

## 无线传感器网络二阶一致性时间同步

黄友锐<sup>\*①</sup> 陈珍萍<sup>②</sup> 李德权<sup>③</sup> 唐超礼<sup>①</sup> 曲立国<sup>④</sup>

<sup>①</sup>(安徽理工大学电气与信息工程学院 淮南 232001)

<sup>②</sup>(苏州科技大学电子与信息工程学院 苏州 215009)

<sup>③</sup>(安徽理工大学理学院 淮南 232001)

<sup>④</sup>(安徽师范大学物理与电子信息学院 芜湖 241000)

**摘要:** 考虑到在无线传感器网络中,新节点的加入或老节点的死亡均会导致拓扑呈动态变化,该文研究一种完全分布式二阶一致性时间同步(Second-Order Consensus Time Synchronization, SOCTS)算法。将节点的时钟特性建模成二阶状态方程,按照伪同步周期广播节点的本地虚拟时间,根据邻居节点的本地虚拟时间的不一致来构造同步控制输入;通过坐标变换将网络的一致性时间同步问题转化为变换系统的稳定性问题,理论分析了SOCTS算法的收敛性和收敛条件,并研究了影响SOCTS算法收敛速度的因素。通过数值仿真实验验证了所提方法的有效性。

**关键词:** 无线传感器网络; 时间同步; 一致性; 收敛性

中图分类号: TP393

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)01-0051-07

DOI: 10.11999/JEIT160382

## Second-order Consensus Time Synchronization for Wireless Sensor Networks

HUANG Yourui<sup>①</sup> CHEN Zhenping<sup>②</sup> LI Dequan<sup>③</sup> TANG Chaoli<sup>①</sup> QU Ligu<sup>④</sup>

<sup>①</sup>(School of Electrical and Information Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China)

<sup>②</sup>(School of Electronic and Information Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

<sup>③</sup>(School of Science, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China)

<sup>④</sup>(College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

**Abstract:** Since in wireless sensor networks, the joint of new nodes or the death of old nodes lead to a dynamic topology, this paper studies one completely distributed Second-Order Consensus Time Synchronization (SOCTS) algorithm. The clock feature of each node is modeled into a second order state equation, and the local virtual time is broadcasted according to the pseudo synchronous cycle. Moreover, the synchronization control input is constructed according to the disagreement on local virtual time among neighboring nodes. By virtue of the matrix transformation, the network time synchronization issue is turned into the stability issue of some transformed system, and the convergence and convergence condition for the SOCTS algorithm are analyzed theoretically. Moreover, the factors that influence the convergence rate of the SOCTS algorithm are investigated. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by numerical simulations.

**Key words:** Wireless sensor networks; Time synchronization; Consensus; Convergence

### 1 引言

无线传感器网络(Wireless Sensor Networks, WSNs)目的在于协作地感知、采集和处理网络覆盖区域里被监测对象的信息<sup>[1]</sup>,时间同步是无线传感器

网络的一个支撑技术<sup>[2,3]</sup>,数据融合、移动物体的速度测量<sup>[4]</sup>、时分多址接入(Time-Division Multiple Access, TDMA)技术等的应用,都要求无线传感器网络的节点拥有一致的时间。

一致性同步算法借助于网络节点间的局部状态信息交流实现所有节点的状态趋于相同<sup>[5-7]</sup>。文献<sup>[8]</sup>提出了级联一致性算法,用于同步时钟的频率和相位偏移,按照平均时钟同步(Average Time-Sync, ATS)方法将节点时钟同步到网络时钟的平均值。文献<sup>[9]</sup>将二阶线性一致性算法应用到无线传感器网络的时间同步中,根据邻居节点与自身本地时间的差

收稿日期: 2016-04-19; 改回日期: 2016-09-09; 网络出版: 2016-11-04

\*通信作者: 黄友锐 hyr628@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(51274011, 51404008, 61472003), 安徽省科技攻关计划(1501021027)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (51274011, 51404008, 61472003), The Science and Technology Research Plan of Anhui Province (1501021027)

值,对本地时间和时钟速率补偿量进行调整,最终实现网络的一致性同步。文献[10]研究了在无传输延迟情形下的最大时间同步算法和考虑传输存在延迟时的加权最大时间同步算法,实现各个节点的逻辑时钟同步到网络的最大逻辑时钟。文献[11]主要研究了最大时间同步 MTS、平均时间同步 ATS 算法的同步精度与通信噪声、传输延迟及网络拓扑间的关系。文献[12]通过为一致性算法建立统一的结构模型,得到带有随机延时网络一致性算法的收敛条件和均方收敛条件。

在分布式 WSNs 中,只有满足特定条件的网络才能实现一致性时间同步,且网络拓扑结构影响算法的收敛速度<sup>[13,14]</sup>。本文在文献[9]的基础上,提出二阶一致性时间同步算法 SOCTS(Second-Order Consensus Time Synchronization),主要做到以下几点:(1)建立感知节点时钟特性的二阶状态方程,将 WSNs 时间同步问题转换为二阶一致性问题,并给出了同步输入的完全分布式设计方法;(2)通过矩阵变换和劳斯-赫尔维茨稳定判据分析出一致性时间同步算法收敛的条件;(3)理论分析出算法收敛因子与网络拓扑及控制增益、同步周期间的关系,给出了提高 SOCTS 算法收敛速度的方法。

本文内容组织如下:第2节给出了本文用到的数学符号和图论的相关预备知识;第3节给出了节点时钟模型、二阶一致性时间同步算法及同步输入的设计;第4节给出了 SOCTS 算法的收敛性和收敛因子分析;第5节对 SOCTS 算法进行了数值仿真及分析,最后总结全文。

## 2 数学符号和图论基础

### 2.1 数学符号

分别记  $R$ ,  $R^+$  为实数和正实数,记  $Z^+$  为正整数,分别记  $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$  和  $\mathbf{0}_n = [0, 0, \dots, 0]^T$  为有  $n$  个 1 元素和 0 元素的单位列向量,  $\mathbf{I}_n$  为  $n$  阶单位矩阵,  $\mathbf{1}_n^T$  表示  $\mathbf{1}_n$  的转置。对向量  $\mathbf{e} \in R^n$ ,  $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}$  为  $\mathbf{e}$  的欧几里德范数,  $|\mathbf{e}|$  表示向量  $\mathbf{e}$  的元素个数;对标量  $e \in R$ ,  $|e|$  表示取其绝对值。对于  $N$  阶方阵  $\mathbf{A}$ , 定义  $\lambda_i(\mathbf{A})$  为其第  $i$  大特征值  $i = (1, 2, \dots, N)$ ,  $\rho(\mathbf{A})$  为其谱半径。记矩阵  $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{1}\mathbf{1}^T/N$ ,  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{\Pi}_1$ , 其中  $\otimes$  表示 Krocnecker 内积。

### 2.2 图论相关知识

用图  $G=(V, E, W)$  来表征 WSNs 中节点间的通信关系,其中  $V = \{1, 2, \dots, N\}$  为节点集合,  $N$  表示节点数目;边集  $E \subseteq V \times V$  表示  $N$  个节点间通信关系,若节点  $i$  可接收到节点  $j$  的信息,则  $(i, j) \in E$ , 反之  $(i, j) \notin E$ , 且假定网络中不存在自连接,即

$(i, i) \notin E (i \in V)$ ;  $W$  为网络  $G$  的邻接权重矩阵,其第  $i, j$  个元素  $W_{ij}$  满足:若  $(i, j) \in E$  时有  $W_{ij} > 0$ , 若  $(i, j) \notin E$  时  $W_{ij} = 0$ 。若  $(i, j) \in E$ , 则节点  $j$  为节点  $i$  的输入邻居节点。  $N_i = \{j | (i, j) \in E, i \neq j\}$  表示节点  $i$  的输入邻居节点集,  $d_i = |N_i|$  表示节点  $i$  的入度。记  $d_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N W_{ij}$ ,  $D^{\text{in}} = \text{diag}\{d_i^{\text{in}}\}$ , 则网络  $G$  的拉普拉斯矩阵为  $L = D^{\text{in}} - W$  且满足  $L\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$ , 其中  $W = (W_{ij})$ 。

## 3 二阶一致性时间同步

### 3.1 节点时钟模型

在分布式无线传感器网络  $G$  中,节点  $i$  对时间的认知均来自于维护各自的本地时钟。网络中每个节点均配置有一定精度的晶体振荡器,晶体振荡器的标称周期记为  $\bar{\Delta}_i$ , 实际振荡周期为  $\Delta_i$  且为一未知值。节点通过  $\bar{\Delta}_i$  和  $C_i(t)$  来获取本地时间信息  $\tau_i(t)$ , 满足:

$$\tau_i(t) = C_i(t)\bar{\Delta}_i + \tau_i(t_0^i) \quad (1)$$

其中,  $t$  为标准时间;  $C_i(t) = \lfloor (t - t_0^i) / \bar{\Delta}_i \rfloor$  为节点  $i$  在  $t - t_0^i$  期间的计数值,函数  $\lfloor m \rfloor$  表示对  $m$  下取整;  $t_0^i$  为节点  $i$  的初始上电时刻。

在实际应用中,出于对降低成本的考虑,网络中的节点普遍使用频率准确度低和稳定度差的廉价晶体振荡器<sup>[15]</sup>,其振荡频率  $\bar{\Delta}_i$  会随着环境温度、压力和供电电压的变化而产生波动,导致实际振荡周期  $\Delta_i$  会偏离标称值  $\bar{\Delta}_i$ 。将式(1)写成式(2)所示线性表达式:

$$\tau_i(t) = \bar{\omega}_i(t)t + \bar{\varphi}_i(t) \quad (2)$$

其中,  $\bar{\omega}_i(t)$  和  $\bar{\varphi}_i(t)$  分别为节点  $i$  在  $t$  时刻的时钟速率和时钟相位。

考虑到网络节点的其他应用,如定时器中断、延时等,需要  $\tau_i(t)$  的连续计数,为实现网络  $G$  的时间同步,为每个节点设计一个虚拟时钟  $L_i(t)$ , 该虚拟时间  $L_i(t)$  与本地时间  $\tau_i(t)$  呈线性关系,具体为

$$L_i(t) = \alpha_i(t)\tau_i(t) + \beta_i(t) = \omega_i(t)t + \varphi_i(t) \quad (3)$$

其中  $\omega_i(t)$  和  $\varphi_i(t)$  分别为虚拟时钟  $L_i(t)$  相对于真实时间  $t$  的速率和相位,通过改变  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$  或  $L_i(t)$  可以调整  $\omega_i(t)$  和  $L_i(t)$ , 从而达到矫正虚拟时钟的目的。

### 3.2 时间同步及同步控制输入

为将状态一致性方法应用到时间同步中,分别记  $L_i(t)$  和  $\alpha_i(t)$  为节点  $i$  的两个状态  $x_{1i}(t)$  和  $x_{2i}(t)$ , 可得到描述节点  $i$  时钟特性的二阶状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_{1i}(t) = \bar{\omega}_i x_{2i}(t) + \bar{\omega}_i u_{1i}(t) \\ \dot{x}_{2i}(t) = \bar{\omega}_i u_{2i}(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $u_{1i}(t)$  和  $u_{2i}(t)$  为节点  $i$  待设计的同步控制输入。记  $\mathbf{x}_i(t) = [x_{1i}(t), x_{2i}(t)]^T$ ,  $\mathbf{u}_i(t) = [u_{1i}(t), u_{2i}(t)]^T$ , 可将式(4)写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) + \begin{bmatrix} \bar{\omega}_i & 0 \\ 0 & \bar{\omega}_i \end{bmatrix} \mathbf{u}_i(t) \\ &\triangleq \mathbf{A}_{1i} \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_{1i} \mathbf{u}_i(t) \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{A}_{1i}$  和  $\mathbf{B}_{1i}$  分别为节点  $i$  的系统矩阵和输入矩阵, 其中  $\bar{\omega}_i$  为一未知数。

记全局变量  $T$  为网络  $G$  的同步周期, 当节点  $i$  ( $i \in \mathbf{V}$ ) 的本地时间  $\tau_i(t) = \bar{\omega}_i t + \bar{\varphi}_i = k_i T$  ( $k_i \in \mathbf{Z}^+$ ) 时, 感知节点  $i$  按式(5)进行状态的更新, 则节点  $i$  的实际同步周期  $T_i$  与网络同步周期  $T$  间满足:  $\bar{\omega}_i T_i = T$ 。如此, 可得式(5)的离散形式:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{G}(T_i) \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{H}(T_i) \mathbf{u}_i(k) \quad (6)$$

其中,

$$\mathbf{G}(T_i) = \begin{bmatrix} 1 & T_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(T_i) = \begin{bmatrix} T_i & 0.5T_i^2 \\ 0 & T_i \end{bmatrix}$$

节点  $i$  以伪同步周期  $T_i$  按照式(6)进行状态的更新, 更新式(6)中不包含任何未知数。为降低网络中广播的同步信息包长度, 根据邻居节点间虚拟时间不一致来构造节点的同步控制输入, 具体为

$$\mathbf{u}_i(k) = - \begin{bmatrix} \mu \\ \mu^2 \end{bmatrix} \sum_{j=1}^N \mathbf{W}_{ij} ((x_{1i}(k) - x_{1j}(k))) \quad (7)$$

其中,  $\mu$  为待设计的同步控制增益、 $\mathbf{W}_{ij}$  为节点  $i$  与  $j$  间的邻接权重。为此, 同步信息包  $P_s$  中需要包含的内容为: 发送节点的 ID 号、发送节点的本地虚拟时间  $x_{1i}(k)$ 。

对具有  $N$  个节点的网络  $G$ , 记系统状态  $\mathbf{x}_1(k) = [x_{11}(k), \dots, x_{1N}(k)]^T$ ,  $\mathbf{x}_2(k) = [x_{21}(k), \dots, x_{2N}(k)]^T$ ,  $\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}_1^T(k), \mathbf{x}_2^T(k)]^T$ , 用以描述网络  $G$  时钟特性的状态方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N - (\mu T + 0.5\mu^2 T^2) \mathbf{L} & T \mathbf{I}_N \\ -\mu^2 T \mathbf{L} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ &\triangleq \mathbf{A} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (8)$$

### 3.3 网络邻接权重分布式设计

本文根据节点与输入邻居节点的入度信息来确定节点间的加权邻接权重。假设网络中所有节点均拥有一个唯一的 ID 号, 网络邻接权重的分布式设计过程为

(1) 网络中所有节点  $i$  ( $i \in \mathbf{V}$ ) 按照最大发射功率广播一次拓扑生成信息包  $P_T$ , 包含有发射节点的 ID 号;

(2) 节点  $i$  ( $i \in \mathbf{V}$ ) 接收到邻居节点  $j$  ( $j \in \mathbf{N}_i$ ) 的信息包  $P_T$ , 根据  $P_T$  中包含的 ID 号来判断该包是否来

自新的邻居节点, 若是则  $d_i$  值加 1, 否则丢弃该包;

(3) 若节点  $i$  超过一定时间后未接收到新的信息包  $P_T$ , 则广播权重计算信息包  $P_W$ , 包含有节点  $i$  的 ID 号和  $d_i$ ;

(4) 节点  $i$  接收邻居节点  $j$  广播的信息包  $P_W$ , 从  $P_W$  获得节点  $j$  的 ID 号和  $d_j$ , 按照:

$$\mathbf{W}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\max\{d_i, d_j\}}, & (i, j) \in \mathbf{E}, \text{ 且 } i \neq j \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

来计算与邻居节点  $j$  的权重值  $\mathbf{W}_{ij}$ 。

**注解 1**<sup>[16]</sup> 对一无向连通网络  $G$ , 若节点  $i$  与  $j$  间邻接权重按式(9)来设计, 则网络  $G$  的 Laplac 矩阵为一对称矩阵且满足  $\mathbf{L} \mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N^T$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{0}_N$ , 它的  $N$  个特征值满足:

$$0 = \lambda_1(\mathbf{L}) < \lambda_2(\mathbf{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathbf{L}) \leq 2$$

其中  $\lambda_2(\mathbf{L})$  也被称为网络的代数连通度。

## 4 算法收敛性和收敛因子分析

**定义 1** 对于一个具有  $N$  个节点的网络  $G$ , 若能通过控制输入  $u_{1i}(k)$  和  $u_{2i}(k)$  ( $i \in \mathbf{V}$ ) 的设计, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(k) - \bar{\mathbf{x}}_1(k)\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_2(k) - \bar{\mathbf{x}}_2(k)\| = 0$$

成立, 则称实现了网络  $G$  的二阶平均一致性时间同步。其中, 向量  $\bar{\mathbf{x}}_1(k) = \mathbf{I}_1 \mathbf{x}_1(k)$  和  $\bar{\mathbf{x}}_2(k) = \mathbf{I}_2 \mathbf{x}_2(k)$  为网络状态的平均值。

**定义 2**<sup>[5,16,17]</sup> 假定一  $N$  维向量序列  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k)$  收敛到某一极限  $\bar{\mathbf{x}}$ , 若存在一实数  $r_a \in (0, 1)$ , 使得

$$r_a = \sup_{\mathbf{x}(0) \neq \bar{\mathbf{x}}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\|\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}\|} \right)^{1/k}$$

则称该向量序列线性收敛到  $\bar{\mathbf{x}}$  的收敛因子为  $r_a$ ; 相应地误差  $\|\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}\|$  收敛到  $10^{-\zeta}$  的收敛时间定义为

$$T_a = \frac{-\zeta}{\lg(r_a)}$$

用以表示误差  $\|\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}\|$  衰减到  $10^{-\zeta}$  所需要的迭代次数。

### 4.1 收敛性分析

**定理 1** 对于任意给定的无向连通网络  $G$ , 若式(7)中的控制增益  $\mu$  和网络同步周期  $T$  满足:

$$0 < \mu T < \min \left\{ 2, \min_{2 \leq i \leq N} \frac{2}{\lambda_i(\mathbf{L})} \right\} \quad (10)$$

则网络式(8)能渐近实现其二阶平均一致性时间同步。

**证明** 记网络平均一致性收敛状态为  $\bar{\mathbf{x}}(k)$  且满足  $\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{I} \mathbf{x}(k)$ , 对状态  $\mathbf{x}(k)$  作如下坐标变换:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{I}) \mathbf{x}(k)$$

得到网络状态与收敛状态间的状态不一致方程为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{\Pi})\mathbf{x}(k+1) \\ &= (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{\Pi})\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Pi}\mathbf{x}(k))\end{aligned}\quad (11)$$

由于  $\mathbf{L}\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N^T$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{0}_N$ , 有  $\mathbf{A}\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}\mathbf{\Pi} = \mathbf{0}_{2N \times 2N}$ , 故而式(11)可以写成:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}}(k)\quad (12)$$

至此, 已将网络式(8)的一致性状态时间同步问题转化为网络状态不一致系统式(12)的稳定性问题。

由离散时间系统状态稳定性定义及判别方法知, 式(12)中若系统矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  的所有特征值均位于单位圆内, 即  $\rho(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}) < 1$ , 则系统式(12)稳定。

下面接着来分析使得  $\rho(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}) < 1$  成立时  $\mu$  和  $T$  应满足的条件。为书写简便起见, 记  $\mu T$  为  $\chi$ 。

考虑到矩阵  $\mathbf{L}$  满足  $\mathbf{L}\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N^T$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{0}_N$ , 则有

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1 - (\chi + 0.5\chi^2)\mathbf{\Pi}_1\mathbf{L} & T\mathbf{\Pi}_1 \\ -\mu^2 T\mathbf{\Pi}_1\mathbf{L} & \mathbf{\Pi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & T\mathbf{\Pi}_1 \\ \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{\Pi}_1 \end{bmatrix}$$

如此  $\mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  和  $\mathbf{\Pi}$  特征值相等, 即对所有  $i=1, 2, \dots, 2N$ , 都有  $\lambda_i(\mathbf{\Pi}\mathbf{A}) = \lambda_i(\mathbf{\Pi})$ 。而通过计算可知  $\mathbf{\Pi}$  的特征值满足  $\lambda_{1,2}(\mathbf{\Pi}) = 1$  和  $\lambda_i(\mathbf{\Pi}) = 0 (i > 2)$ 。矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A})$  为特征方程:

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{A} + \mathbf{\Pi}\mathbf{A}) &= \det((\lambda - 1)^2\mathbf{I}_N + (\lambda - 1)(\chi + 0.5\chi^2)\mathbf{L} \\ &\quad + 2(\lambda - 1)\mathbf{\Pi}_1 + \chi^2\mathbf{L} + \mathbf{\Pi}_1) = 0\end{aligned}$$

的根。分别记矩阵  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{\Pi}_1$  的第  $i$  个特征值为  $\lambda_i(\mathbf{L})$  和  $\lambda_i(\mathbf{\Pi}_1)$ , 则方程  $\det(\lambda\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{A} + \mathbf{\Pi}\mathbf{A}) = 0$  的根满足:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^N ((\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)(\chi + 0.5\chi^2)\lambda_i(\mathbf{L}) \\ + \chi^2\lambda_i(\mathbf{L}) + (2\lambda - 1)\lambda_i(\mathbf{\Pi}_1)) = 0\end{aligned}$$

由于矩阵  $\mathbf{\Pi}_1$  仅有一个特征值为 1, 其余特征值均为 0, 而且有  $(1 \times \mathbf{I}_N - \mathbf{\Pi}_1)\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$ , 故  $\mathbf{\Pi}_1$  对应于特征值 1 的特征向量为  $\mathbf{1}_N$ ; 同时矩阵  $\mathbf{L}$  满足  $\mathbf{L}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$ , 所以  $\mathbf{1}_N$  为矩阵  $\mathbf{L}$  零值特征值对应的特征向量。因此, 矩阵  $\mathbf{\Pi}_1$  的特征值 1 对应于矩阵  $\mathbf{L}$  的特征值 0, 此时  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  的特征值为 0, 记为  $\lambda_{1,2}(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A})$ 。而  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  的其余  $2N - 2$  个特征值满足:

$$\prod_{i=2}^N ((\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)(\chi + 0.5\chi^2)\lambda_i(\mathbf{L}) + \chi^2\lambda_i(\mathbf{L})) = 0$$

对上述方程做双线性变换  $s = (\lambda + 1)/(\lambda - 1)$  [18], 将  $Z$  平面的稳定区域(单位圆内)变换到  $S$  平面的稳定区域( $S$  左半平面), 整理得

$$\prod_{i=2}^N (\chi^2\lambda_i(\mathbf{L})s^2 + (2\chi - \chi^2)\lambda_i(\mathbf{L})s + 4 - 2\chi\lambda_i(\mathbf{L})) = 0$$

应用劳斯-赫尔维茨稳定判据, 可得到使得其所有的根

都具有负实部的条件为

$$\chi^2\lambda_i(\mathbf{L}) > 0, (2\chi - \chi^2)\lambda_i(\mathbf{L}) > 0, 4 - 2\chi\lambda_i(\mathbf{L}) > 0$$

对上述条件进行整理可得如式(10)所示条件。证毕

**注解 2** 若网络  $G$  的邻接权重矩阵按照式(9)来设计, 则式(10)可进一步表示为

$$0 < \mu T < 1\quad (13)$$

且  $\mu, T$  的选择与网络拓扑无关。

#### 4.2 收敛因子分析

**定理 2** 对于任意给定的连通无向网络  $G$ , 在网络邻接权重按照式(9)构造时, 若控制增益  $\mu$  和网络同步周期  $T$  满足式(10), 则网络式(8)能实现其渐进一致性时间同步, 其收敛因子  $r_a$  由  $\chi = \mu T$  和网络代数连通度  $\lambda_2(\mathbf{L})$  或  $\lambda_N(\mathbf{L})$  决定; 若控制增益  $\mu$  和网络同步周期  $T$  进一步满足:

$$0 < \chi < 2\sqrt{2} - 2\quad (14)$$

则网络式(8)定能实现平均一致性时间同步, 且收敛因子  $r_a$  由  $\mu T$  和  $\lambda_2(\mathbf{L})$  决定, 一个小的  $|\mu T - 1|$ 、一个大的  $\lambda_2(\mathbf{L})$  都会产生一个小的收敛因子  $r_a$ 。

**证明** 由状态不一致系统状态方程式(12)和收敛因子  $r_a$  的定义式可知, 二阶一致性时间同步算法的收敛因子即为系统矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  的谱半径  $\rho(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A})$ 。

首先来证明定理 2 的第 1 个结论。证明分成两个部分, 确定矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  特征根的形式, 以及确定  $r_a$  的表达式形式。

在矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  的特征方程中, 矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  对应于  $\lambda_i(\mathbf{L})$  的特征根的形式主要由  $\Delta_i = (\chi + 0.5\chi^2)\lambda_i^2(\mathbf{L}) - 4\chi^2\lambda_i(\mathbf{L})$  的值决定, 其中  $i \in \mathbf{V}$ ,  $i > 1$ 。当  $\Delta_i \geq 0$  时, 矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  的特征根为实数根; 反之, 其特征根为共轭复数根。令  $\Delta_i = 0$ , 可计算得  $\lambda_{mg}(\mathbf{L}) = 4/(1 + 0.5\chi)^2$ 。若选择  $\chi$  使得  $\lambda_N(\mathbf{L}) < \lambda_{mg}(\mathbf{L})$ , 则在邻接权重按照式(9)构造时, 对于所有  $\lambda_i(\mathbf{L})$  均有  $\lambda_i(\mathbf{L}) < \lambda_{mg}(\mathbf{L})$ , 即  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  特征方程所有根均为复数根。由  $4/(1 + 0.5\chi)^2 > \lambda_N(\mathbf{L})$ , 可推导出为使  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  特征方程所有根均为复数根  $\mu$  和  $T$  应满足的条件为

$$0 < \chi < 4/\sqrt{\lambda_N(\mathbf{L})} - 2 < 2\sqrt{2} - 2$$

即为式(14)。反之若式(14)不满足时而式(13)满足时, 即  $\mu$  和  $T$  满足:

$$2\sqrt{2} - 2 \leq \mu T < 1\quad (15)$$

时, 网络式(8)能实现其渐进一致性时间同步, 但矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  特征方程有根为实数根。

**情况 1** 式(14)满足,  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A}$  特征方程所有的根均为共轭复数根,  $\lambda_{2i-1, 2i}(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi}\mathbf{A})$  为

$$\begin{aligned}1 + \left[ -(\chi + 0.5\chi^2)\lambda_i(\mathbf{L}) \right. \\ \left. \pm j\sqrt{4\chi^2\lambda_i(\mathbf{L}) - (\chi + 0.5\chi^2)^2\lambda_i^2(\mathbf{L})} \right] / 2\end{aligned}$$

其中,  $j$  为虚数算子。根的模值可计算得到

$$|\lambda_{2i-1,2i}(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi A})| = \frac{\sqrt{4 - (4\chi - 2\chi^2)\lambda_i(\mathbf{L})}}{2} \quad (16)$$

其取值随着  $\lambda_i(\mathbf{L})$  的增大而减小, 最大值发生在  $\lambda_2(\mathbf{L})$  处。因此收敛因子  $r_a$  取值为

$$r_a = \frac{\sqrt{4 - (4\chi - 2\chi^2)\lambda_2(\mathbf{L})}}{2} \quad (17)$$

其中,  $\lambda_2(\mathbf{L})$  为网络  $G$  的代数连通度。

**情况 2** 式(15)满足,  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi A}$  特征方程有根为实数根。当  $\lambda_i(\mathbf{L}) < \lambda_{mg}(\mathbf{L})$  时,  $\lambda_i(\mathbf{L})$  对应的  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi A}$  特征根为共轭复数根,  $|\lambda_{2i-1,2i}(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi A})|$  值随着  $\lambda_i(\mathbf{L})$  的增大而减小, 最大值发生在  $\lambda_2(\mathbf{L})$  处; 而当  $\lambda_{mg}(\mathbf{L}) \leq \lambda_i(\mathbf{L}) < 1$  时,  $\lambda_i(\mathbf{L})$  对应  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi A}$  特征根为实数根, 其模值可以写成

$$\left| 1 + \frac{-(\chi + 0.5\chi^2)\lambda_i(\mathbf{L}) \pm \sqrt{(\chi + 0.5\chi^2)^2 \lambda_i^2(\mathbf{L}) - 4\chi^2 \lambda_i(\mathbf{L})}}{2} \right|$$

由  $\frac{4}{(1 + 0.5\chi)^2} \leq \lambda_i(\mathbf{L}) \leq 2$ ,  $\max\{|\lambda_{2i-1,2i}(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi A})|\}$  为

$$\frac{\sqrt{(\chi + 0.5\chi^2)^2 \lambda_i^2(\mathbf{L}) - 4\chi^2 \lambda_i(\mathbf{L})} - (\chi + 0.5\chi^2)\lambda_i(\mathbf{L})}{2} + 1$$

其值随着  $\lambda_i(\mathbf{L})$  增加而增大。此时, 收敛因子  $r_a$  取  $2 + \frac{\sqrt{(\chi + 0.5\chi^2)^2 \lambda_i^2(\mathbf{L}) - 4\chi^2 \lambda_i(\mathbf{L})} - (\chi + 0.5\chi^2)\lambda_i(\mathbf{L})}{2}$

和  $\frac{\sqrt{4 - (4\chi - 2\chi^2)\lambda_2(\mathbf{L})}}{2}$  中的大者。

在式(14)满足时, 矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{\Pi A}$  谱半径为

$$\frac{\sqrt{4 - (4\chi - 2\chi^2)\lambda_2(\mathbf{L})}}{2}$$

而 SOCTS 算法渐近收敛的收敛因子为  $r_a = \rho(\mathbf{A} - \mathbf{\Pi A})$ , 故而收敛因子由  $\lambda_2(\mathbf{L})$  和  $\chi = \mu T$  决定。

最后来分析在式(14)满足时影响 SOCTS 算法收敛因子  $r_a$  取值大小的因素。从式(17)可以看出, 一个大的  $\lambda_2(\mathbf{L})$  会产生一个小的  $r_a$ 。为此, 为使得网络式(8)具有较快的收敛速度, 在设计网络拓扑时需要尽可能地提高  $\lambda_2(\mathbf{L})$ 。同样为分析  $\chi$  取值对  $r_a$  的影

响, 将  $r_a$  写成

$$\frac{\sqrt{4 + 2(\chi - 1)^2 \lambda_2(\mathbf{L}) - 2\lambda_2(\mathbf{L})}}{2}$$

则  $|\chi - 1|$  取值越小, 收敛因子  $r_a$  值越小, 网络式(8)的收敛速度越快、收敛时间越少。证毕

## 5 仿真结果与分析

为验证本文所提二阶一致性时间同步算法的有效性, 现进行算法的数值验证。将  $N = 30$  个节点随机布置在一个  $100 \times 100 \text{ m}^2$  的矩形区域内, 为每个节点随机生成一个唯一的 ID 号, 节点的通信半径设置为 30 m, 若两节点间空间距离小于 30 m, 则两节点互为邻居节点。根据算法运行 100 次的结果均值来绘制曲线和表格。每次运行时, 节点  $i$  ( $i \in \mathbf{V}$ ) 的初始速率  $\bar{\omega}_i(0)$  和相位  $\bar{\varphi}_i(0)$  分别在  $0.95 \sim 1.05$  和  $-1 \sim 1$  之间随机选择, 且初始化  $\alpha_i(0) = 1$  和  $\beta_i(0) = 0$ , 算法迭代 300 次。

### 5.1 SOCTS 算法有效性验证

取  $T = 5$ ,  $\mu = 0.08$ , 定义节点  $i$  的  $x_{1i}(k)$  和  $x_{2i}(k)$   $\bar{\omega}_i$  与网络均值  $\mathbf{\Pi}_1 \mathbf{x}_1(k)$  和  $\mathbf{\Pi}_1 \mathbf{\Omega} \mathbf{x}_2(k)$  间的偏差为  $e_{1i}(k)$  和  $e_{2i}(k)$ , 其中矩阵  $\mathbf{\Omega} = \text{diag}\{\bar{\omega}_i\}$ ; 网络  $G$  的虚拟时间和时钟速率误差为  $e_{x1}(k) = \|\mathbf{e}_1(k)\|/\sqrt{N}$  和  $e_{x2}(k) = \|\mathbf{e}_2(k)\|/\sqrt{N}$ , 其中  $\bar{\mathbf{e}}_1(k) = [e_{11}(k), \dots, e_{1N}(k)]^T$  和  $\bar{\mathbf{e}}_2(k) = [e_{21}(k), \dots, e_{2N}(k)]^T$ 。  $e_{1i}(k)$  和  $e_{2i}(k)$  ( $i \in \mathbf{V}$ ) 的迭代曲线见图 1(a)和图 1(b), 网络同步误差  $e_{x1}(k)$  和  $e_{x2}(k)$  迭代曲线见图 2。

从图 1 和图 2 可以看出, 本文所提 SOCTS 能实现网络  $G$  的时间同步, 节点的虚拟时间偏差  $e_{1i}(k)$  和时钟速率偏差  $e_{2i}(k)$  随着迭代次数的增加而逐渐趋于零, 也即节点状态趋向于网络均值; 网络虚拟时间误差  $e_{x1}(k)$  和时钟速率误差  $e_{x2}(k)$  呈单调递减态势, 在迭代 300 次后,  $e_{x1}(k)$  小于  $1 \times 10^{-4} \text{ s}$ ,  $e_{x2}(k)$  小于  $3 \times 10^{-6} \text{ s}$ , 能满足大部分 WSNs 应用的需求。

### 5.2 影响 SOCTS 算法收敛速度的因素

在  $[0.1, 0.7]$  范围内选择  $\chi$  值, 绘制得到不同  $\chi(\mu T)$  下的网络同步误差迭代曲线如图 3 所示; 不同通信半径  $R$  下的网络同步误差  $e_{x1}(k)$  和  $e_{x2}(k)$  迭代曲线图 4; 不同通信半径  $R$  及对应的网络代数连通度  $\lambda_2(\mathbf{L})$  取值如表 1 所示。

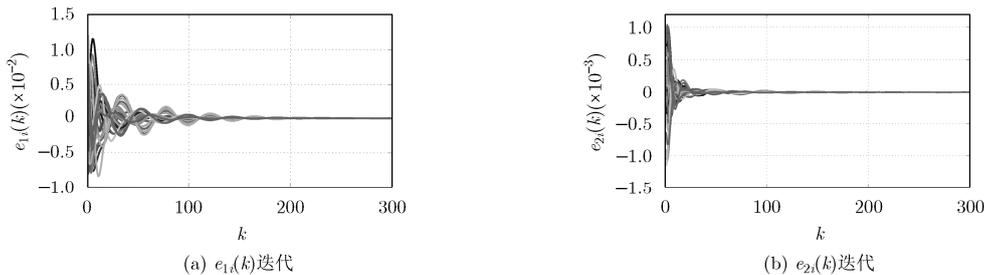


图 1 节点状态偏差迭代曲线

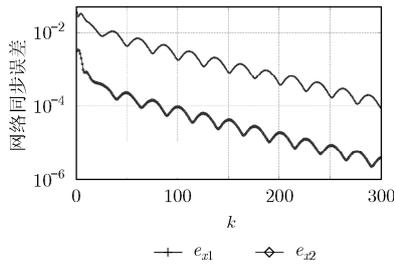


图 2 网络同步误差迭代曲线

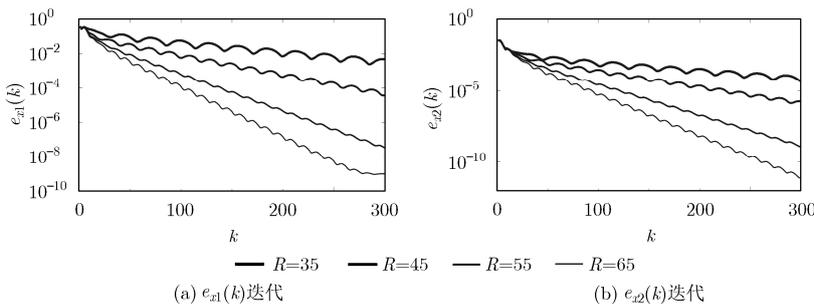
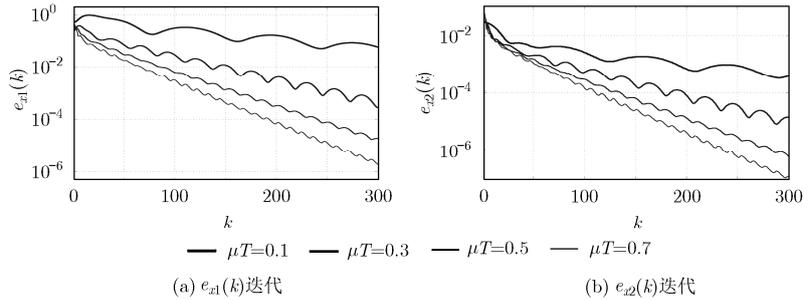
表 1 网络通信半径  $R$  对应的网络代数连通度

通信半径 $R(\text{m})$	代数连通度
35	0.0582
45	0.0815
55	0.1589
65	0.2096

从表 1 可以看出, 在节点位置布置相同的情况下, 随着通信半径的增加, 网络代数连通度  $\lambda_2(L)$  增加。从图 3 和图 4 可以看出, 随着  $|\chi - 1|$  的减小、 $\lambda_2(L)$  的增加, SOCTS 算法的收敛速度越来越快, 仿真验证了 4.2 节的理论分析结果。

### 5.3 SOCTS 算法同步开销分析

假设节点 ID 号用 1 Byte 表示, 网络最大节点数可为 256; 本地虚拟时间长度为 6 Byte, 在晶振周期标称值为  $1 \mu\text{s}$  时, 节点可连续记时 8.93 yr。如此同步信息包  $P_s$  长度为 7 Byte, 在 IEEE 802.15.4

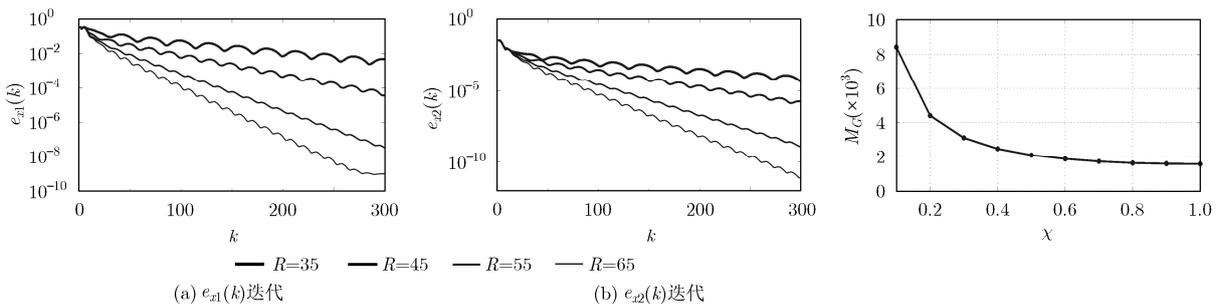
图 4 不同通信半径  $R$  下的网络同步误差迭代曲线图 3 不同  $\mu T$  下的网络同步误差迭代曲线

无线通信协议下物理层数据帧长度为 15 Byte。网络  $G$  中每个节点用于实现一致性时间同步的同步开销为  $M_G = 15T_a$  Byte, 其中  $T_a$  为算法的收敛时间。

在  $[0.1, 1.0]$  范围内选择  $\chi$  值, 取  $T = 5$  和  $\zeta = 3$ 。不同  $\chi$  下节点的同步开销  $M_G$  曲线如图 5 所示。从图 5 可以看出, SOCTS 算法下网络节点的同步开销随着  $\chi$  的增加而减小, 这是因为在网络拓扑固定情况下,  $\chi$  越接近 1, 则 SOCTS 算法的收敛时间越小, 也即用于时间同步的同步信息交换次数越少, SOCTS 算法的同步能耗也就越低。

## 6 结束语

本文提出了一种二阶一致性时间同步 SOCTS 算法, 并给出了网络邻接权重、控制增益和同步周期的完全分布式设计方法, 分析得出了影响 SOCTS 算法收敛速度的因素, 并得出可从网络邻接权重的优化设计角度提高 SOCTS 算法的收敛速度。

图 5 不同  $\chi$  下节点的同步开销  $M_G$  曲线

## 参考文献

- [1] 李鹏, 王新建, 曹建农. 无线传感器网络中基于压缩感知和 GM(1, 1) 的异常检测方案[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(7): 1586-1590. doi: 10.11999/JEIT141219.  
LI Peng, WANG Jianxin, and CAO Jiannong. Abnormal event detection scheme based on compressive sensing and GM (1,1) in wireless sensor networks[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(7): 1586-1590. doi: 10.11999/JEIT141219.
- [2] LIU Bin, REN Fengyuan, SHEN Junyang, et al. Advanced self-correcting time synchronization in wireless sensor networks[J]. *IEEE Communications Letters*, 2010, 14(4): 309-311. doi: 10.1109/LCOMM.2010.04.092364.
- [3] 王义君, 钱志鸿, 王桂琴, 等. 无线传感器网络能量有效时间同步算法研究[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(9): 2174-2179. doi: 10.3724/sp.j.1146.2012.00236.

- WANG Yijun, QIAN Zhihong, WANG Guiqin, *et al.* Research on energy-efficient time synchronization algorithm for wireless sensor networks[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(9): 2174–2179. doi: 10.3724/sp.j.1146.2012.00236.
- [4] ZHANG Weile, YIN Qinye, CHEN Hongyang, *et al.* Distributed angle estimation for localization in wireless sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2012, 12(2): 527–537. doi: 10.1109/GLOCOM.2010.5683803.
- [5] LI Dequan, LIU Qipeng, WANG Xiaofan, *et al.* Consensus seeking over directed networks with limited information communication[J]. *Automatica*, 2013, 49(2): 610–618. doi: 10.1016/j.automatica.2012.11.041.
- [6] 席裕庚, 李晓丽. 多智能体系统一致性的递阶结构设计[J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(9): 1191–1199. doi: 10.7641/CTA.2015.50393.
- XI Yugeng and LI Xiaoli. Hierarchical structure design for multi-agent consensus[J]. *Control Theory and Applications*, 2015, 32(9): 1191–1199. doi: 10.7641/CTA.2015.50393.
- [7] HE Wangli, ZHANG Biao, HAN Qianlong, *et al.* Leader-following consensus of nonlinear multiagent systems with stochastic sampling[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 99: 1–12. doi: 10.1109/TCYB.2015.2514119.
- [8] LUCA S and FEDERICO F. Average timesynch: a consensus-based protocol for clock synchronization in wireless sensor networks[J]. *Automatica*, 2011, 47(9): 1878–1886. doi: 10.1016/j.automatica.2011.06.012.
- [9] RUGGERO C and SANDRO Z. Network clock synchronization based on the second-order linear consensus algorithm[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(2): 409–422. doi: 10.1109/TAC.2013.2283742.
- [10] HE Jianping, CHENG Peng, SHI Lin, *et al.* Time synchronization in WSNs: A maximum-value-based consensus approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(3): 660–675. doi: 10.1109/TAC.2013.2286893.
- [11] HE Jiangping, LI Hao, CHEN Jiming, *et al.* Study of consensus-based time synchronization in wireless sensor networks[J]. *ISA Transactions*, 2014, 53(2): 347–357. doi: 10.1016/j.isatra.2013.11.001.
- [12] TIAN Yuping, ZONG Siheng, and CAO Qingqing. Structural modeling and convergence analysis of consensus-based time synchronization algorithms over networks: Non-topological conditions[J]. *Automatica*, 2016, 65: 64–75. doi: 10.1016/j.automatica.2015.11.034.
- [13] ASENSIO M C and BEFERULL L B. Accelerating consensus gossip algorithms: sparsifying networks can be good for you[C]. *IEEE International Conference on Communications*, Cape Town, South Africa, 2010: 1–5. doi: 10.1109/ICC.2010.5502427.
- [14] VECCHIO M and LÓPEZ-VALCARCE R. A greedy topology design to accelerate consensus in broadcast wireless sensor networks[J]. *Information Processing Letters*, 2015, 115(3): 408–413. doi: 10.1016/j.ipl.2014.11.009.
- [15] 任丰原, 董思颖, 何滔, 等. 基于锁相环的时间同步机制与算法[J]. *软件学报*, 2007, 18(2): 372–380. doi: 10.1360/jos180372.
- REN Fengyuan, DONG Siying, HE Tao, *et al.* A time synchronization mechanism and algorithm based on phase lock loop[J]. *Journal of Software*, 2007, 18(2): 372–380. doi: 10.1360/jos180372.
- [16] CARLI R and LOVISARIE E. Robust synchronization of networks of heterogeneous double-integrators[C]. *IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, Grand Wailea, Maui, HI, USA, 2012: 260–265. doi: 10.1109/CDC.2012.6426768.
- [17] LIN Xiao and STEPHEN Boyd. Fast linear iterations for distributed averaging[J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 5(1): 65–78. doi: 10.1109/CDC.2003.1272421.
- [18] GEORG S S, DIMOS V D, and KARL H J. Event-based broadcasting for multi-agent average consensus[J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 245–252. doi: 10.1016/j.automatica.2012.08.042.
- 黄友锐: 男, 1971年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向是矿山物联网和智能信息处理.
- 陈珍萍: 女, 1981年生, 副教授, 主要研究方向为物联网技术.
- 李德权: 男, 1973年生, 教授, 从事多个体系统协调控制、分布式优化理论与方法等研究.