椭圆球面波信号间交叉项时频分布特性研究

王红星 陆发平* 刘传辉 刘 晓 康家方 (海军航空工程学院电子信息工程系 烟台 264001) (山东省信号与信息处理重点实验室 烟台 264001)

摘 要:该文引入 Wigner-Ville 分布中的交叉项,通过建立交叉项时频分布特性与椭圆球面波函数(Prolate Spheroidal Wave Function, PSWF)信号及其 Hilbert 变换信号性质之间的关系,重点研究了 PSWF 信号间交叉项时频分布特性与信号自身奇偶性、最佳时频能量聚集性等性质的关系,交叉项在时域、频域、时频域的能量密度分布规律。理论和仿真分析表明,PSWF 信号间交叉项具有良好的对称性、时频能量聚集性。且交叉项时频分布的局部特征参量,与相互作用的 PSWF 信号阶数、功率谱局部能量密度峰值点个数以及位置密切相关,能够反映信号在时频域的相干程度,为下一步探索研究高效 PSWF 信号时频域检测方法提供参考依据。 关键词:椭圆球面波;相互作用;时频分析;交叉项 中图分类号: TN911.3 文献标识码: A 文章编号: 1009-5896(2017)06-1319-07 DOI: 10.11999/JEIT160877

Study on Time-frequency Characteristics of Cross-terms Between Prolate Spheroidal Wave Function Signal

WANG Hongxing LU Faping LIU Chuanhui LIU Xiao KANG Jiafang (Department of Electrical and Information Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University,

Yantai 264001, China)

(Key Laboratory on Signal & Information Processing of Shandong Provience, Yantai 264001, China)

Abstract: This paper introduces the cross-terms in Wigner-Ville distribution to explore the time-frequency mechanism and regular of interaction between Prolate Spheroidal Wave Function (PSWF). By establishing the relationship between time-frequency characteristics of cross-terms and the excellent characteristics of PSWF and its Hilbert signal, the relationship between the cross-terms of PSWF signal and the characteristics of PSWF signal is mainly studied, such as parity feature and the best energy clustering, and the regular of the energy density of cross-terms in time domain, frequency domain, and time-frequency domain is studied. Both the mathematical deduction and simulation result show that the time-frequency characteristics of cross-terms have good symmetry and energy clustering. Meanwhile, the time-frequency localization characteristics of Wigner-Ville distribution have close relationship with the order and power spectrum density of PSWF signal, reflecting the degree of coherence between PSWF signals. Furthermore, those characteristics of cross-terms which are found can provide reference basis for the research on efficient time-frequency detection method for PSWF signal.

Key words: Prolate spheroidal wave function; Signal interaction; Time-frequency analysis; Cross-terms

1 引言

椭圆球面波函数(Prolate Spheroidal Wave Function, PSWF)是 Bell 实验室 Slepian 和 Pollak 于 1961 年定义的一类特殊函数的集合^[1],具有时域 双正交性、时域奇偶性、频谱可控性,在时频域具 有最佳能量聚集性等优良特性,广泛应用于无线电

通信^[2,3]、雷达^[4]、流体力学^[5]、滤波^[6]、目标探测^[7] 等领域。尤其在无线电通信领域,基于 PSWF 的优 良特性,文献[3]提出了一种基于 PSWF 的非正弦时 域正交调制方式,利用 PSWF 时频域具有最佳能量 聚集性提高系统功率效率,利用时域波形叠加、频 域频谱混叠的方式提高系统频带利用率,是一种极 具有应用潜力和推广前景的非正弦波通信新体制。 但如何充分挖掘和利用 PSWF 信号相互作用呈现出 的机理和规律,从 PSWF 调制信号中高效分离出频 谱相互混叠的各路 PSWF 信号,一直是困扰基于 PSWF 的非正弦调制方法进一步发展和应用的关键

收稿日期: 2016-08-26; 改回日期: 2017-01-12; 网络出版: 2017-03-21 *通信作者: 陆发平 lufaping@163.com

基金项目:山东省"泰山学者"建设工程专项经费基金(ts20081130) Foundation Item: "Taishan Scholar" Special Foundation of Shandong Province (ts20081130)

性问题。目前, PSWF 调制信号的检测主要采用基 于信号间良好正交性的相关检测^[3],在理想信道条件 下,具有良好的检测效果。但在恶劣信道条件下, 信号因失真导致正交性下降时,相关检测的系统性 能急剧恶化。为提高恶劣信道条件下的检测性能, 张磊等人^[8,9]引入白化变换和串行干扰消除等新方 法、新思路,在一定程度上弱化了系统对正交性的 要求。但上述 PSWF 检测方法, 主要利用 PSWF 信号相互作用在单个能量域(时域或频域)的能量密 度分布特征规律,对信号进行检测,无法完全突破 信号检测对正交性的依赖,系统性能的提升是有限 的^[10]。而 PSWF 信号是典型的频率时变信号, 信号 各频率分量随时间不断变换。对于 PSWF 相互作用 在时频域呈现出怎样的特征规律? 能否从中挖掘出 可用于信号检测的时频域检测特征参量,找到新的 信息加载和信号检测方法,以提高 PSWF 信号检测 效果呢?目前未见有相关文献报道。

时频分析方法中的交叉项作为一种特殊的 Wigner-Ville 分布,能够展现频率时变信号相互作 用在时频域呈现出的特征规律,反映不同信号在时 频域的相干程度,广泛应用于有些重要信号的检测 中^[11]。在雷达信号处理中,通过引入交叉项在时频 域分析雷达信号,提取雷达目标时频域特征,提高 了目标显示清晰度^[12]。在故障诊断中,通过引入交 叉项对设备故障信号的时频分布特性进行研究,并 将交叉项作为检测指标,实现对独塔自锚式索桥损 伤进行识别^[13]。在水声信号检测中,在利用交叉项 对水声信号的时频分布特性进行研究的基础上,利 用交叉项构造统计检测量,实现对水声信号进行检 测^[14]。

本文引入交叉项,首先建立 PSWF 信号间交叉 项时频分布特性与 PSWF 信号及其 Hilbert 变换信 号性质之间的关系,进而分析了交叉项在时域、频 域的能量密度分布特性。最后,对交叉项在时频域 的时频分布特性,特别是交叉项在时频域的局部特 征参量进行研究,分析 PSWF 信号在时频域相互作 用的机理和规律。

2 PSWF 信号间交叉项时频能量密度分布 特性

2.1 PSWF 信号间交叉项定义

Wigner-Ville 分布中交叉项为信号间瞬时相关 函数的 Fourier 变换,能够反映 PSWF 信号相互作 用结果(能量密度)随时间与频率的变化规律,展现 信号相互作用在时频域的特征规律。假设 PSWF 信 号 $\varphi_i(t), \varphi_j(t)$ 的解析信号分别为 $y_i(t), y_j(t)$,则解析 信号 y_i(t), y_i(t) 间交叉项可以表示为^[15]

$$\begin{split} P_{y_i,y_j}(t,f) &= \int y_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) y_j^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau} \mathrm{d}\tau \\ &+ \int y_j^* \left(t + \frac{\tau}{2} \right) y_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau} \mathrm{d}\tau \quad (1) \end{split}$$

$$Q(t,\tau) = y_i \left(t + \frac{\tau}{2}\right) y_j^* \left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$
(2)

为解析信号 $y_i(t)$ 与 $y_j(t)$ 的瞬时相关值。由解析信号 的计算公式可知, $y_i(t)$ 可表示为

$$y_i(t) = \varphi_i(t) + \hat{\varphi}_i(t) \tag{3}$$

式中, $\hat{\varphi}_i(t)$ 为 $\varphi_i(t)$ 的 Hilbert 变换信号。将式(3)代 入式(1), 化简得 PSWF 信号间交叉项

$$P_{y_i,y_j}(t,f) = 2 \int \left(\varphi_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \varphi_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right. \\ \left. + \hat{\varphi}_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \hat{\varphi}_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau} \mathrm{d}\tau \quad (4)$$

由式(4)可知,交叉项的时频分布特性与 PSWF 信号以及其 Hilbert 变换信号的性质密切相关。同 时,由 Hilbert 变换的性质可知,PSWF 信号的 Hilbert 变换信号也具有良好的时域奇偶性、时频能 量聚集性,且相互正交的 PSWF 信号其 Hilbert 信 号相互正交,非正交的 PSWF 信号其 Hilbert 信号 非正交。

那么 PSWF 信号及其 Hilbert 变换信号是如何 影响交叉项的时频分布? 信号性质与交叉项时频分 布特性有何对应关系? 考虑到交叉项在时域、频域 能量密度分布是交叉项时频域能量密度分布在时 域、频域的"投影",能够展现交叉项在时域、频域 上的整体分布规律,有助于进一步认识和挖掘信号 间交叉项时频分布特性。下面首先建立 PSWF 信号 间交叉项时域、频域能量密度分布特性与 PSWF 信 号及其 Hilbert 变换信号性质之间的关系,分析交叉 项在时域、频域的能量密度分布特性,了解信号性 质对交叉项在时域、频域能量密度分布特性的影响 机理,进而分析 PSWF 信号在时频域相互作用的机 理和规律。

2.2 PSWF 信号间交叉项时域、频域能量密度分布 特性

本节根据 PSWF 信号及其 Hilbert 变换信号的 性质,从 PSWF 信号间交叉项在时域、频域的能量 密度分布特性两个方面出发,分别建立交叉项在时 域、频域的能量密度分布特性与信号性质之间的关 系,分析交叉项在时域、频域上的整体分布规律。

(1)PSWF 信号间交叉项时域能量密度分布: 交叉项为 2 维的时间-频率能量密度函数,对交叉项 进行频域积分即可获得交叉项在时域的能量密度分布函数,即

$$P_{y_i,y_j}(t) = \int P_{y_i,y_j}(t,f) df$$

= $2 \int \left(\varphi_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \varphi_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + \widehat{\varphi}_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \widehat{\varphi}_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) \delta(\tau) d\tau$
= $2 \left[\varphi_i(t) \varphi_j(t) + \widehat{\varphi}_i(t) \widehat{\varphi}_j(t) \right]$ (5)

由式(5)可知: (1)交叉项在时域的能量密度分布 为 PSWF 信号间瞬时能量、其 Hilbert 变换信号间 瞬时能量之和的两倍。(2)交叉项时域能量密度分布 $P_{y_i,y_j}(t)$ 呈现出一定的时域奇偶性。当 PSWF 信号 $\varphi_i(t), \varphi_j(t)$ 奇偶性不同时,则 $\varphi_i(t)\varphi_j(t), \hat{\varphi}_i(t)\hat{\varphi}_j(t)$ 为奇函数,交叉项时域能量密度分布 $P_{y_i,y_j}(t)$ 为奇函 数,在时域中心时刻,数值为 0;当 PSWF 信号 $\varphi_i(t), \varphi_j(t)$ 奇偶性相同时,则 $\varphi_i(t)\varphi_j(t), \hat{\varphi}_i(t)\hat{\varphi}_j(t)$ 为偶函 数,交叉项时域能量密度分布 $P_{y_i,y_j}(t)$ 为偶函数,在 时域中心时刻,可能出现峰值。

此外,交叉项在时域的总能量 P,可以表示为 $P = \int \int P_{-}(t f) df dt$

$$= \int \int T_{y_i,y_j}(t,f) df dt$$
$$= 2 \int \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt + 2 \widehat{\varphi}_i(t) \widehat{\varphi}_j(t) dt \qquad (6)$$

由式(6)可知: (1)当 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇 偶性不相同时,由于交叉项时域能量密度分布 $P_{y_i,y_j}(t)$ 为奇函数,则P为 0。(2)当 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇偶性相同时,交叉项时域能量密度分布 $P_{y_i,y_j}(t)$ 为偶函数,若 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 相互 正交,则P为 0;若 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 非正交, 则P不为 0。需要特别说明的是,若 $\varphi_i(t) = \varphi_j(t)$, 则P为 PSWF 信号与其 Hilbert 变换信号的能量和 的两倍。

通过上述分析可知: (1)交叉项在时域的能量密 度分布为 PSWF 信号、其 Hilbert 变换信号瞬时能 量之和的两倍。(2)当 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 的奇 偶性不相同时,交叉项在时域的能量密度分布呈现 奇对称,交叉项在时域总能量为 0。(3)当 PSWF 信 号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 的奇偶性相同时,交叉项在时域的能 量密度分布呈现偶对称,在时域中心时刻可能出现 峰值,且若 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 相互正交,则交 叉项在时域中心时刻总能量为 0;若 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 非正交,则交叉项在时域总能量不为 0。

(2)PSWF 信号间交叉项频域能量密度分布: 与计算交叉项在时域的能量密度函数相似,对交叉 项进行时域积分即可获得交叉项在时域的能量密度 分布函数,即

$$P(f) = \int P_{y_i, y_j}(t, f) dt$$

= $2 \int \left(\int \varphi_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \varphi_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) dt + \int \widehat{\varphi}_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \widehat{\varphi}_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) dt \right) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$ (7)

由式(7)可知:(1)交叉项频域能量密度分布为 PSWF 信号间互功率谱、其 Hilbert 变换信号间互 功率谱之和的两倍。(2)PSWF 信号间、其 Hilbert 变换信号对交叉项频域能量密度分布的影响机理相 同。

考虑到 PSWF 信号与其 Hilbert 变换信号性质 相似、影响机理相同,下面仅分析 PSWF 信号对交 叉项频域能量密度分布的影响机理,令

$$R_{\varphi_i,\varphi_j}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \varphi_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \mathrm{d}t \tag{8}$$

由式(8)可知,相关函数 $R_{\varphi_i,\varphi_j}(\tau) = \varphi_i(t), \varphi_j(t)$ 的时域奇偶性密切相关: (1)当 $\varphi_i(t), \varphi_j(t)$ 奇偶性不相同时,式(8)奇函数在对称区间上积分,相关函数 $R_{\varphi_i,\varphi_j}(\tau) = 0$,即式(7)第1部分信号间互功率谱为0。 (2)当 $\varphi_i(t), \varphi_j(t)$ 奇偶性相同时,式(8)偶函数在对称区间上积分,相关函数 $R_{\varphi_i,\varphi_j}(\tau) \neq 0$,式(7)第1 部分 PSWF 信号间互功率谱不为0。(3)由帕赛瓦尔定理可知,若 PSWF 信号 $\varphi_i(t), \varphi_j(t)$ 相互正交,则 互功率谱总能量为0,若 PSWF 信号 $\varphi_i(t), \varphi_j(t)$ 非 正交,则互功率谱总能量不为0。

通过上述分析可知,交叉项在频域的能量密度 分布为 PSWF 信号间互功率谱、其 Hilbert 变换信 号间互功率谱之和的两倍。当 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇偶性不相同时,交叉项在频域的能量密度分 布为 0。当 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇偶性相同,交叉项在频域 的能量密度分布不为 0,若 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 相互正交,则交叉项频域总能量为 0,若 PSWF 信 号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 非正交,则交叉项频域总能量不为 0。 2.3 PSWF 信号间交叉项时频域能量密度分布特性

在 2.2 节分析了交叉项在时域、频域能量密度 整体分布规律,本节结合 PSWF 信号及其 Hilbert 变换信号性质,对交叉项在时频域的时频分布特性 进行研究,分析 PSWF 信号在时频域相互作用的机 理和规律。

文献[11]指出在时频平面中心位置,解析信号的 模糊函数出现能量密度峰值,且交叉项与模糊函数 在时频域的能量密度分布密切相关。同时,由 2.2 节分析可知,交叉项在时域的能量密度分布具有良 好的奇偶性。故本节首先考察时域中心时刻,交叉 项在时频平面的局部分布特性,并在此基础上,考 察频域中心频带处,交叉项在时频平面的局部分布 特性,了解交叉项在时频平面的局部分布特性。进 而对交叉项在整个时频平面的时频分布特性进行研 究,深入分析 PSWF 信号在时频域相互作用的机理 和规律。

(1)交叉项时域中心时刻, PSWF 信号间交叉项 频域能量密度分布:由交叉项的定义式可知,交叉 项为瞬时相关函数的 Fourier 变换,其数学表达式可 以表示为实部和虚部,利用欧拉公式,对式(4)化简, 得

$$P_{y_i,y_j}(t,f) = 2 \int \left(\varphi_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \varphi_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) \\ + \hat{\varphi}_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \hat{\varphi}_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) \cos(2\pi f \tau) d\tau \\ - 2i \int \left(\varphi_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \varphi_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) \\ + \hat{\varphi}_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \hat{\varphi}_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right) \sin(2\pi f \tau) d\tau$$
(9)

根据式(9),结合时间 t, τ 的取值范围(对称区 间)、PSWF 信号 $\varphi_i(t) = \varphi_j(t)$ 的奇偶性可知,若 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇偶性相同时,式(9)第2部分能量为0;若 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇偶性不相同时,式(9)第1部分能量为0。

为便于数据处理,降低算法复杂度,只对交叉 项的实数部分进行研究和应用。对式(9)简化,令 $P'_{y_i,y_j}(0,f) = 2\int \left(\varphi_i\left(\frac{\tau}{2}\right)\varphi_j\left(-\frac{\tau}{2}\right) + \hat{\varphi}_i\left(\frac{\tau}{2}\right)\hat{\varphi}_j\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right)$ $\cdot \cos(2\pi f\tau) d\tau \tag{10}$

由式(10)可知,在时域中心时刻,交叉项频域 能量密度分布与 $\varphi_i(t)$, $\varphi_i(t)$ 的奇偶性密切相关:

当 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇偶性不相同时, $\varphi_i(\tau/2)$ $\varphi_j(-\tau/2) 与 \hat{\varphi}_i(\tau/2) \hat{\varphi}_j(-\tau/2)$ 均为奇函数,式(10)为 奇函数在对称区间上的积分,积分为 0,即 $P'_{y_i,y_j}(0,f)$ = 0。这表明在时域中心时刻,若 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇偶 性不相同,则交叉项在频域的能量密度分布为 0, 交叉项在中心时刻左右各存在一个能量峰值点。

当 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇 偶 性 相 同 时, $\varphi_i(t + \tau/2)$ $\varphi_j(t - \tau/2)$ 与 $\hat{\varphi}_i(t + \tau/2)\hat{\varphi}_j(t - \tau/2)$ 均为偶函数,式 (10)为偶函数在对称区间上的积分不为 0。文献[16] 指出不同 PSWF 信号相乘后,信号功率谱中心频率 发生搬移,中心频率为 PSWF 信号中心频率之和; 同时,由式(4)可知,当t = 0时,

$$P_{y_i,y_j}(0,f) = 2 \int \left(\varphi_i \left(\tau/2 \right) \varphi_j \left(-\tau/2 \right) \right. \\ \left. + \hat{\varphi}_i \left(\tau/2 \right) \hat{\varphi}_j \left(-\tau/2 \right) \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ = 4 \int \left(\varphi_i \left(\tau/2 \right) \varphi_j \left(-\tau/2 \right) \right. \\ \left. + \hat{\varphi}_i \left(\tau/2 \right) \hat{\varphi}_j \left(-\tau/2 \right) \right) e^{-j2\pi \frac{\tau}{2} \cdot 2f} d\frac{\tau}{2}$$
(11)

即为 PSWF 信号乘积信号的功率谱,中心频率为 $f_0 = (f_{\varphi_i} + f_{\varphi_j})/2$,其中 f_{φ_i} , f_{φ_j} 分别为 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 的中心频率;相应的功率谱局部能量密度在 $(f_i + f_j)$ /2处存在局部能量峰值,其中 f_i , f_j 分别为 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 功率谱局部能量密度峰值点频率。

(2)交叉项中心频率处, PSWF 信号间交叉项时 域能量密度分布:考虑到 Wigner-Ville 分布具有频 移不变性,基带和带通 PSWF 信号间交叉项分布规 律相同,仅所在频段不同而已,为便于理论分析, 利用基带 PSWF 进行理论分析。对于基带信号,当 $f = f_0 = 0$ Hz 时,由式(9)可知,交叉项在时域能量 密度分布为

$$P_{y_i,y_j}(t,f_0) = 2 \int \left(\varphi_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \varphi_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right. \\ \left. + \hat{\varphi}_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \hat{\varphi}_j \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \mathrm{d}\tau \qquad (12)$$

由式(12)可知,在中心频率处,交叉项时域能 量密度分布与 $\varphi_i(t)$, $\varphi_i(t)$ 的奇偶性密切相关:

当 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇偶性不相同时,交叉项在频域的能量密度分布为 0;在时域中心时刻,交叉项在各频段的能量为 0,且 PSWF 信号间交叉项时频分布关于时域中心时刻奇对称。

当 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ 奇偶性相同时,交叉项在时域的 能量密度分布为 PSWF 信号、Hilbert 变换信号瞬 时能量之和的两倍。同时,在时域中心时刻,交叉 项在 $f = (f_i + f_j)/2$ 频率处存在局部能量峰值, PSWF 信号间交叉项时频分布关于时域中心时刻偶 对称。

通过上述分析可知: (1)交叉项时频平面能量密 度分布关于时域中心时刻呈现出良好的对称特性, 若 PSWF 信号奇偶性不相同,则交叉项时频能量密 度分布呈现奇对称,能量峰值点出现在中心时刻两 侧,且在时域中心时刻,交叉项在频域能量密度分 布为 0。(2)若 PSWF 信号奇偶性相同,则交叉项在 时频能量密度分布呈现偶对称,各频率处交叉项局 部能量密度峰值点均出现在时域中心时刻。(3)对于 奇偶性相同的 PSWF 信号 $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$,若 $\varphi_i(t)$ 功 率谱有 k 个局部能量密度峰值点, $\varphi_j(t)$,功率谱有 m个局部能量密度峰值点,则在时域中心时刻,交叉 项在 $f = (f_i + f_j)/2$ 频率处出现局部能量密度峰值 点,个数为 $C_k^1 C_m^1 - q$ 个,其中 q 为在频域的局部能 量密度峰值点位置重复数。

3 仿真分析

下面通过计算机仿真,从交叉项在时域、频域、 时频平面能量密度分布3个方面,对理论分析进行 仿真验证,说明理论分析的正确性。同时,利用仿 真结果,进一步挖掘信号间交叉项的时频分布特性, 认识 PSWF 信号在时频域相互作用的机理和规律。

3.1 仿真条件

为深入分析同一子波带内相互正交的PSWF信号、不同子波带相互重叠以及交叠的非正交 PSWF 信号间交叉项的时频能量的分布特征规律,说明理 论分析的正确性,仿真时选用 1~7 MHz, 2~6 MHz, 4~10 MHz 3 个子波带, PSWF 信号时宽为 1 μs, 仿真所用各子波带 PSWF 信号的奇偶性如表 1 所示。

| 子波带(MHz) | 偶函数 | 奇函数 |
|----------|------------|---------|
| 1~7 | 零阶、三阶 PSWF | 一阶 PSWF |
| 2~6 | 一阶 PSWF | 零阶 PSWF |
| 4~10 | 一阶 PSWF | 零阶 PSWF |

表1 各子波带 PSWF 信号的奇偶性

3.2 仿真结果与分析

PSWF 信号间交叉项时域、频域、时频平面能 量密度分布如图 1 所示,其中图 1(a)至图 1(f)PSWF 信号奇偶性相同,图 1(g)至图 1(i)PSWF 信号奇偶 性不同。由仿真结果可知:

(1)PSWF 信号间交叉项时域能量密度分布情况: 当 PSWF 信号奇偶性相同时,交叉项能量密度分布关于时域中心时刻呈现偶对称,在时域中心时刻可能出现能量峰值,如图 1(a),图 1(c),图 1(d),图 1(e),图 1(f)。同时,通过对比图 1(d)与图 1(e),图 1(f)可知,对于奇偶性相同的不同 PSWF 信号,若 PSWF 信号在同一子波带,由于 PSWF 信号相互正交,交叉项在时域的总能量为 0;若 PSWF 信号相互正交,交叉项在时域的总能量为 0;若 PSWF 信号在同子波带,由于 PSWF 信号非正交,交叉项在时域的总能不为 0,通过上述分析可知,仿真结果与理论分析一致。



图 1 PSWF 信号间交叉项时频平面能量密度分布

(2)PSWF 信号间交叉项频域能量密度分布情况: 当 PSWF 信号奇偶性不相同时,交叉项在频域的能量密度分布峰值能量为10⁻⁹量级,因此,交 叉项在频域的能量密度分布可以认为是 0,如图 1(g) 至图 1(i)所示;当 PSWF 信号奇偶性相同时,交叉 项在频域的能量密度分布不为 0。同时,通过对比 图 1(d)与图 1(e),图 1(f)可知,对于奇偶性相同的 不同 PSWF 信号,若 PSWF 信号在同一子波带, 交叉项在频域的总能量为 0;若 PSWF 信号在不同 子波带,交叉项在频域的总能量不为 0,通过上述 分析可知,仿真结果与理论分析一致。

(3)PSWF 信号间交叉项在时频平面能量密度 分布情况: 当 PSWF 信号奇偶性不相同时,交叉 项时频平面能量密度分布呈现奇对称,在时域中心 时刻,交叉项在频域的能量密度分布为 0,如图 1(g) 至图 1(i)所示;当 PSWF 信号奇偶性相同时,交叉 项时频平面能量密度分布呈现偶对称,各频带的能 量峰值点均位于时域中心时刻,如图 1(a)至图 1(e)。

同时,当 PSWF 信号奇偶性相同时,由图 1(b) 可知,1~7 MHz 三阶 PSWF 信号的功率谱有两个 局域能量峰值点,分别位于 3 MHz,5 MHz,且在 时域中心时刻,1~7 MHz 三阶与三阶 PSWF 信号 交叉项频域的局域能量峰值点有 $C_2^1 C_2^1 - 1 = 3$ 个,分 别位于 f = (3+3)/2 = 3 MHz, f = (3+5)/2 = (5+3)/2 = (3+3)/2 = 5 MHz,与理论分析一 致;1~7 MHz 零阶与零阶 PSWF 信号交叉项频域 的峰值点个数为1,位于 4 MHz;4~10 MHz 一阶与 一阶 PSWF 信号交叉项频域的局域能量峰值点个数 为1,位于 7 MHz。

通过上述分析可知, PSWF 信号间交叉项在时 频平面的能量密度分布仿真结果与理论分析一致。

4 结束语

本文通过建立 Wigner-Ville 分布中交叉项时频 分布特性与 PSWF 优良特性的之间的关系, 深入分 析了 PSWF 信号时域奇偶性、正交性、最佳时频能 量聚集性与交叉项时域、频域、时频域能量密度分 布特性之间的关系, 探索研究了 PSWF 信号间相互 作用在时频域的机理和规律。通过理论和仿真分析, 得到以下几个方面结论: (1)PSWF 信号间交叉项时 频分布特性与 PSWF 信号时域奇偶性、最佳时频能 量聚集密切相关, 具有良好的对称性和时频能量聚 集性。(2)交叉项的时频分布除时域、频域、时频面 总能量外, 与 PSWF 信号间正交性无关。(3)交叉项 在时域的能量密度分布为 PSWF 信号、其 Hilbert 变换信号瞬时能量之和的两倍, 交叉项在频域的能 量密度分布为 PSWF 信号间互功率谱、其 Hilbert 变换信号间互功率谱之和的两倍。(4)在时域中心时 刻,信号间交叉项在频域的局部能量密度峰值点的 个数以及位置与 PSWF 信号时域奇偶性、阶数、功 率谱的局部能量密度峰值点密切相关,呈现出一定 规律。(5)在时频面中心位置,时域奇偶性、频域中 心频率相同的 PSWF 信号间交叉项时频能量密度出 现峰值。

通过上述结论可知,在时频域 PSWF 信号间相 互作用呈现出众多特征规律,且与 PSWF 信号时域 奇偶性、最佳时频能量聚集性密切相关。不同 PSWF 信号相互作用时,频域中心频率处的能量密度值、 时频面中心位置处能量密度值、时域中心时刻局部 能量密度峰值点的个数以及位置呈现出不同的局部 转性。这为充分利用 PSWF 信号的优良特性,从时 频域出发,探索新的适合 PSWF 性质的信息加载、 信号时频域检测方法,实现对非正交 PSWF 信号的 检测,摆脱系统解调性能受正交性制约的问题,提 升 PSWF 应用性能提供了重要的理论依据。同时, 对拓展交叉项在信号检测中的应用具有十分重要的 意义。

如何充分利用挖掘出的PSWF信号间相互作用 在时频域的特征规律,研究基于时频分析的PSWF 信号信息加载和检测方法,确定具体检测边界条件 和检测规则,推导基于信号间交叉项的PSWF信号 检测系统理论误码性能是下一步研究的重点。

参考文献

- FLAMMER C. Spheroidal Wave Functions[M]. California: Stanford University Press, 1956: 16–19.
- [2] CHEN Zhaonan, WANG Hongxing, ZHAO Zhiyong, et al. Novel PSWF-based multidimensional constellation modulation for broadband satellite communication[J]. Wireless Personal Communications, 2016, 88(3): 493–524. doi: 10.1007/s11277-015-3167-7.
- [3] 赵志勇,王红星,刘锡国,等.正交椭圆球面波函数脉冲调制 方法[J]. 电子与信息学报,2012,34(10):2331-2335. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.00384.
 ZHAO Zhiyong, WANG Hongxing, LIU Xiguo, *et al.* Orthogonal prolate spheroidal wave functions modulation method[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(10):2331-2335. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.00384.
- [4] CHEN Chunyang and VAIDYANATHAN P. MIMO radar space-time adaptive processing using prolate spheroidal wave functions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(2): 623–635. doi: 10.1109/TSP.2007.907917.
- [5] OSIPOVE A and ROKHLIN V. On the evaluation of prolate spheroidal wave functions and associated quadrature rules[J].

Applied & Computational Harmonic Analysis, 2014, 36(1): 108–142. doi: 10.1016/j.acha.2013.04.002.

 [6] 刘晓,王红星,刘传辉,等. 基于椭圆球面波函数的数字带通 滤波器设计[J]. 电讯技术, 2016, 56(2): 176-182. doi: 10.3969/ j.issn.1001-893x.2016.02.012.

LIU Xiao, WANG Hongxing, LIU Chuanhui, *et al.* Design of digital bandpass filters based on prolate spheroidal wave function[J]. *Telecommunication Engineering*, 2016, 56(2): 176–182. doi: 10.3969/j.issn.1001-893x.2016.02.012.

- [7] DU Wentao, LIAO Guisheng, and YANG Zhiwei. Robust space time processing based on bi-iterative scheme of secondary data selection and PSWF method[J]. *Digital Signal Processing*, 2016, 52: 64–71. doi: 10.1016/j.dsp.2016.01.016.
- [8] 张磊,刘传辉,王红星,等.基于白化变换的非正弦时域正交 调制系统解调[J].吉林大学学报(工学版), 2013, 43(3): 819-823. doi: 10.7964/jdxbgxb201303043.
 ZHANG Lei, LIU Chuanhui, WANG Hongxing, et al. Demodulation method of non-sinusoidal orthogonal modulation system based on whiting transformation[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2013, 43(3): 819-823. doi: 10.7964/jdxbgxb 201303043.
- [9] 张磊,陈昭男,王红星,等. 基于串行干扰消除的非正弦系统 解调方法[J]. 电波科学学报, 2013, 28(5): 934-940. doi: 10. 13443/j.cjors.2013.05.025.
 ZHANG Lei, CHEN Zhaonan, WANG Hongxing, et al. Demodulation method for non-sinusoidal orthogonal modulation system based on SIC[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2013, 28(5): 934-940. doi: 10.13443/j.cjors.2013.05. 025.
- [10] CHEN Zhaonan, WANG Hongxing, LIU Xiguo, et al. Maximal capacity nonorthogonal pulse shape modulation[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, 28(6): 1699–1708. doi: 10.1016/j.cja.2015.09.008.
- [11] 张贤达,保铮. 非平稳信号处理[M]. 北京:国防工业出版社, 1998: 105-107.
 ZHANG X D and BAO Z. Non-Stationary Signal Processing [M]. Beijing: National Defend Industry Press, 1998: 105-107.
- [12] HAYKIN S. Neural networks expand SP's horizons[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(2): 24–49. doi: 10.1109/

79.487040.

- [13] 陈彦江, 王凯, 马裕超, 等. 基于 Wigner-Ville 分布交叉项的 独塔自锚式悬索桥损伤识别试验研究[J]. 振动与冲击, 2016, 35(6): 161-168. doi: 10.13465/j.cnki.jvs.2016.06.030.
 CHEN Yanjiang, WANG Kai, MA Yuchao, et al. Experimental study of single-tower self-anchored suspension bridge damage identification based on cross terms of Wigner-Ville distribution[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(6): 161-168. doi: 10.13465/j.cnki.jvs.2016.06.030.
- [14] 王军.基于时频分布交叉项的水声信号特征提取[D]. [硕士论 文],西北工业大学,2014:60-73.
 WANG J. Feature extraction of underwater acoustic signals based on the cross-components of time-frequency distribution
 [D]. [Master dissertation], Northwest Ploytechnical University, 2014: 60-73.
- [15] YU Jiexiao, LIU Kaihua, ZHANG Liang, et al. A novel fractional filter design and cross-term elimination in wigner distribution[J]. International Journal of Distributed Sensor Networks, 2015, (9): 1–12. doi: 10.1155/2015/189308.
- [16] 王红星,刘晓,刘传辉,等. 椭圆球面波信号乘加卷积运算后频谱特性研究[J]. 电波科学学报, 2016, 31(2): 304-313. doi: 10.13443/j.cjors.2015042301.
 WANG Hongxing, LIU Xiao, LIU Chuanhui, *et al.* Spectral property of prolate spheroidal wave function signals after

property of prolate spheroidal wave function signals after operation[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2016, 31(2): 304–313. doi: 10.13443/j.cjors.2015042301.

- 王红星: 男,1962年生,教授,研究方向为现代通信系统、非正 弦波通信、无线光通信.
- 陆发平: 男,1991 年生,博士生,研究方向为现代通信系统、非 正弦波通信.
- 刘传辉: 男,1984年生,讲师,研究方向为现代通信新技术、非 正弦波通信.
- 刘 晓: 男,1990年生,博士生,研究方向为现代通信新技术、 非正弦波通信.
- 康家方: 男,1987年生,讲师,研究方向为现代通信新技术、非 正弦波通信.