一种基于非负低秩稀疏图的半监督学习改进算法

张 涛* 唐振民

(南京理工大学计算机科学与工程学院 南京 210094)

摘要:该文针对基于非负低秩稀疏图的半监督学习算法不能准确地描述数据结构的问题,提出一种融合平滑低秩表示和加权稀疏约束的改进算法。该算法分别对经典算法的低秩项和稀疏项进行改进,准确地捕获了数据的全局子空间结构和局部线性结构。在构建目标函数时,使用对数行列式函数代替核范数平滑地估计秩函数,同时利用形状交互信息和有标签样本的类别信息构造加权稀疏约束正则项。然后通过带有自适应惩罚的线性交替方向方法求解目标函数并采用有效的后处理方法重构数据的图结构,最后利用基于局部和全局一致性的半监督分类框架完成学习任务。在ORL库,Extended Yale B库和 USPS 库上的实验结果表明,该改进算法提高了半监督学习的准确率。
 关键词:半监督学习;图模型;低秩表示;稀疏约束
 中图分类号:TP391
 文献标识码:A
 文章编号:1009-5896(2017)04-0915-07

Improved Algorithm Based on Non-negative Low Rank and Sparse Graph for Semi-supervised Learning

ZHANG Tao TANG Zhenmin

(College of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Semi-supervised learning algorithm based on non-negative low rank and sparse graph can not describe the structures of the data exactly. Therefore, an improved algorithm which integrates smoothed low rank representation and weighted sparsity constraint is proposed. The low rank term and sparse term of the classical algorithm are improved by this algorithm respectively, and the global subspace structure and the locally linear structure can be captured exactly. When building the objective function, the logarithm determinant function instead of the nuclear norm is used to approximate the rank function smoothly. Meanwhile, the shape interaction information and the label information of labeled samples is used to build the weighted sparsity constraint regularization term. Then, the objective function is solved by a linearized alternating direction method with adaptive penalty and the graph construction is restructured by an available post-processing method. Finally, a semi-supervised classification framework based on local and global consistency is used to finish the learning task. The experimental results on ORL, Extended Yale B and USPS database show that the improved algorithm improves the accuracy of semi-supervised learning.

Key words: Semi-supervised learning; Graph model; Low rank representation; Sparsity constraint

1 引言

目前,半监督学习方法是机器学习和模式识别 领域的研究热点。半监督学习利用少量的有标签样 本和丰富的无标签样本一起进行训练学习,同时解 决了监督学习的模型泛化能力不强和无监督学习的 模型不精确等问题^[1]。在当前方法中,基于图的半监 督学习可以有效地捕获隐藏在数据中的结构信息并

基金项目: 国家自然科学基金(61473154)

在实际应用中获得了更好的效果,是半监督学习算法的重点研究方向^[2]。

基于图的半监督学习将有标签样本和无标签样本作为图的节点,将描述样本间相似性的权重矩阵作为图的边,通过标签传播算法将标签样本的类别信息传播到无标签的样本。如何构造合适的图是该类算法的难点,文献[3]提出了低秩表示(Low Rank Representation, LRR)理论,通过求解核范数最小化问题构造低秩图,可以捕获数据的全局结构。文献[4]提出了非负低秩稀疏图(Non-Negative Low Rank and Sparse Graph, NNLRS),联合低秩表示和稀疏约束,同时捕获数据的全局和局部结构,提高了半

收稿日期:2016-05-28;改回日期:2016-09-23;网络出版:2016-12-02 *通信作者: 张涛 njustztwork@126.com

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China $\left(61473154\right)$

监督学习算法的性能。文献[5,6]在非负低秩稀疏图 的基础上提出了加权稀疏约束,对稀疏正则项加以 不同的权重约束,更有效地保护了数据的局部结构。 文献[7]提出了流形化的非负低秩稀疏图,通过在模 型中加入流形约束保护数据的内在流形结构。

我们观察到上述基于非负低秩稀疏图的算法都 是使用核范数代替秩函数来估计矩阵的秩,以此求 得数据最低秩的表示,而核范数是秩函数的凸包, 在许多实际问题中并不能准确地估计矩阵的秩。因 此,选择合适的替代函数来估计矩阵的秩可以有效 提高算法的性能。文献[8]在矩阵恢复问题中使用平 滑的 Schatten-p 函数代替秩函数,提高了算法的适 应性。文献[9]使用 Max 极小化模型代替秩函数,在 鲁棒主成分分析问题上获得了成功。文献[10]提出了 对数行列式函数,应用于子空间聚类问题上明显提 高了算法的聚类性能^[11]。由于子空间聚类问题和半 监督学习问题在构造图过程上的相似性,本文改进 算法使用对数行列式函数代替秩函数,可以更加平 滑地估计矩阵的秩,准确地捕获数据的全局子空间 结构。

传统的基于图的半监督学习可以分为两个步 骤,首先构造一个有信息的图,其次传播标签信息。 然而,构造图的过程是无监督的,并没有利用有标 签样本的类别信息。针对此缺陷,本文改进算法提 出一种新颖的加权稀疏约束,构造一个融合形状交 互信息和有标签样本类别信息的权重约束,使构造 的图含有更丰富的信息,充分保护数据的局部线性 结构。

本文提出的改进算法在构建目标函数时,使用 对数行列式函数估计秩函数,同时构造融合形状交 互信息和有标签样本类别信息的加权稀疏约束正则 项,然后采用带有自适应惩罚的线性交替方向方法 (Linearized Alternating Direction Method with Adaptive Penalty, LADMAP)^[12]求解最优化问题,

并通过有效的后处理方法重构数据的图结构,最后使用基于局部和全局一致性(Local and Global Consistency, LGC)^[13]的半监督分类框架求得分类结果。本文的内容组织如下:第2节主要介绍了非负低秩稀疏图和半监督分类;第3节详细阐述了本文的改进算法;第4节为实验结果分析;第5节是结论。

2 非负低秩稀疏图和半监督分类

2.1 非负低秩稀疏图

给定数据矩阵 $\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{x}_i \in R^d \right\}_{i=1}^n$, 列向量为 n 个

数据样本,行向量为d维特征空间,系数矩阵 $Z = \{z_i \in R^n\}_{i=1}^n$,其中每一列 z_i 是样本 x_i 的表示系 数,则非负低秩稀疏图的模型为:

 $\min_{\boldsymbol{Z}} ||\boldsymbol{Z}||_* + \alpha ||\boldsymbol{Z}||_1 + \lambda ||\boldsymbol{E}||_l,$

.t.
$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{Z} \ge 0$$
 (1)

其中 ||**Z**||_{*} 表示低秩项, |||* 是核范数, 定义为矩阵奇 异值的和, 用来代替秩函数估计矩阵的秩。 ||**Z**||₁ 表 示稀疏项, ||**E**||₁ 表示噪声项, 根据不同的噪声模型, ||₁ 可以选取不同的范数。

利用 LADMAP 对式(1)求解得(Z^* , E^*),则非 负低秩稀疏图的图权重矩阵通过式(2)获得:

$$\boldsymbol{W}_{G} = \left(\mid \boldsymbol{Z}^{*} \mid + \mid \boldsymbol{Z}^{*} \mid^{\mathrm{T}} \right) / 2 \tag{2}$$

2.2 半监督分类

通常,在求得图权重矩阵后,我们使用 LGC 算 法作为半监督分类框架求得分类结果,该算法模型 为

$$\min_{\boldsymbol{Q}} \|\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Y}\|_{F}^{2} + \beta \cdot \operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{Q} \right)$$
(3)

其中, $Y = \{y_i \in R^e\}_{i=1}^n$ 为初始化标签矩阵, 若 x_i 是 类别为k的有标签样本,则 y_i 的第k个元素为1,其 余元素为0;若 x_i 是无标签样本,则 $y_i=0$ 。 $Q = \{q_i \in R^e\}_{i=1}^n$ 为待求的标签预测矩阵, q_i 表示为样本 x_i 属 于各个类别的概率。矩阵 $L_W = D^{-1/2}W_G D^{-1/2}$ 是规则化的图拉普拉斯^[14],其中 W_G 是由式(2)求得的图 权重矩阵, D是对角矩阵, $D_{ii} = \sum_j W_{G_{ij}}$,通过

对式(3)进行求解,可以求得最终的分类结果Q。

3 本文的改进算法

基于非负低秩稀疏图模型,本文提出了融合平 滑低秩表示和加权稀疏约束(Smoothed Low Rank Representation and Weighted Sparsity Constraint, SLR-WSC)的改进算法,使用对数行列式函数代替 核函数平滑地估计秩函数,同时构造融合形状交互 信息和有标签样本类别信息的加权稀疏约束正则 项,准确地捕获数据结构。

3.1 构建目标函数

对数行列式函数可以平滑地估计秩函数,准确 地捕获到数据的全局子空间结构,在子空间聚类问 题上获得了很好的效果^[11],函数表达式为

$$F(\boldsymbol{Z}) = \operatorname{lgdet}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{lg}(1 + \sigma_{i}^{2}(\boldsymbol{Z})) \quad (4)$$

其中 Z 为需要求解的系数矩阵, σ_i 为 Z 的第i 个奇 异值,使用该函数代替核范数,式(1)可以改写为

 $\min_{\boldsymbol{Z}} \operatorname{lgdet}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}) + \alpha || \boldsymbol{Z} ||_{1} + \lambda || \boldsymbol{E} ||_{l},$

s.t.
$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{Z} \ge 0$$
 (5)

文献[5]和文献[6]将式(1)中的稀疏项改进为

 $\|W \odot Z\|_{1}$,通过构造不同的权重矩阵W,更有效地 捕获了数据的局部线性结构。其中 \odot 表示 Hadamard 乘积,若 $C = A \odot B$,则 $C_{ij} = A_{ij} * B_{ij}$ 。 文献[15]提出了一种新颖的形状交互权重,假设数据 矩阵X的瘦形奇异值分解为 $X = U_r \Lambda_r V_r^T$,其中r为矩阵的秩。数据样本 x_i 的形状交互表示为 $R_i = \Lambda_r^{-1} U_r^T x_i$,通过 $R_i^* = R_i / \|R_i\|_2$ 对 R_i 进行规则 化,则形状交互权重为

$$\mathbf{SIW}_{ij} = \left\| \boldsymbol{R}_i^* - \boldsymbol{R}_j^* \right\|_2 \tag{6}$$

虽然形状交互权重利用了样本的形状交互信息,但是构造权重矩阵的过程是无监督的过程,并没有有效利用有标签样本的类别信息。根据文献[6]对权重矩阵W的分析,如果有标签样本 x_i 和 x_j 属于同一类别,那么 W_{ij} 应该为 0。因此,我们根据初始化的标签矩阵Y构造类别信息矩阵 $T = \{t_i \in R^n\}_{i=1}^n$,如果 x_i 和 x_j 为同类,则 $T_{ij} = 0$,否则 $T_{ij} = 1$ 。那么,我们构造的融合形状交互信息和有标签样本类别信息的权重矩阵为

$$W = \mathbf{SIW} \odot \boldsymbol{T} \tag{7}$$

综上所述,我们得到 SLR-WSC 的目标函数为 min lgdet $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}) + \alpha \| \boldsymbol{W} \odot \boldsymbol{Z} \|_{1} + \lambda \| \boldsymbol{E} \|_{l}$,

s.t.
$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{Z} \ge 0$$
 (8)

相比于式(1),本文提出的 SLR-WSC 的目标函数分别从低秩表示项||**Z**||_{*} 和稀疏约束项||**Z**||_{*} 这两方面进行改进,更加准确地捕获数据的全局和局部结构。

3.2 求解最优化问题

本文采用 LADMAP 求解式(8),引入辅助变量 *J*,式(8)可以写成

$$\min_{\mathbf{Z}} \operatorname{lgdet}(\mathbf{I} + \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} \mathbf{Z}) + \alpha \| \mathbf{W} \odot \mathbf{J} \|_{1} + \lambda \| \mathbf{E} \|_{l}$$

.t.
$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{E}, \, \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{J}, \, \boldsymbol{J} \ge 0$$
 (9)

式(9)的增广拉格朗日函数为

$$L = \operatorname{lgdet} \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Z} \right) + \alpha \left\| \boldsymbol{W} \odot \boldsymbol{J} \right\|_{1}$$

+ $\lambda \left\| \boldsymbol{E} \right\|_{l} + \operatorname{Tr} \left[\boldsymbol{Y}_{1}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X} \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{E} \right) \right]$
+ $\operatorname{Tr} \left[\boldsymbol{Y}_{2}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{J} \right) \right] + \frac{\mu}{2} \left[\left\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X} \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{E} \right\|_{F}^{2}$
+ $\left\| \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{J} \right\|_{F}^{2} \right]$ (10)

其中, Y_1 , Y_2 是拉格朗日乘子, $\mu > 0$ 是惩罚参数,本文利用交替最小化的思想更新变量。

给定变量 Z_k , J_k , E_k , $Y_{1,k}$, $Y_{2,k}$, 算法的更新 规则是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_{k+1} &= \arg\min_{\boldsymbol{Z}} \frac{1}{\eta \mu_{k}} \operatorname{lgdet} \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Z} \right) + \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{Z} - \left(\boldsymbol{Z}_{k} \right. \\ &+ \left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X} \boldsymbol{Z}_{k} - \boldsymbol{E} + \boldsymbol{Y}_{1,k} \middle/ \mu_{k} \right) \right. \\ &\left. - \left(\boldsymbol{Z}_{k} - \boldsymbol{J}_{k} + \boldsymbol{Y}_{2,k} \middle/ \mu_{k} \right) \right) \! \left| \boldsymbol{\gamma} \right| \right\|_{F}^{2} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{k+1} &= \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{J} \ge 0} \frac{\alpha}{\mu_k} \| \boldsymbol{W} \odot \boldsymbol{J} \|_1 \\ &+ \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{J} - \left(\boldsymbol{Z}_{k+1} + \boldsymbol{Y}_{2,k} / \mu_k \right) \right\|_F^2 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{k+1} &= \arg\min_{\boldsymbol{E}} \frac{\lambda}{\mu_k} \|\boldsymbol{E}\|_l \\ &+ \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{E} - \left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X} \boldsymbol{Z}_{k+1} + \boldsymbol{Y}_{1,k} / \mu_k \right) \right\|_F^2 \end{aligned} \tag{13}$$

其中, $\eta = \|\boldsymbol{X}\|_2^2$ 。

式(11)可以转换成标量最小化问题,它的解通 过定理1求得,文献[11]和文献[16]已经对定理1进 行了证明。

定理 1 假设矩阵 X 的奇异值分解为 X = UAV^{T} ,其中 $A = \operatorname{diag}(\sigma_{1,X}, \sigma_{2,X}, \dots, \sigma_{i,X})$,则最优化问题 $\min_{Y} \frac{1}{\lambda} \operatorname{lgdet}(I + Y^{\mathrm{T}}Y) + \frac{1}{2} ||Y - X||_{F}^{2}$ 的解为 $Y^{*} = UA^{*}V^{\mathrm{T}}$,其中 $A^{*} = \operatorname{diag}(\sigma_{1}^{*}, \sigma_{2}^{*}, \dots, \sigma_{i}^{*}), \sigma_{i}^{*}$ 可以通过求解式(14)获得。

$$\begin{aligned} &\frac{2\sigma_i}{1+\sigma_i^2} + \lambda \left(\sigma_i - \sigma_{i,\mathbf{X}}\right) = 0, \\ &\text{s.t.} \quad \sigma_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{14}$$

式(12)的解为 $(\mathbf{J}_{k+1})_{ij} = \max(S_{\varepsilon_{ij}}[(\mathbf{Z}_{k+1})_{ij} + (\mathbf{Y}_{2,k})_{ij}) / \mu_k], 0)$,其中 $\varepsilon_{ij} = (\alpha / \mu_k) W_{ij}$, S为收缩运算符^[17], 定义为 $S_{\varepsilon}[x] = \max(x - \varepsilon, 0) + \min(x + \varepsilon, 0)$ 。

根据不同的噪声模型,式(13)有不同的闭合解。 通常,选取 $l_{2,1}$ 范数 $\|E\|_{2,1} = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} E_{ij}^{2}}$ 作为噪声模型,其解为

$$\boldsymbol{E}_{k+1} = \Omega_{\underline{\lambda}} \left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X} \boldsymbol{Z}_{k+1} + \boldsymbol{Y}_{1,k} / \mu_k \right)$$
(15)

其中, Ω 为 $l_{2,1}$ 范数最小化运算符^[18],假设 $Y = \Omega_{\varepsilon}(X)$,则Y的第i列由式(16)获得。

$$\mathbf{Y}(:,i) = \begin{cases} \frac{\|\mathbf{X}(:,i)\|_{2} - \varepsilon}{\|\mathbf{X}(:,i)\|_{2}} \mathbf{X}(:,i), & \varepsilon < \|\mathbf{X}(:,i)\|_{2} \\ 0, & \varepsilon \ge \|\mathbf{X}(:,i)\|_{2} \end{cases}$$
(16)

综上所述,通过 LADMAP 求解式(8)的过程如下:首先输入数据矩阵 X,参数 α 和 λ ,初始化变量;然后通过上述更新规则分别对变量 Z, J, E, 拉格朗日乘子和惩罚参数进行更新直至收敛,最后 求得最优化问题的解(Z^* , E^*)。

3.3 重构数据的图结构

对系数矩阵 Z^* 进行合适的后处理可以提高算 法性能^[10],基于图的半监督学习首先对 Z^* 的每一列 进行规则化 $Z^*(:,i) = Z^*(:,i) / || Z^*(:,i) ||_2$,然后通过 式(2)重建数据的图权重矩阵 W_G 。不同于上述传统 方法,受子空间聚类问题中对系数矩阵进行后处理的启发,本文采用文献[3]的方法来重建图权重矩阵。 首先,对 Z^* 进行瘦形奇异值分解 $Z^* = U^*S^*(V^*)^T$,然后定义 $P = U^*(S^*)^{1/2}$,则图权重矩阵 W_G 通过式(17)求得

$$\left(\boldsymbol{W}_{G}\right)_{ii} = \left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)_{ii}^{2} \tag{17}$$

最后,采用基于 LGC 的半监督学习分类框架求 得最终的分类结果。

4 实验结果与分析

本节将提出的 SLR-WSC 算法与流行的基于低 秩与稀疏理论的半监督学习算法进行实验比较,实 验环境为 Intel Core i7 4710MQCPU, 8 G 内存的笔 记本电脑。

4.1 数据库

选择 3 个流行的数据库 ORL, Extended Yale B 和 USPS 进行实验,其中 ORL 和 Extended Yale B 是人脸数据库,USPS 是手写体数据库。ORL 库包 括 40 个类别的人脸图像,每类 10 张总共 400 张。 数据库中原始图像大小为112×92,包括不同时期、 不同光照、不同表情和不同遮挡的人脸图像。将图 像大小归一化为 32×32。Extended Yale B 库包括 38 个类别总共 2432 幅在不同光照下的人脸图像。 选取该数据库的前 20 个类别,每类 50 幅图像进行 实验,同样,将图像大小归一化为 32×32。USPS 库包括 9298 幅数字 0~9 的手写体图像,图像大小为16×16,选择每个手写体数字的前 100 幅图像进行实验。上述 3 个数据库的部分样本图像如图 1 所示。

4.2 对比算法

本文将提出的 SLR-WSC 算法与 K 最近邻(K Nearest Neighbor, KNN), LRR^[3], 对数行列式估计 (Log-Determinant Approximation, $LDA)^{[11]},$ NNLRS^[4], 局部约束的低秩表示(Low Rank Representation with Local Constraint, LRRLC)^[5], 结构化约束的低秩表示(Structure Constrained Low Rank Representation, SCLRR)^[6]进行比较。KNN 算法利用欧几里得距离作为相似性度量,求得样本 的k个最近邻,若样本 x_i 和 x_i 是邻居,则图权重矩 阵为 $(W_G)_{ii} = \exp(-||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_i||_2^{2/\sigma^2})$ 。LRR 算法通过 寻找数据在自身数据字典上的最低秩表示来捕获数 据的全局结构。LDA 算法对 LRR 算法进行改进, 使用对数行列式函数代替核范数估计矩阵的秩。 NNLRS 算法联合低秩表示和稀疏约束,同时捕获数 据的全局和局部结构。LRRLC 算法为了更好地保护 数据的局部结构,对 NNLRS 算法的稀疏项加以局 部权重约束 $W = || \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i ||_2^2$ 。类似于 LRRLC 算法, SCLRR 算法构造基于结构化权重约束的 $W_{ii} = 1 - \exp(-(1 - |\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i|) / \sigma)$,提高了算法分类性 能。



图 1 3个数据库的部分样本图像

根据文献[4]和文献[5]的实验参数设置,本文适 当选取 KNN 算法的近邻数k = 5进行实验。LRR, LDA, NNLRS, LRRLC和 SCLRR 算法中用于平衡 噪声项的参数 λ 通过在区间 {0.01,0.1,1,10,100} 中搜 索选取最优值: NNLRS, LRRLC和 SCLRR 算法中 用于平衡稀疏项的参数 α 通过在区间 {0.05,0.1,0.3, 0.5,0.8,1,5} 中搜索选取最优值。

4.3 实验结果

在本文实验中,我们在数据库的每一个类别中随机选择 10%~60%的样本作为标签样本,对于不同数量的标签样本,重复实验 20次,表 1,表 2 和表 3 显示了各算法在 ORL 库, Extended Yale B 库和 USPS 库上的分类准确率和标准差。

从上述的实验结果,可以观察到:

(1)本文提出的SLR-WSC 算法获得了最高的分

类准确率。相比于其他算法,SLR-WSC 通过使用 对数行列式函数估计秩函数,准确地捕获了数据的 全局子空间结构;同时,在目标函数中加入了融合 形状交互信息和有标签样本类别信息的加权稀疏约 束正则项,准确地捕获了数据的局部线性结构,提 高了算法性能。在保证分类准确率的同时, SLR-WSC 算法的标准差也维持在比较小的水平, 说明本文算法也比较稳定。

(2)相比于 LRR 算法, LDA 算法使用对数行列 式函数代替核范数,在两个人脸数据库上的分类准 确率明显提高,在手写体数据库上性能相近,表明 对数行列式函数在大多数情况下都能更好地估计秩 函数,有效地求得数据的最低秩表示。但是,LDA 算法的分类准确率仍然低于融合低秩表示和稀疏约 束的算法。

表1 各算法在 ORL 库上的分类准确率和标准差(%)

					ሎታ ነቷ				
	标签样本(%) -	算法							
		KNN	LRR	LDA	NNLRS	LRRLC	SCLRR	SLR-WSC	
	10	42.49 ± 30.17	$63.83 {\pm} 2.21$	68.53 ± 1.88	$72.76 {\pm} 2.03$	$69.78 {\pm} 1.86$	75.93 ± 2.22	$82.94{\pm}2.19$	
	20	58.41 ± 28.76	$73.19{\pm}2.54$	80.45 ± 2.48	$82.78 {\pm} 2.69$	$80.98 {\pm} 2.25$	$84.31 {\pm} 2.77$	$88.59 {\pm} 2.35$	
	30	$74.82{\pm}17.16$	78.00 ± 2.19	86.23 ± 2.71	87.96 ± 1.94	86.41 ± 2.55	88.89 ± 2.00	$91.55{\pm}1.76$	
	40	81.02 ± 2.39	80.56 ± 2.42	$89.96 {\pm} 1.69$	$91.04{\pm}1.87$	89.98 ± 1.77	92.35 ± 1.64	$93.35{\pm}1.89$	
	50	$83.30 {\pm} 2.28$	82.03 ± 2.06	91.18 ± 1.47	92.55 ± 1.42	91.53 ± 1.49	$93.50{\pm}1.47$	$94.40{\pm}1.54$	
	60	84.75 ± 2.37	83.75 ± 2.94	93.06 ± 1.89	93.78 ± 1.65	$93.28 {\pm} 1.69$	94.22 ± 1.61	$94.69{\pm}1.92$	

表 2 各算法在 YaleB 库上的分类准确率和标准差(%)

	算法						
标金件平(%)	KNN	LRR	LDA	NNLRS	LRRLC	SCLRR	SLR-WSC
10	64.78 ± 1.71	86.43 ± 1.56	87.57 ± 1.47	92.64 ± 1.02	87.17 ± 1.41	88.90 ± 1.21	$93.50{\pm}0.94$
20	70.45 ± 1.54	91.76 ± 1.37	93.01 ± 1.39	95.00 ± 0.79	92.65 ± 1.31	93.21 ± 1.31	$95.58{\pm}0.59$
30	$73.47{\pm}1.31$	93.13 ± 0.98	$94.69{\pm}0.79$	96.02 ± 0.61	94.53 ± 0.72	94.98 ± 0.72	$96.49{\pm}0.45$
40	$75.61{\pm}1.59$	94.56 ± 0.88	96.25 ± 0.92	96.99 ± 0.61	96.13 ± 0.78	96.43 ± 0.67	$97.26{\pm}0.58$
50	77.01 ± 1.71	95.14 ± 1.17	96.85 ± 0.79	97.28 ± 0.59	97.09 ± 0.57	97.41 ± 0.62	$97.73{\pm}0.49$
60	78.78 ± 1.61	$95.39{\pm}0.83$	$97.50 {\pm} 0.59$	$97.61 {\pm} 0.70$	$97.60{\pm}0.67$	$97.60{\pm}0.67$	$97.95{\pm}0.66$

表 3 各算法在 USPS 库上的分类准确率和标准差(%)

	算法							
标签杆本(%)	KNN	LRR	LDA	NNLRS	LRRLC	SCLRR	SLR-WSC	
10	$92.23 {\pm} 0.69$	$76.93 {\pm} 2.01$	$75.73 {\pm} 1.95$	89.29 ± 1.28	86.88 ± 1.52	85.87 ± 1.42	$92.99{\pm}1.03$	
20	$93.94{\pm}0.51$	84.39 ± 1.09	$83.46 {\pm} 1.29$	$92.61{\pm}0.62$	90.11 ± 1.04	$89.50{\pm}0.98$	$94.04{\pm}0.74$	
30	$94.00{\pm}0.51$	86.77 ± 1.07	$86.05 {\pm} 0.99$	$93.78{\pm}0.75$	$91.84{\pm}0.88$	$91.41{\pm}0.79$	$94.69{\pm}0.69$	
40	$94.29 {\pm} 0.75$	88.48 ± 1.42	88.15 ± 1.51	$94.38 {\pm} 0.66$	92.74 ± 1.05	$92.50{\pm}0.93$	$94.81{\pm}0.91$	
50	$94.20 {\pm} 0.73$	88.98 ± 1.19	88.78 ± 1.25	$94.83 {\pm} 0.89$	$92.91{\pm}1.26$	92.73 ± 1.26	$95.43{\pm}0.96$	
60	94.23 ± 1.19	89.25 ± 1.37	89.14 ± 1.50	94.74 ± 1.27	92.76 ± 1.59	92.85 ± 1.47	$95.73{\pm}1.03$	

(3)NNLRS, LRRLC 和 SCLRR 算法在传统的 LRR 算法中加入了稀疏约束,提高了算法性能,说 明了捕获数据局部线性结构的重要性。在 ORL 库 上,相比于其他两个算法,SCLRR 算法分类准确率 更高,而在 Extended Yale B 库和 USPS 库上, NNLRS 算法性能更佳。所以,虽然 LRRLC 和 SCLRR 算法对稀疏正则项加入了不同的权重约束, 但是在不同的数据库上,分类准确率不一定都会提 高。而 SLR-WSC 算法因为加入了更加有信息的权 重约束,在不同数据库上都获得了更高的准确率, 说明本文的算法对不同的数据库有一定的鲁棒性。

(4)随着标签样本数量的增多,各算法分类准确 率也增高。当给定较多的标签样本时,样本的类别 信息更加丰富,各算法表现得都比较好。当给定较 少的标签样本时,分类难度增大,但是 SLR-WSC 算法仍然可以获得较高的分类准确率。例如,当给 定 10%的标签样本时,在 ORL 库上,SLR-WSC 算 法的准确率达到 82.94%,比其他算法高出 7.01%以 上。

4.4 参数选择

SLR-WSC 算法包含两个参数,其中 α 用于平衡稀疏项, λ 用于平衡噪声项,本小节,分析参数的选择对 SLR-WSC 算法性能的影响。我们分别在

3 个数据库上进行 20 次实验,每次随机选取不同数 量的标签样本,取实验结果的平均值,图 2 表明了 当 α 变化时对分类准确率的影响,图 3 表明了当 λ 变 化时对分类准确率的影响。由图 2,图 3 可以观察 到,参数 α 在 0.01~1.00 范围变化时,SLR-WSC 算 法比较稳定,分类准确率较高,在本文实验中,设 置 $\alpha = 0.30$;参数 λ 在两个人脸数据库上的最优值 为 10,虽然在手写体数据库上的最优值为 1,但是 当 λ 在 0.5~10 范围变化时,分类准确率变化不大, 所以在本文实验中,我们设置 $\lambda = 10$ 。

4.5 算法时间

本小节比较 SLR-WSC 算法与基于非负低秩稀 疏图的 NNLRS, LRRLC 和 SCLRR 算法在 Extended Yale B 库和 USPS 库上的运行时间。我们 选取 30%的标签样本进行实验,图 4 显示了实验结 果。我们观察到 SLR-WSC 算法的运行时间低于 NNLRS 算法,却高于 LRRLC 和 SCLRR 算法,但 是综合运行时间和分类准确率来看, SLR-WSC 算 法具有一定优势。

5 结束语

为了更好地描述数据结构,本文提出一种融合 平滑低秩表示和加权稀疏约束(SLR-WSC)的半监



图 3 参数 λ 对分类准确率的影响



图 4 几种算法在 YaleB 库和 USPS 库上的运行时间

督学习改进算法。不同于传统的 NNLRS 算法, SLR-WSC 算法使用对数行列式函数代替核范数平 滑地估计秩函数,准确地捕获了数据的全局子空间 结构;同时利用形状交互信息和有标签样本的类别 信息,构造新颖的加权稀疏约束正则项,有效地捕 获了数据的局部线性结构。然后我们采用 LADMAP 求解最优化问题并重构数据的图结构,最后使用基 于 LGC 的半监督分类框架进行分类。在 3 个数据库 上的实验结果表明,本文提出的 SLR-WSC 算法更 加有效。但是,SLR-WSC 算法的运行时间较长, 我们将进一步研究如何在保证分类准确率的情况 下,降低算法迭代次数,提高算法效率。

参考文献

- 刘建伟,刘媛,罗雄麟.半监督学习方法[J]. 计算机学报, 2015, 38(8): 1592–1617. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01592.
 LIU Jianwei, LIU Yuan, and LUO Xionglin. Semi-supervised learning methods[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1592–1617. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01592.
- ZHU X. Semi-supervised learning literature survey[R]. Madison: University of Wisconsin, 2006.
- [3] LIU G C, LIN Z C, YAN S C, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 171–184. doi: 10.1109/TPAMI.2012.88.
- [4] ZHUANG L S, GAO H Y, LIN Z C, et al. Non-negative low rank and sparse graph for semi-supervised learning[C]. Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Providence, USA, 2012: 2328–2335. doi: 10.1109/CVPR.2012.6247944.
- [5] ZHENG Y G, ZHANG X G, YANG S Y, et al. Low-rank representation with local constraint for graph construction[J]. *Neurocomputing*, 2013, 122: 398–405. doi: 10.1016/j.neucom. 2013.06.013.
- [6] TANG K W, LIU R S, SU Z X, et al. Structure-constrained low-rank representation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2014, 25(12): 2167–2179. doi: 10.1109/TNNLS.2014.2306063.
- [7] PENG Y, LU B L, and WANG S H. Enhanced low-rank representation via sparse manifold adaption for

semi-supervised learning[J]. Neural Networks, 2015, 65: 1–17. doi: 10.1016/j.neunet.2015.01.001.

- [8] MOHAN K and FAZEL M. Iterative reweighted algorithms for matrix rank minimization[J]. *The Journal of Machine Learning Research*, 2012, 13(1): 3441-3473.
- [9] 王斯琪, 冯象初, 张瑞, 等. 基于最大范数的低秩稀疏分解模型[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(11): 2601-2607. doi: 10. 11999/JEIT150468.
 WANG Siqi, FENG Xiangchu, ZHANG Rui, et al. Low-rank sparse decomposition model based on max-norm[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2015, 37(11):
- [10] FAZEL M, HINDI H, and BOYD S. Log-det heuristic for matrix rank minimization with applications to hankel and euclidean distance matrices[C]. Proceedings of the American Control Conference, Denver, USA, 2003, 3: 2156–2162. doi: 10.1109/ACC.2003.1243393.

2601-2607. doi: 10.11999/JEIT150468.

- [11] KANG Z, PENG C, and CHENG Q. Robust subspace clustering via smoothed rank approximation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(11): 2088–2092. doi: 10.1109/ LSP.2015.2460737.
- [12] LIN Z C, LIU R S, and SU Z X. Linearized alternating direction method with adaptive penalty for low-rank representation[C]. Proceedings of the Advances in Neural Information Processing Systems, Granada, Spain, 2011: 612–620.
- [13] ZHOU D Y, BOUSQUET O, LAL T N, et al. Learning with local and global consistency[C]. Proceedings of the Advances in Neural Information Processing Systems, Cambridge, UK, 2004: 321–328.
- [14] LI Y F and ZHOU Z H. Improving semi-supervised support vector machines through unlabeled instances selection[OL]. http://arxiv.org/abs/1005.1545, 2010.
- [15] LIU B, JING L P, YU J, et al. Robust graph learning via constrained elastic-net regularization[J]. Neurocomputing, 2016, 171: 299–312. doi: 10.1016/j.neucom.2015.06.059.
- [16] KANG Z, PENG C, CHENG J, et al. Logdet rank minimization with application to subspace clustering[J]. Computational Intelligence and Neuroscience, 2015, 824289, doi: 10.1155/2015/824289.
- [17] LIN Z C, CHEN M M, and MA Y. The augmented lagrange multiplier method for exact recovery of corrupted low-rank matrices [R]. UIUC Technical Report UILU-ENG-09-2215, 2009.
- [18] LIU G C, LIN Z C, and YU Y. Robust subspace segmentation by low-rank representation[C]. Proceedings of the International Conference on Machine Learning, Haifa, Israel, 2010: 663–670.
- [19] ELHAMIFAR E and VIDAL R. Sparse subspace clustering: algorithm, theory, and applications [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 34(11): 2765–2781. doi: 10.1109/TPAMI.2013.57.
- 张 涛: 男,1987年生,博士生,研究方向为图像处理、模式识别.
- 唐振民: 男,1961年生,教授,博士生导师,研究方向为图像处 理、智能机器人与智能检测.