第 39 卷第 6 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.39No.6
2017 年 6 月 Journal of Electronics & Information Technology Jun. 2017

基于多尺度 Chirplet 稀疏分解和 Wigner-Ville 变换的时频分析方法

张天骐 全盛荣* 强幸子 江晓磊
(重庆邮电大学信号与信息处理重庆市重点实验室 重庆 400065)

摘 要：针对多分量多项式相位信号(mc-PPS)的 Wigner-Ville 分布存在的时频干扰问题，该文提出一种基于多尺度 Chirplet 稀疏分解和 Wigner-Ville 变换的时频分析方法。该方法采用多尺度的 Chirplet 基函数对信号进行投影分解，通过延时相关解调的分数阶傅里叶变换(FRFT)搜索投影系数最大的基函数，将搜索得到的基函数通过 Wigner-Ville 变换和最佳路径连接方法，逐次获得使分解信号能量最大的信号分量及其时频分布。仿真结果表明，该方法能在低信噪比条件下有效抑制等振幅 mc-PPS 的自交叉项和互交叉项的干扰，具有最佳的时频聚集性，克服了全局搜索基函数计算量大的问题，适用于非平稳信号的分析和处理。

关键词：多尺度 Chirplet；Wigner-Ville 变换；分数阶傅里叶变换；时频干扰；信噪比
中图分类号： TN911.7 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2017)06-1333-07
DOI: 10.11999/JEIT160750

Time-frequency Analysis Method Based on Multi-scale Chirplet Sparse Decomposition and Wigner-Ville Transform

ZHANG Tianqi QUAN Shengrong QIANG Xingzi JIANG Xiaolei
(*Chongqing Key Laboratory of Signal and Information Processing, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing* 400065, *China*)

Abstract: To solve the problem of time-frequency interference existing in the multicomponent Polynomial Phase Signal (mc-PPS) Wigner-Ville distribution, a new time-frequency analysis method based on the multi-scale Chirplet sparse decomposition and Wigner-Ville transform is proposed. This method projects mc-PPS onto the multi-scale Chirplet base functions, searching best base functions by the improved FRactional Fourier Transform (FRFT). Through the Wigner-Ville transform and best path pursuit algorithm, the base functions constitute largest energy signals component and power distribution in turns. Simulation results verify that the proposed method can restrain effectively the cross-interference of constant mc-PPS in low Signal-to-Noise Ratio condition, maintain a high time-frequency aggregation, and overcome the large computation of global searching algorithm. Furthermore, this method is suitable for non-stationary signals analysis and processing.

Key words: Multi-scale Chirplet; Wigner-Ville transform; FRactional Fourier Transform (FRFT); Time-frequency interference; Signal-to-Noise Ratio

1 引言

多项式相位信号(Polynomial Phase Signal, PPS)是一种典型的非平稳信号，在通信、雷达、生物医学等领域有着广泛的应用[1]。时频分析[2,3]注重非平稳信号的时变谱特征，能描述信号能量随时间和频率的分布。因此，研究 PPS 时频分析方法具有重要的意义。

近 20 年来，时频分析方法在信号处理领域中得到了广泛的研究，主要应用于语音、机械故障诊断、生物医学信号处理等领域[4,5]。传统的时频分析方法，如 Hough 变换[6]、Wigner-Ville 变换[7,8]、分数阶傅里叶变换[9]，对处理单分量线性调频信号有很好的能量聚集性，但处理非线性、多分量的 PPS 信号时存在交叉项干扰的问题。为了解决交叉项带来的时频干扰，国内外学者提出许多新的分析方法。Candès 等人[10]提出线调频小波路径追踪算法，该方法能自适应地选取线调频基稀疏表示信号的内在结构，但

收稿日期：2016-07-14；改回日期：2017-03-30；网络出版：2017-04-25
*通信作者：全盛荣 srquancqupt@163.com
基金项目：国家自然科学基金(61671095, 61371164, 61275099)，信号与信息处理重庆市市级重点实验室建设项目(CSTC2009CA2003)，重庆市教育委员会科研项目(KJ130524, KJ1600427, KJ1600429)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61671095, 61371164, 61275099), The Project of Key Laboratory of Signal and Information Processing of Chongqing (CSTC2009CA2003), The Research Project of Chongqing Educational Commission (KJ130524, KJ1600427, KJ1600429)

只适用于单分量信号的分解。文献[11]提出了一种基于多尺度线调频基信号稀疏分解的方法，该方法能有效分离多分量信号，具有较好的抗噪性能，但执行效率非常低。

本文在多尺度 Chirplet 稀疏分解和 Wigner-Ville 变换的基础上，提出了一种新的多分量 PPS 信号时频分析方法。首先，该方法充分利用多尺度 Chirplet 基函数的高时频聚集性，并结合了稀疏分解和 Wigner-Ville 变换；其次，针对信号稀疏分解基函数搜索量大的问题，研究了延时相关解调的 FRFT 方法。仿真分析表明，本文方法能有效抑制多分量 PPS 信号的自交叉项干扰和互交叉项干扰，克服了信号分解计算量大的问题，具有很强的抗噪声干扰能力，适用于非平稳信号的分析。

2 多尺度 Chirplet 稀疏分解的基本原理

2.1 多尺度 Chirplet 基函数库

多尺度 Chirplet 基函数定义为

$$g_\gamma(t)=K_\gamma\cdot \mathrm{e}^{-i\left(a_\mu t+b_\mu t^2\right)}l_I(t) \tag{1}$$

式中，I 为动态分析时间支撑区，$I=[qN2^{-j},(q+1)N2^{-j}]$, q=1,2,…,2^j-1, N 为信号采样长度，j 为分析尺度系数，$j=0,1,\cdots,\log_2(N-1)$。K_γ 为归一化系数，使得 $\left\|g_\gamma(t)\right\|=1$, a_μ, b_μ 分别表示频率偏置系数和调频率，$a_\mu+2b_\mu t<f_s/2$, f_s 为采样率；$l_I(t)$ 为矩形窗函数，当 $t\in I$ 时为 1,$t\notin I$ 时为 0。由式(1)可知，每个多尺度 Chirplet 基函数可以由参数组 $\gamma=(a_\mu,b_\mu,I)$ 来描述。

根据信号分析理论，任意信号 $\boldsymbol{f}(t)$ 可以展开为一组基函数的线性组合，即

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}a_n\boldsymbol{g}_n(t) \tag{2}$$

式中，b_n 为展开系数，$\boldsymbol{g}_n(t)$ 为基函数，$\boldsymbol{Z}$ 为正整数。本文采用一组正交的多尺度 Chirplet 基函数构建过完备库 $\boldsymbol{D}=\left\{\boldsymbol{g}_{\gamma_1}(t),\boldsymbol{g}_{\gamma_2}(t),\cdots,\boldsymbol{g}_{\gamma_n}(t)\right\}$，则

$$b_n=\left\langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{g}_{\gamma_n}(t)\right\rangle\Big/\left\|\boldsymbol{g}_{\gamma_n}(t)\right\| \tag{3}$$

式中，b_n 的大小反映了信号与基函数的相似程度。

2.2 多尺度 Chirplet 稀疏分解

假设分析信号为 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{r}(t)\cos[\theta(t)+\varphi_0]$，$\boldsymbol{D}$ 为参数化的过完备 Chirplet 基函数库，将信号 $\boldsymbol{f}(t)$ 展开为一系列与信号最为匹配基函数的加权和形式：

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{m=1}^{M}\left\langle R^{m-1}\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t)\right\rangle\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t)+R^M\boldsymbol{f}(t) \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t)$ 为 I_m 内最大投影系数对应的基函数，$R^{m-1}\boldsymbol{f}(t)$ 表示第 $m-1$ 次迭代后的残余信号，且有

$$\left\|\boldsymbol{f}(t)\right\|^2=\sum_{m=1}^{M}\left|\left\langle R^{m-1}\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t)\right\rangle\right|^2+\left\|R^M\boldsymbol{f}(t)\right\|^2 \tag{5}$$

利用多尺度 Chirplet 基函数对信号逐段投影分析，计算每个时间支撑区内的最大投影系数 β_{I_m} 和对应最佳基函数 $\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t)$，获得与分析信号最为相似的频率成分。$I_m$ 内的最大投影系数的计算公式为

$$\left.\begin{aligned}&\beta_{I_m}=\max\left\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t)\right\rangle\\&\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t)=\mathrm{abs}(2\beta_{I_m})\cdot\mathrm{e}^{-i\left(a_\beta t+b_\beta t^2-\mathrm{angle}(2\beta_{I_m})\right)}\boldsymbol{l}_{I_m}(t)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由于过完备基函数库的数目很大，稀疏分解过程中全局搜索基函数的运算量巨大，因此后文将采用延时相关解调的 FRFT 方法来提高 Chirplet 基函数的搜索效率。

随着分解的进行，残余信号的能量不断减小，当 $R^M\boldsymbol{f}(t)$ 的能量低于一定的阈值时，结束本轮信号分解。因此用少量 Chirplet 基函数即可表示信号的主要成分，即

$$\boldsymbol{f}(t)\approx\sum_{m=1}^{M}\left\langle R^{m-1}\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t)\right\rangle\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t)=\sum_{m=1}^{M}\beta_{I_m}\boldsymbol{g}_{\gamma_m}(t) \tag{7}$$

当信号与多尺度 Chirplet 基函数越相似时，其投影系数越大，基函数的能量也就越大，因此要求找到一种最佳路径连接方法，使得在满足整个分析时间内使连接的基函数的总能量 E_n 最大，即

$$E_n=\max\left(\sum_{I\in\prod n}\left\|\boldsymbol{c}_I(t)\right\|^2\right),\quad \prod n=\left\{I_1^n,I_2^n,\cdots\right\} \tag{8}$$

式中，$\prod n$ 为互不重叠且覆盖整个分析时间段的所有 I 的集合，其对应的基函数和最大投影系数分别为 $\boldsymbol{g}_\gamma=\left\{\boldsymbol{g}_{\gamma_1},\boldsymbol{g}_{\gamma_2},\cdots\right\}$, $\beta=\left\{\beta_{I_1},\beta_{I_2},\cdots\right\}$。

通过最佳路径连接方法[10]可以保证连接的基函数在整个分析时间内信号的总能量最大，而由一系列基函数稀疏表示的信号也与原信号最为相似。Chirplet 基函数路径连接示意图如图 1 所示，对整个分析时间段进行多尺度划分，当尺度系数为 j 时，时间轴被分为 2^j 段；频率轴被分为 L 段，每段间隔为 $f/2L$。在对应的时间支撑区内最匹配 Chirplet 基函数近似为信号的瞬时频率，将各个时间支撑区上的 Chirplet 基函数先后进行 Wigner-Ville 变换和路径连接，形成的时频分布即为分解信号的瞬时频率曲线。

对于分析时间段 I 内，信号分解过程中不断提取有用信息(基函数构成的信号分量)，将信号残余和噪声信号作为下一轮分解的残余信号，即 $\boldsymbol{f}_I(t)=\boldsymbol{c}_I(t)+\boldsymbol{r}_I(t)$，其中 $\boldsymbol{c}_I(t)$ 为在 I 内 β_I 对应的分解的信号分量，$\boldsymbol{r}_I(t)$ 为分解的残余信号。

停止分解判定条件定义为：若本轮分解中残余

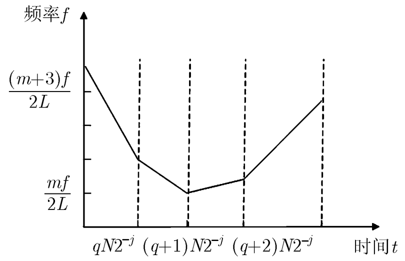

图 1　Chirplet 基函数路径连接示意图

信号能量为 E_r，分析信号能量为 E_f，且满足 $E_r / E_f < \delta$，其中 δ 为预先设定的能量阈值。

假设第 n 次分解的信号分量和残余信号分别表示为 $\boldsymbol{c}^n,\boldsymbol{r}^n$，则

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{c}^n &= \sum_{I_i\in\prod n}\boldsymbol{c}_{I_i}(t)\\ \boldsymbol{r}^n &= \sum_{I_i\in\prod n}\boldsymbol{r}_{I_i}(t)=\boldsymbol{r}^{n-1}-\sum_{I_i\in\prod n}\boldsymbol{c}_{I_i}(t)\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

结合式(9)进行分解直到满足给定的停止分解判定条件。

3　利用延时相关解调的 FRFT 方法确定最佳基函数

要确定每个时间支撑区的最佳基函数，就需要搜索对应动态分析时间段上与信号最为匹配的 Chirplet 基函数。Chirplet 基函数本质上为线调频信号，其 FRFT 在分数阶域有最佳的能量聚集性。过完备基函数库的基函数数目非常大，采样全局搜索基函数的方法必然导致搜索量大、执行效率低的问题。为解决这一问题，本文在信号稀疏分解的过程中，先对时频平面上的 Chirplet 基函数进行延时相关解调处理，然后通过 FRFT 得到信号在分数阶域对应的 FRFT 模值，通过峰值搜索来确定最佳基函数的参数信息。

信号 $y(t)$ 的 FRFT 定义为

$$Y_p(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)K_p(t,u)\mathrm{d}t\tag{10}$$

式中，$K_p(t)$ 为 FRFT 的变换核，其定义为

$$K_p(t,u)=\begin{cases}\delta(t-u), & \alpha=2n\pi\\ A_\alpha\cdot\exp\left[\mathrm{j}0.5\left(t^2+u^2\right)\cot\alpha-\mathrm{j}tu\csc\alpha\right], & \alpha\neq n\pi\\ \delta(t+u), & \alpha=(2n+1)\pi\end{cases}\tag{11}$$

式中，$A_\alpha=\sqrt{(1-\mathrm{j}\cot\alpha)/2\pi}$，$\alpha$ 为旋转角度，p 为 FRFT 的阶数，且 $\alpha=p\pi/2$。

FRFT 方法能根据 Chirplet 基函数的高时频聚集特性，通过搜索 FRFT 峰值所在位置 $(\hat{t}_0,\hat{p}_0)$，并结合式(11)可估计出 Chirplet 基函数的频偏和调频斜率：

$$\left.\begin{aligned}\hat{u}_0&=-\cot\left(\hat{p}_0\pi/2\right)\\ \hat{f}_0&=\hat{u}_0\csc\left(\hat{p}_0\pi/2\right)\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

式中，$\hat{p}_0$ 为最佳分数阶域对应的分数阶估计值，$\hat{f}_0,\hat{u}_0$ 分别为频偏和调频斜率的估计值。

设待分析的 Chirplet 信号为 $y_1(t)=\exp[i2\pi(20t+10t^2)]+w(t)$，在 -1 dB 的高斯白噪声环境下对分析信号进行 FRFT，形成信号能量在时频参数平面上的空间分布，如图 2 所示。采用文献[12]中提出的 2 维 FRFT 搜索方法可确定基函数为 $g_{\gamma_1}(t)=19.9396+9.9632t$。

经延时相关解调[13]后，Chirplet 信号可被看成为一个被噪声污染的频率为 $f_0'=\hat{k}\tau$ 正弦信号。由正弦信号频率的初值 $\hat{k}$ 可确定分数阶 $\hat{p}_0$ 的搜索范围为

$$\left[\frac{\hat{k}}{\pi}+\Delta p_1,\frac{\hat{k}}{\pi}+\Delta p_2\right]\tag{13}$$

式中，$\Delta p_1=\frac{2\hat{k}}{\pi}\arctan\left(1-\frac{f_s^2}{4\hat{k}N^{3/2}}\right)$，$\Delta p_2=\frac{2\hat{k}}{\pi}\cdot\arctan\left(1+\frac{f_s^2}{4\hat{k}N^{3/2}}\right)$。

为进一步提高基函数的搜索效率，对 2 维 FRFT 搜索方法进行改进。延时相关解调的 FRFT 方法具体过程为：对时频平面上的基函数进行延时相关解调，将得到正弦信号进行离散傅里叶变换得到其幅度谱，如图 3 所示。由处理后的正弦幅度谱得到频率估计值 $\hat{k}=9.6403$，结合式(13)得到一个较小范围的分数阶域，然后以 $\Delta p=0.0001$ 的步长在该分数阶域进行 FRFT 峰值搜索得到 $\hat{p}_0'=1.0390$，由式(12)可估计出 $\hat{f}_0=19.9396,\ \hat{u}_0=9.9632$。

由估计结果可知，延时相关解调的 FRFT 方法不会改变基函数的参数估计误差，这是因为其估计结果由搜索的分数阶步长决定。在相同搜索步长的前提下，FRFT 搜索峰值的计算量在于分数阶 p 范围的确定；利用延时相关解调的 FRFT 方法确定最佳基函数，有效地将分数阶域的 2 维搜索从而转化 1 维搜索，在很大程度上提高了对 Chirplet 基函数的搜索效率。

4　多分量 PPS 信号的时频分析

根据 Weierstrass 理论，任一连续函数可表示成 PPS 信号的形式。含噪环境下等振福多分量多项式相位信号(mc-PPS)的观测模型表示为

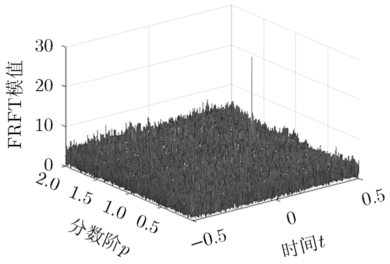

图 2 信号 FRFT 的 3 维图

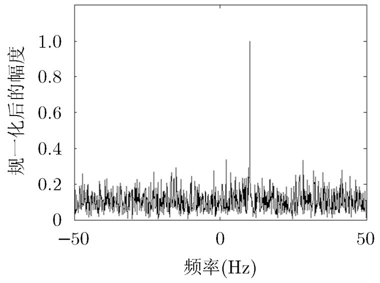

图 3 延时相关解调后的正弦幅度谱

$$x(t)=\sum_{l=1}^{Q}s_l(t)+w(t)=\sum_{l=1}^{Q}A\exp\left[i2\pi\left(a_{l0}+a_{l1}t+\cdots+a_{lM}t^M\right)\right]+w(t) \tag{14}$$

式中，Q 为信号分量个数，M 为信号的阶数，本文考虑幅值 $A=1$，$a_{lm}(k=1,2,\cdots,Q;m=1,2,\cdots,M)$ 为第 k 个分量信号的相位系数，$w(t)$ 为零均值、方差为 σ^2 的高斯白噪声。

信号的能量集中在瞬时频率周围，$s(t)$ 的 Wigner-Ville 分布(WVD)定义为

$$W_s(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}s\left(t+\frac{\tau}{2}\right)s^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{-i2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau \tag{15}$$

令 $s(t)=\mathrm{e}^{i\varphi(t)}$，$\varphi(t)$ 为信号的相位函数，将 $\varphi(t)$ 按泰勒公式展开得到

$$\varphi\left(t\pm\frac{\tau}{2}\right)=\varphi(t)\pm\frac{\varphi'(t)}{1!}\left(\frac{\tau}{2}\right)+\frac{\varphi''(t)}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\pm\frac{\varphi''(t)}{3!}\left(\frac{\tau}{3}\right)^3+\cdots \tag{16}$$

结合式(15)和式(16)得到

$$W_s(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\left[\varphi\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varphi\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]-i2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^{(2n-1)}(t)}{(2n-1)!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2n-1}\right]-i2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau \tag{17}$$

由式(17)可知，当信号相位函数二阶以上导数为零时，则 $W_s(t,f)=\delta[2\pi f-\phi'(t)]$，信号的 WVD 是位于该信号瞬时频率上的一个冲激函数，如 Chirplet 基函数表现出最佳的时频聚集性。当信号相位函数二阶以上导数不为零时，由于其相位高次项作用，信号的 WVD 会产生自身交叉项以及多分量信号之间的互交叉项干扰。由于 Chirplet 基函数高聚集性和强抗噪声干扰能力，本文将联合多尺度 Chirplet 稀疏分解和 Wigner-Ville 变换的方法对 mc-PPS 信号进行时频分析，从而实现抑制时频干扰的目的。

本文方法的具体步骤可归纳如下：

(1)初始化，定义 Chirplet 基函数库 $\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{g}_{\gamma_n}(t)\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$，设定一阈值 ε；

(2)将分析信号在 $\boldsymbol{D}$ 中进行投影分解，利用 FRFT 求出每个时间支撑区上 β_I 对应的基元函数；

(3)连接时间支撑区，形成跨整个分析时间的分解信号分量，对 f_i 作差分运算，如果相邻采样点频差 Δf_i 不变号且 $\max|\Delta f_i|<\varepsilon$，则返回 c_i, f_i, $i=i+1$ 转到步骤(2)，否则分解无效，$i=i-1$，停止本轮分解；

(4)对获得的基元函数依次进行 Wigner-Ville 变换，通过使分解信号能量最大的基函数连接得到信号的时频分布，形成基函数的线性组合即为本轮分解的信号分量；

(5)将分析信号减去分解出的信号分量，形成新的残余信号；

(6)若满足残余信号与分析信号的能量之比是否小于终止分解的阈值 δ，则返回各信号分量及其时频分布，停止本轮分解；否则将残余信号作为新的分解信号，重复步骤(2)～步骤(5)。

5 仿真实验及性能分析

5.1 单分量 PPS 信号稀疏分解及时频分析

考虑含噪单分量 4 阶 PPS 信号，结合式(14)描述的观测信号模型，已知 PPS 信号参数设置为 $a_0=0$，$a_1=-0.0796$, $a_2=1.0673$, $a_3=-3.5618$, $a_4=3.4783$。先对观测信号进行采样处理，采样频率为 1 kHz, $N=512$，并对信号频率进行归一化处理。由文献[10]可知，当信号采样长度为 512 时，库中含有 31180 个基函数，满足基函数库的过完备性。在信噪比为 −1 dB 的环境下，首先利用多尺度 Chirplet 基函数对信号进行稀疏分解，阈值为 $\varepsilon=0.05$ Hz, $\delta=0.1$，分析和比较尺度系数为 5 和 7 时基函数稀疏表示的时频图。

图 4，图 5 分别表示含噪条件下单分量 4 阶 PPS 信号的 Wigner-Ville 分布和伪 Wigner-Ville 分布图。由图可知，两种传统的时频分析方法都受噪声干扰影响较大，Wigner-Ville 分布虽具有很好的时频聚

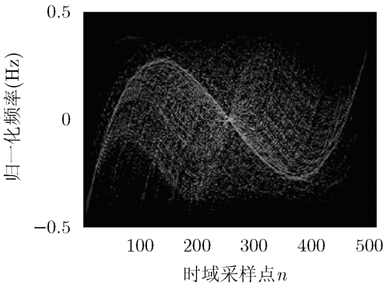

图 4　含噪 PPS 信号的 Wigner-Ville 分布

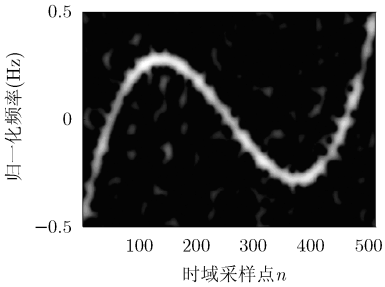

图 5 含噪 PPS 信号的伪 Wigner-Ville 分布

集性，但产生了信号自身交叉项的干扰，导致时频图变得模糊，而伪 Wigner-Ville 分布虽然有效抑制了信号的自身交叉项干扰，但时频分辨率下降，信号能量部分丢失。

图 6，图 7 分别表示 5 个和 7 个 Chirplet 基函数稀疏表示的时频图。由图可知，Chirplet 基函数在时频平面上具有最佳的聚集性，有效地抑制了信号自身交叉项和噪声的干扰。

然后在上述实验的基础上，改变信号采样长度和分析尺度系数，分析处理后 Chirplet 基函数稀疏表示的时频图。如图 8 所示，经过稀疏分解后由 9 个 Chirplet 基函数稀疏表示信号，此时时频图的效果显然更佳，与原信号瞬时频率曲线非常接近，有效抑制了噪声和交叉项的干扰。仿真结果验证了本文方法的有效性，能将信号表示为一组与信号最为相似基函数的线性组合，同时也说明了该方法的灵活性。

5.2 多分量 PPS 信号稀疏分解及时频分析

3 分量 PPS 信号为例，各信号分别为 $s_1(t)=\exp[i2\pi(3.4783t^4-3.5618t^3+1.0673t^2-0.0796t)]$，$s_2(t)=\exp[i2\pi(0.0389t^2-0.0796t)]$，$s_3(t)=\exp[i2\pi\cdot(8.6584t^4-0.3618t^3+0.00573t^2-0.0796t)]$。对信号进行采样及频率归一化处理，采样频率为 1 kHz, $N=2048$。在 -1 dB 的高斯白噪声环境下利用多尺度线调频基对该信号进行稀疏分解，设置阈值 $\varepsilon=0.01$ Hz, δ=0.1，分析尺度 $j=9$。

图 9 表示多分量 4 阶 PPS 信号的 Wigner-Ville 分布。由图可知，多个分量 PPS 信号的 Wigner-Ville 分布存在严重的自身交叉项干扰和信号之间的互交叉项干扰，其时频图模糊不清，传统的时频分析方法失效。图 10 为 Chirplet 稀疏表示多分量 PPS 信号的时频图。由图可知，本文方法在信噪比为 -1 dB 环境下能有效抑制多分量信号的自身交叉项的干扰和互交叉项干扰，但时频分辨率下降。但当信号采样点数越多时，Chirplet 基函数稀疏表示的时频分布时频分辨率下降，但分解的逼近误差会变小。

图 11，图 12 和图 13 分别表示在本文方法处理下各重构信号的逼近误差。由图可知，各重构信号的逼近误差值均小于 0.05，说明本文方法的分解效果很好，利用 Chirplet 基函数能很好地稀疏表示信号的内在结构。重构信号 2 的逼近误差较其他两个重构信号要小，而信号分量 2 的本质是线性调频信号，其瞬时频率是线性变化的，说明本文方法对线性调频信号具有更好的分解效果。

5.3 多尺度 Chirplet 稀疏分解性能分析

在 Pentium(R) Dual-Core 2.5 GHz CPU, 1.4 G 内存的计算机配置下，采用实验 5.2 中的多分量 PPS 信号，后续分析都不改变信号的参数信息。

首先，利用本文方法和文献[12]提出的 FRFT 的 2 维搜索方法进行信号分解，其中基于 FRFT 的 2 维搜索方法的搜索步长为 $\Delta p_1=0.01$, Δp_2=0.001，本文方法的搜索步长为 $\Delta p=0.001$。通过改变信号

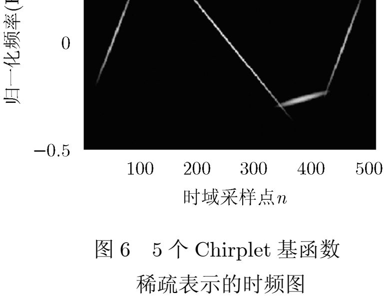

图 6　5 个 Chirplet 基函数稀疏表示的时频图

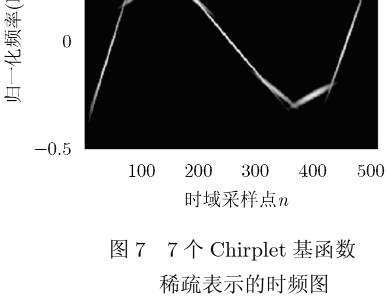

图 7　7 个 Chirplet 基函数稀疏表示的时频图

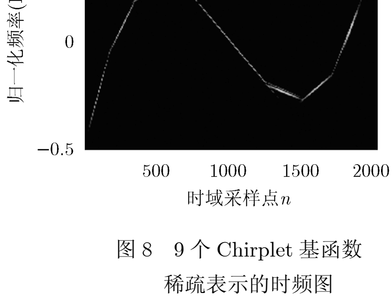

图 8　9 个 Chirplet 基函数稀疏表示的时频图

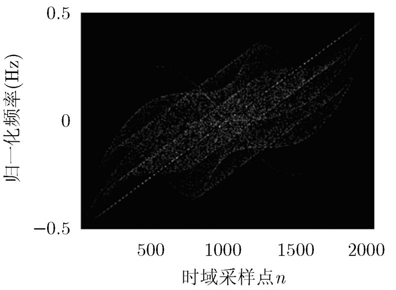

图 9 含噪多分量 PPS 信号的 WVD

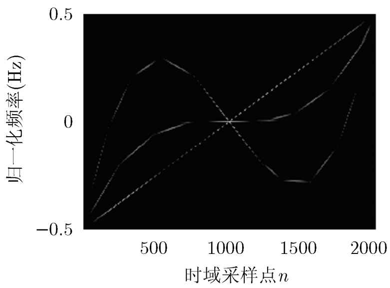

图 10 Chirplet 基函数稀疏表示的多分量 PPS 信号时频图

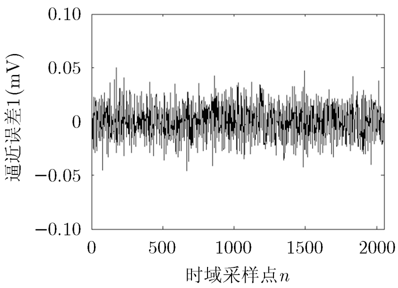

图 11 重构信号 1 的逼近误差

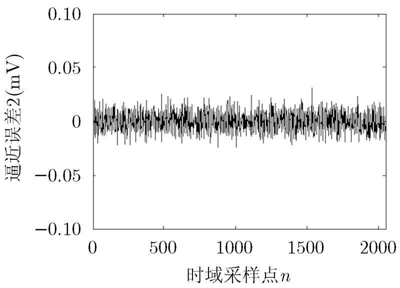

图 12 重构信号 2 的逼近误差

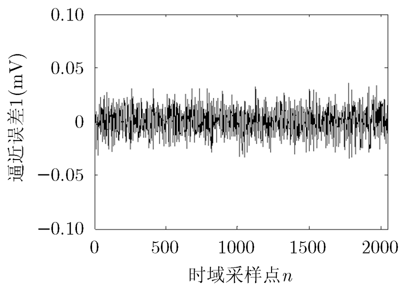

图 13 重构信号 3 的逼近误差

的采样长度、采样频率、分析尺度系数的值，并进行耗时统计，对两种分析方法进行对比分析。

对比表 1 中数据可知，采样长度、分析尺度、搜索步长对信号分解计算效率均有影响。由样本 1 和样本 2 可知，两种 FRFT 方法的计算量与采样频率无关；由样本 2 和样本 5 可知，采样长度越长，搜索基函数的计算量越大。通过与 FRFT 的 2 维搜索方法的对比，本文方法能很大程度上提高基函数的搜索效率。

然后，利用本文方法对多分量信号进行稀疏分解，分析尺度为 9，采样频率为 1 kHz，采样长度为 2048，频率阈值为 $\varepsilon = 0.01$ Hz，分析本文方法在不同信噪比下的分解性能，信噪比范围为 $-6\sim6$ dB，变化间隔为 0.5 dB。定义瞬时频率估计的均方根误差为

表 1 基于 FRFT 的两种搜索方法确定基函数耗时统计

样本	仿真信号参数			FRFT 的 2 维搜索方法(s)	本文方法(s)
	样本长度	采样频率(Hz)	分析尺度		
1	512	800	7	154.3	42.5
2	512	1000	7	156.4	45.2
3	1024	800	7	735.5	153.2
4	1024	1000	9	1434.2	358.3
5	2048	1000	7	1636.5	386.1
6	2048	1000	9	2432.2	541.2

$$ef(i)=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[f_i^{'}(n)-f_i(n)\right]^2},\ n=0,1,2,\cdots,N-1 \quad (18)$$

其中 $f_i^{'}$, f_i 分别表示第 i 个信号分量瞬时频率的估计值与真实值，则 $ef(i)$ 表示第 i 个分量瞬时频率估计的均方根误差，作为衡量多尺度 Chirplet 分解的性能指标。

由图 14 可知，随着信噪比的增大，各信号分量瞬时频率估计的均方根误差不断减小。当信噪比大于 0 dB 时，各信号分量瞬时频率估计值的均方根误差小于 −16 dB，说明本文方法有很好的分解效果，能够准确估计出信号的瞬时频率，具有很好的抗噪声干扰能力。此时分量 2 的均方根误差较分量 1 和分量 3 的值都要小，进一步说明了本文方法对线性调频信号有更好的分解性能。

6 结论

从多尺度 Chirplet 稀疏分解和 Wigner-Ville 变换的

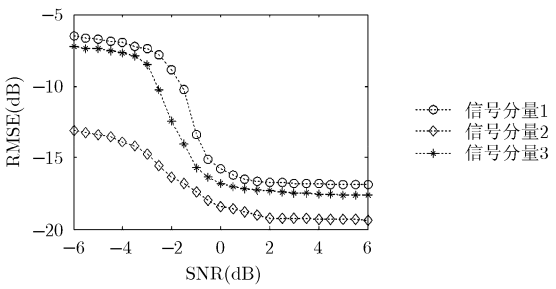

图 14 不同信噪比下瞬时频率估计的均方根误差

角度出发，本文提出一种新的多项式相位信号时频分析方法。该方法充分利用 Chirplet 基函数的高时频聚集特性，先对信号进行稀疏分解，同时在分解过程中采用改进的 FRFT 方法搜索最佳基函数，并通过 Wigner-Ville 变换和最佳路径连接将信号稀疏表示为一组与信号最为匹配 Chirplet 基函数的线性组合。仿真结果表明，当信噪比大于 0 dB 时，瞬时频率估计均方根误差小于 –16 dB 。该方法能有效抑制多分量信号的时频交叉干扰，克服了对信号进行分解时计算量大的问题，具有很好的抗噪声干扰能力，适用于一些非平稳信号的分离与瞬时频率估计。

参 考 文 献

[1] 张贤达. 非平稳信号分析与处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001: 451–492.
ZHANG Xianda. Nonstationary Signal Analysis and Processing[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2001: 451–492.

[2] 邹红星, 周小波, 李衍达. 时频分析: 回溯与前瞻[J]. 电子学报, 2000, 28(8): 78–84.
ZOU Hongxing, ZHOU Xiaobo, and LI Yanda. Which time-frequency analysis—a survey[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2000, 28(8): 78–84.

[3] KRISTIAN T and MARC M. Adaptive time-frequency analysis for noise reduction in an audio filter bank with low delay[J]. *IEEE/ACM Transactions on Audio*, *Speech and Language Processing*, 2016, 24(4): 784–795. doi: 10.1109/TASLP.2016.2526779.

[4] MISHRA A, SINGH A K, and SAHU S. ECG signal denoising using time-frequency based filtering approach[C]. Proceedings of the International Conference on Communication and Signal Processing, India, 2016: 0503–0507. doi: 10.1109/ICCSP.2016.7754188.

[5] WANG J and HE Q. Wavelet packet envelope manifold for fault diagnosis of rolling element bearings[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2016, 65(11): 2515–2526. doi: 10.1109/TIM.2016.2566838.

[6] 刘颖, 陈殿仁, 陈磊, 等. 基于周期 Choi-Williams Hough 变换的线性调频连续波信号参数估计算法[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(5): 1135–1140. doi: 10.11999/JEIT140876.
LIU Ying, CHEN Dianren, CHEN Lei, *et al.* Parameters estimation algorithm of linear frequency modulated continuous wave signals based on period Choi-Williams Hough transform[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(5): 1135–1140. doi: 10.11999/JEIT140876.

[7] 王忠仁, 林君, 李文伟. 基于 Wigner-Ville 分布的复杂时变信号的时频分析[J]. 电子学报, 2005, 33(12): 2239–2241.
WANG Zhongren, LIN Jun, and LI Wenwei. Time-frequency analysis for complex time-varying signals based on Wigner-Ville distribution[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2005, 33(12): 2239–2241.

[8] 王勇, 姜义成. 多项式 Wigner-Ville 分布的频域卷积实现[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(2): 286–289.
WANG Yong and JIANG Yicheng. Realization of polynomial Wigner-Ville distribution based on the convolution in frequency domain[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(2): 286–289.

[9] PENG H W, CHANG H T, and LIN C C. 2-D linear frequency modulation signal separation using fractional Fourier transform[C]. Proceedings of the International Symposium on Computer, Consumer and Control, Taibei, China, 2016: 755–758. doi: 10.1109/IS3C.2016.193.

[10] CANDÈS E J, CHARLTON P, and HELGASON H. Detecting highly oscillatory signals by chirplet path pursuit[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, 24(1): 14–40.

[11] 罗洁思, 于德介, 彭富强. 基于多尺度线调频基信号稀疏分解的多分量 LFM 信号检测[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(11) 2781–2785.
LUO Jiesi, YU Dejie, and PENG Fuqiang. Multicomponent LFM signals detection based on multi-scale Chirplet sparse signal decomposition[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(11): 2781–2785.

[12] 梅检民, 肖云魁, 周斌, 等. 基于 FRFT 的改进多尺度线调频基稀疏信号分解方法[J]. 振动工程学报, 2013, 26(1): 135–142.
MEI Jianmin, XIAO Yunkui, ZHOU Bin, *et al.* Improved multi-scale chirplet sparse signal decomposition method based on fractional Fourier transform[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, 26(1): 135–142.

[13] 刘渝. 快速解线性调频信号估计[J]. 数据采集与处理, 1999, 14(2): 175–178.
LIU Yu. Fast dechirp algorithm[J]. *Journal of Data Acquisition & Processing*, 1999, 14(2): 175–178.

张天骐：　男，1971 年生，教授，主要研究方向为扩频信号的盲处理、神经网络实现以及 FPGA、VLSA 实现.

全盛荣：　男，1990 年生，硕士生，研究方向为通信信号处理、稀疏分解.

强幸子：　男，1986 年生，硕士生，研究方向为扩频信号的盲处理.

江晓磊：　女，1992 年生，硕士生，研究方向为 BOC 信号的捕获算法.