变圈着色的圈着色，即基于 f 的自然 4-着色，与归纳假设矛盾。

情况 2 $V(C)\cap V(H_1)\neq\phi$；

若 $V(C)\setminus V(H_1)\neq\phi$，则在 f 下对 H_1 实施 334 缩轮运算，其中，缩 4-轮的被收缩的 2 个顶点着相同颜色，则 $\varsigma(H_1)$ 要么如图 8(a)所示，要么如图 8(b)所示，且所得 $4k$-阶 334-型极大平面图 $\varsigma\left(\mathrm{SF}^{4(k+1)}\right)$ 含一个非 2-色不变圈着色的圈着色，即基于 f 的自然 4-着色，矛盾。

若 $V(H_1)\supseteq V(C)$，则 $C=v_1v_4'v_6v_4, C=v_2v_4'v_6v_3$，或 $C=v_1v_2v_3v_4$。无论 C 属于哪种情况，均不存在使 $|f(C)|=2$ 的 4-着色 f，矛盾。

由 334-型极大平面图定义知，$\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 可由某个 SF^{4k} 通过 334 扩轮运算得到。由归纳假设知，SF^{4k} 即有树着色，又有 2-色不变圈着色。此外，对于任意极大平面图，在树着色(圈着色)下实施多米诺扩轮运算(不含扩 2 或扩 5-轮)后，所得新图的扩展 4-着色也为树着色(圈着色)。因此，对 SF^{4k} 实施 334 扩轮运算后，$\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 也含树着色和圈着色。 证毕

定理 6 每个 $4k$-阶 334-型极大平面图恰好有 2^{k-1} 个 2-色不变圈着色及 2^{k-2} 个树着色。

证明 设 SF^{4k} ($k\geq 2$) 是任意一个阶数为 $4k$ 的 334-型极大平面图，对 k 实施数学归纳法。

当 $k=2$ 时，8-阶 334-型极大平面图只有一个，其所有着色如图 10 所示，包括 2 个 2-色不变圈着色和一个树着色，结论成立。

当 $k=3$ 时，共有 2 个 334-型极大平面图，分别记作 SF_1^{12} 和 SF_2^{12}。它们的所有着色分别如图 11 和图 12 所示，结论成立。

假设当 $k\geq 3$ 时结论成立，现在考察 $k+1$ 的情况。设 H_1 是 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 的一个 334 子图，则其结构要么如图 7(a)所示，要么如图 7(b)所示。设 H_1 为图 7(a)所示构形(当 H_1 为图 7(b)所示构形时，证明过程类似)。

由于 H_1 通过不同的 334 缩轮运算途径，总共可得到 2 个不相同的 45-型子图(分别如图 8(a)，图 8(b)所示)，再根据推论 2，可推出：对 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 的某个 334 子图实施不同途径的 334 缩轮运算，可得到 2 个 $4k$-阶 334-型极大平面图，且这 2 个图的区别仅在于，将其中一个图中某个特定的 45-型子图替换为与之不相同的另一个 45-型子图，可得到另外一个图。

因此，在对 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 中的 H_1 实施 334 缩轮运算时，若以 v_4,v_4' 为被收缩的顶点，则 H_1 变为图 8(a)所示的 45-型子图，将所得 $4k$-阶 334-型极大平面图记为 SF_1^{4k}。注意到，对于任意一个 $4(k+1)$-阶 334-型极大平面图及它的一个 4-着色 f，$k\geq 3$，在 f 下对该图实施一次 334 缩轮运算，必然能够得到一个 $4k$ 阶 334-型极大平面图和唯一的自然 4-着色 f^*。又由归纳假设知，SF_1^{4k} 恰含 2^{k-1} 个 2-色不变圈着色和 2^{k-2} 个树着色，故 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 恰含有使得 v_4,v_4' 着同色的 2^{k-1} 个 2-色不变圈着色和 2^{k-2} 个树着色。

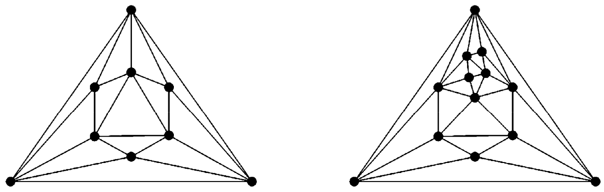
在对 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 中 H_1 实施 334 缩轮运算时，若以 v_1,v_6 为被收缩的顶点，则 H_1 变为图 8(b)所示的 45-型子图，将所得 $4k$-阶 334-型极大平面图记为 SF_2^{4k}。由于 SF_2^{4k} 恰含 2^{k-1} 个 2-色不变圈着色和 2^{k-2} 个树着色，故 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 恰含有使得 v_4,v_4' 着不同色的 2^{k-1} 个 2-色不变圈着色和 2^{k-2} 个树着色。由于 334 缩轮运算产生 2 个不相同的 45-型子图，故 $\mathrm{SF}^{4(k+1)}$ 恰含有 $2^{k-1}\times 2$ 个 2-色不变圈着色和 $2^{k-2}\times 2$ 个树着色。

证毕

5 构造纯树着色极大平面图

利用 334 扩轮运算，除了构造 334-型极大平面图，还可以构造其它非常重要的图类，例如，纯树着色极大平面图。7 至 11 阶最小度 ≥ 4 的极大平面图共有 54 个[14]，其中纯树着色的图只有 1 个[6,7]，记作 J^9，如图 13(a)所示。J^9 共有 3 个 45-型子图。对其中的任意一个 45-型子图实施 334 扩轮运算，均得到如图 13(b)所示的 13-阶纯树着色极大平面图，记为 J^{13}。

J^{13} 只含一个 45-型子图，在 J^{13} 基础上，实施任意次数的 334 扩轮运算后，所得之图均仅含一个 45-型子图。下面，用 J^{4k+1} ($k\geq 2$) 表示从 J^9 出发，实施 $(k-2)$ 次 334 扩轮运算后得到的 $(4k+1)$-阶极大平面图。



(a) J^9　　(b) J^{13}

图 13　J^9 和 J^{13}

定理 7　$J^{4k+1}\,(k \ge 2)$是纯树着色极大平面图。

证明　对k实施数学归纳法。

当$k=2\,,3$时，对应的J^9和J^{13}如图 13 所示，结论成立。

假设当$k \ge 3$时结论成立，现在考察$k+1$的情况。设H_1是$J^{4(k+1)+1}$的任意一个 334 子图，则其结构如图 7(a)或图 7(b)所示。设H_1为图 7(a)所示构形(当H_1为图 7(b)所示构形时，证明过程类似)。

下面证明$J^{4(k+1)+1}$不含圈着色。假设$J^{4(k+1)+1}$有一个圈着色f。设C是f的一个 2-色圈，分 2 种情况讨论。

情况 1　$V(C) \cap V(H_1) = \phi$；

在f下，对H_1实施 334 缩轮运算，其中，被收缩的 2 个顶点着相同颜色，则所得$\varsigma(H_1)$如图 8(a)或图 8(b)所示，且所得J^{4k+1}含一个圈着色(基于f的自然 4-着色)，与归纳假设矛盾。

情况 2　$V(C) \cap V(H_1) \ne \phi$；

若$V(C) \setminus V(H_1) \ne \phi\ V(C)$，则在$f$下，对$H_1$实施 334 缩轮运算，其中，被收缩的 2 个顶点着相同颜色，则所得$\varsigma(H_1)$如图 8(a)或图 8(b)所示，且所得J^{4k+1}含一个圈着色(基于f的自然 4-着色)，矛盾。

若$V(H_1) \supseteq V(C)$，则$C=v_1v_4'v_6v_4, C=v_2v_4'v_6v_3$，或$C=v_1v_2v_3v_4$。无论$C$属于哪种情况，均不存在使$|f(C)|=2$的 4-着色$f$，矛盾。

由归纳假设知，J^{4k+1}有树着色，且$J^{4(k+1)+1}$是在J^{4k+1}的基础上实施一次 334 扩轮运算得到的，故$J^{4(k+1)+1}$有树着色。　证毕

由定理 5 知，从一个最小度为 4 的 8-阶树型 2-色不变圈着色极大平面图出发，实施任意次数的 334 扩轮运算后，所得之图均是树型 2-色不变圈着色的；再由定理 7 知，从一个最小度为 4 的 9-阶纯树着色极大平面图出发，实施任意次数的 334 扩轮运算后，所得之图也都是纯树着色的。基于这些结论，我们进一步提出如下猜想：

猜想 1　设G是一个含 45-型子图(334 子图)的 4-色极大平面图，则

(1)若G仅含 2-色不变圈着色，则对G实施一次 334 扩(缩)轮运算后，所得之图仅含 2-色不变圈着色；

(2)若G是纯圈着色，则对G实施一次 334 扩(缩)轮运算后，所得之图是纯圈着色；

(3)若G是纯树着色，则对G实施一次 334 扩(缩)轮运算后，所得之图是纯树着色；

(4)若G是混合着色，则对G实施一次 334 扩(缩)轮运算后，所得之图是混合着色。

6　结束语

本文给出了一种称为 334 扩缩运算的扩缩运算，它能够构造具有相同着色类型的 4-色极大平面图。在后续工作中，我们将对文中给出的猜想予以论证，并进一步研究不同着色类型图所具有的特殊性质。

参 考 文 献

[1] MOHAR B. Kempe Equivalence of Colorings[M]. Graph Theory in Paris. Birkhäuser Basel, 2006: 287–297. doi: 10.1007/978-3-7643-7400-6_22.

[2] VERGNAS M L and MEYNIEL H. Kempe classes and the Hadwiger conjecture[J]. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 1981, 31(1): 95–104. doi: 10.1016/S0095-8956(81)80014-7.

[3] FEGHALI C, JOHNSON M, and PAULUSMA D. Kempe equivalence of colourings of cubic graphs[J]. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2015, 49: 243–249. doi: 10.1016/j.endm.2015.06.034.

[4] MCDONALD J, MOHAR B, and SCHEIDE D. Kempe equivalence of edge-colorings in subcubic and subquartic graphs[J]. *Journal of Graph Theory*, 2012, 70(2): 226–239. doi: 10.1002/jgt.20613.

[5] BELCASTRO S M and HAAS R. Counting edge-Kempe-equivalence classes for 3-edge-colored cubic graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2014, 325(13): 77–84. doi: 10.1016/j.disc.2014.02.014.

[6] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(3): 纯树着色与唯一4-色极大平面图猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1328–1353. doi: 10.11999/JEIT160409.

XU J. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs(3): Purely tree-colorable and uniquely 4-colorable maximal planar graph conjectures[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1328–1353. doi: 10.11999/JEIT160409.

[7] XU J, LI Z P, and ZHU E Q. On purely tree-colorable planar graphs[J]. *Information Processing Letters*, 2016, 116(8): 532–536. doi: 10.1016/j.ipl.2016.03.011.

[8] GREENWELL D and KRONK H V. Uniquely line-colorable graphs[J]. *Canadian Mathematical Bulletin*, 1973, 16(4): 525–529. doi: 10.4153/CMB-1973-086-2.

[9] THOMASON A G. Hamiltonian cycles and uniquely edge colourable graphs[J]. *Annals of Discrete Mathematics*, 1978, 3: 259–268. doi:10.1016/S0167-5060(08)70511-9.

[10] FIORINI S and WILSON R J. Edge colouring of graphs[J]. *Research Notes in Mathematics*, 1977, 23(1): 237–239.

[11] FISK S. Geometric coloring theory[J]. *Advances in Mathematics*, 1977, 24(3): 298–340. doi: 10.1016/0001-8708(77)90061-5.

[12] TOMMY R J and BJARNE T. Graph Coloring Problems[M]. New York: USA, John Wiley & Sons, Inc., 1994: 1–295.

[13] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(4): σ -运算与Kempe等价类[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.

XU J. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (4): σ -operations and Kempe equivalent classes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.

[14] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(2): 多米诺构形与扩缩运算[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1271–1327. doi: 10.11999/JEIT160224.

XU J. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs(2): Domino configurations and extending-contracting operations[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1271–1327. doi: 10.11999/JEIT160224.

[15] BONDY J A and MURTY U S R. Graph Theory[M]. New York: USA, Springer, 2008: 8–200.

刘小青： 女，1986年生，博士生，研究方向为图论与组合优化.

许 进： 男，1959 年生，教授，研究方向为图论与组合优化、生物计算机、社交网络与信息安全等.