交织法构造高斯整数零相关区序列集

刘 凯* 姜 昆
(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

摘 要：该文提出一种新的移位序列集的构造方法，并基于这些新的移位序列，通过交织周期为 N 的完备高斯整数序列，得到一类具有灵活相关区长度的周期为 $2N$ 的高斯整数零相关区序列集。这类新的序列集的参数能接近甚至达到 Tang-Fan-Matsuji 界，所以序列集的性能是最佳的或者几乎最佳的。高斯整数零相关区序列集可为高速准同步扩频系统提供更多的地址选择空间。

关键词：移位序列；高斯整数；交织法；零相关区
中图分类号：TN911.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2017)02-0328-07
DOI: 10.11999/JEIT160276

Construction of Gaussian Integer Sequence Sets with Zero Correlation Zone Based on Interleaving Technique

LIU Kai JIANG Kun
(*College of Information Science & Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: A new method of construction of shift sequence sets is proposed, and based on these shift sequences, a new class of Gaussian integer sequence sets with period $2N$ which can choose Zero Correlation Zone (ZCZ) length flexibly is obtained by interleaving one perfect Gaussian integer sequence with period N. The new sequence sets whose parameters can reach or approach the Tang-Fan-Matsuji bound are optimal or almost optimal. Gaussian integer sequence sets with zero correlation zone can provide more address selection for high-speed quasi-synchronous spread spectrum system.

Key words: Shift sequences; Gaussian integer; Interleaving technique; Zero Correlation Zone (ZCZ)

1 引言

近些年来，高斯整数序列受到国内外学者的广泛关注，并且把高斯整数序列应用于码分多址(CDMA)系统[1,2]、正交频分复用(OFDM)系统[3,4]和MIMO 空时编码[5]等领域，应用这种信号可以提高数据的传输速率；零相关区(ZCZ)序列作为扩频序列应用于准同步 CDMA(QS-CDMA)系统可以有效降低系统存在的多径干扰和多址干扰[6]，而高斯整数零相关区序列恰恰能够同时发挥这两者的优点。学者们经过对ZCZ序列集多年的研究得到了有效的构造方法，例如迭代法、交织法、映射变换等方法都已被应用到 ZCZ 序列集的构造研究中，近年来学者们又将移位序列应用到 ZCZ 序列集的交织构造中。文献[7,8]构造了移位序列集，利用交织法构造了一类具有灵活相关区长度的最佳或几乎最佳的ZCZ序列集。文献[9]扩展了文献[8]的移位序列集，并利用交织法构造出多个移位不等价的 ZCZ 序列集。文献[10]利用移位序列和 8-QAM+映射变换关系构造了一类 8-QAM+ZCZ 序列集。文献[11]中基于三元奇完备序列和移位序列，构造了两类新的奇完备8-QAM+序列，并且提出了一种 8-QAM+零奇相关区序列集的构造方法。在完备高斯整数序列构造方面学者们已经获得了较丰富的成果。文献[12]基于整数集上的多电平完备序列构造了完备高斯整数序列。文献[13]中以奇素数长度的完备高斯整数序列为基序列，利用交织法和复数变换，得到偶数长的完备高斯整数序列。文献[14]中利用迹函数和有限域将Legendre 序列、m 序列、GMW 序列、Hall 六次剩余序列构造了一类奇周期为 2^m-1 的完备高斯整数序列。Pei 等人[15]更是构造出了任意长度的完备高斯整数序列。

本文以文献[15]的任意长度完备高斯整数序列作为基序列，在文献[9]的移位序列构造思想的基础上，提出了一种新的移位序列集构造方法，交织构造出ZCZ长度可以灵活设定的最佳或几乎最佳的高

收稿日期：2016-03-24；改回日期：2016-08-16；网络出版：2016-10-09
*通信作者：刘凯 liukai@ysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61201263, 61501395)，河北省自然科学基金(F2014203059)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61201263, 61501395), The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2014203059)

斯整数 ZCZ 序列集，并且在构造方法上本文扩展了文献[7]的交织方法。在实际应用中，各类通信系统对 ZCZ 长度的要求不同，因此构造可以灵活选定相关区长度的最佳或几乎最佳的高斯整数ZCZ序列集是十分必要的，本文构造的序列集可为高速宽带通信系统提供更充分的地址码选择空间。

2 基本概念

设 U 是一个复数序列集，包含的序列个数为 M，每个序列周期为 N，表示为 $U=\{u_0,u_1,\cdots,u_{M-1}\}$，其中 $u_i=(u_{i,0},u_{i,1},\cdots,u_{i,N-1})$。

定义 1 设复数序列集 U 中的任意两个序列 u_i 和 u_j 的周期互相关函数定义如式(1)：

$$R_{u_i,u_j}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}u_{i,t}u_{j,t+\tau}^{*} \tag{1}$$

其中，$0\le\tau<N$，$t+\tau=t+\tau(\bmod\ N)$。当 $i=j$ 时，$R_{u_i}(\tau)$ 表示序列 u_i 的自相关函数。

定义 2 设复数集合 $U=\{u_i\}_{i=0}^{M-1}$ 包含 M 个长度为 N 的序列并且零相关区(ZCZ)长度为 Z_{cz}，则称集合 U 为 ZCZ 序列集，记作 $\mathrm{ZCZ}(N,M,Z_{cz})$。$Z_{cz}=\min\{Z_{\mathrm{ACZ}},Z_{\mathrm{CCZ}}\}$，$Z_{\mathrm{ACZ}}$ 和 Z_{CCZ} 分别表示零自相关区和零互相关区，定义如式(2)和式(3)：

$$Z_{\mathrm{ACZ}}=\max\{T:R_{u_i,u_i}(\tau)=0,\ 0\le i<M,\ 0<|\tau|<T\} \tag{2}$$

$$Z_{\mathrm{CCZ}}=\max\{T:R_{u_i,u_j}(\tau)=0,\ 0\le i\ne j<M,\ |\tau|<T\} \tag{3}$$

定义 3 设 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$ 和 $b=(b_0,b_1,\cdots,b_{N-1})$ 是两个周期为 N 的复数序列，如果对于 $0\le i<N$，$0\le\tau<N$ 有 $a_i=b_{i+\tau}$ 成立，则称序列 a 和 b 移位等价，否则称为移位不等价。

定义 4 设 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$ 是一个周期为 N 的复数序列，$e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$ 是长度为 2 的整数序列，其中 $e_{i,0},e_{i,1}\in\{0,1,\cdots,N-1\}$，构造一个 $N\times2$ 阶的矩阵：

$$\boldsymbol{U}_i=\begin{bmatrix}a_{0+e_{i,0}} & a_{0+e_{i,1}}\\ a_{1+e_{i,0}} & a_{1+e_{i,1}}\\ \vdots & \vdots\\ a_{N-1+e_{i,0}} & a_{N-1+e_{i,1}}\end{bmatrix} \tag{4}$$

将矩阵 $\boldsymbol{U}_i$ 的每行联接得到的序列 u_i 表示为 $u_i=I(L^{e_{i,0}}(a),\ L^{e_{i,1}}(a))=(a_{0+e_{i,0}},\ a_{0+e_{i,1}},\cdots,a_{N-1+e_{i,0}},a_{N-1+e_{i,1}})$，其中 $I(\cdot)$ 表示交织操作，L 为向左循环移位运算，例如，$L^i(a)=(a_i,a_{i+1},\cdots,a_{i-1})$。序列 u_i 称为交织序列，序列 a 和 $e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$ 分别称为交织序列 u_i 的基序列和移位序列。

定义 5[9] 设 $u=I(L^{e_{i,0}}(a),L^{e_{i,1}}(a))$ 和 $v=I(L^{e_{j,0}}(a),L^{e_{j,1}}(a))$ 是以复数序列 a 为基序列的两个交织序列，对应的移位序列分别为 $e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$ 和 $e_j=(e_{j,0},e_{j,1})$，若交织序列 u 和 v 移位不等价，则称移位序列 e_i 和 e_j 是不等价的，否则就是等价的。

定义 6 若周期为 N 的复数序列 u 的周期自相关函数满足：

$$R_u(\tau)=\begin{cases}E_u, & \tau\equiv0(\bmod\ N)\\ 0, & \tau\not\equiv0(\bmod\ N)\end{cases} \tag{5}$$

其中 $R_u(0)=E_u=\sum_{t=0}^{N-1}|u(t)|^2$，$E_u$ 是个正实数，则称序列 u 为完备复数序列。

引理 1[7] 设 $u=I(L^{e_{i,0}}(a),L^{e_{i,1}}(a))$ 和 $v=I(L^{e_{j,0}}(a),L^{e_{j,1}}(a))$ 是两个交织序列，令 $\tau=2\tau_1+\tau_2$，则 u 和 v 的互相关函数表示为

$$R_{u,v}(\tau)=\begin{cases}R_a(\tau_1-d_0)+R_a(\tau_1-d_1),\tau_2=0\\ R_a(\tau_1-d_2)+R_a(\tau_1-d_3),\tau_2=1\end{cases} \tag{6}$$

其中，$d_0=e_{i,0}-e_{j,0}$，$d_1=e_{i,1}-e_{j,1}$，$d_2=e_{i,0}-e_{j,1}$，$d_3=e_{i,1}-e_{j,0}-1$，都是模 N 运算。若移位序列满足 $e_i\ne e_j$ 时，有 $d_0\ne d_1$ 且 $d_2\ne d_3$ 成立，则交织序列 u 和 v 是移位不等价的。

3 高斯整数 ZCZ 序列集的交织构造

在高斯整数ZCZ序列集构造方法的交织步骤中本文扩展了文献[7]的方法，具体构造方法如下：

步骤 1 选取基序列。选取一个周期为 N 的完备高斯整数序列 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$，其中，$R_a(0)=E_a$。

步骤 2 构造移位序列。构造移位序列集 $E=\{e_0,e_1,\cdots,e_{M-1}\}$，其中，$e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$。设 Z_{cz} 为正整数，$2<Z_{cz}<N$，对于任意 $e_i,e_j\in E$ 需满足如下两个条件[5]：

(1) $\min\limits_{e_i\ne e_j\in E}\{d_0,d_1\}\ge\dfrac{Z_{cz}}{2}$，$\min\limits_{e_i,e_j\in E}\{d_2,d_3\}\ge\dfrac{Z_{cz}-1}{2}$；

(2)对于任意 $e_i\ne e_j\in E$ 有 $d_0\ne d_1$ 且 $d_2\ne d_3$。

步骤 3 交织构造。利用交织法构造的高斯整数 ZCZ 序列集如式(7)和式(8)：

$$U_1=\{u_i|0\le i<M\},\ u_i=I(\zeta_1L^{e_{i,0}}(a),\zeta_2L^{e_{i,1}}(a)) \tag{7}$$

$$U_2=\{u_{i+M}|0\le i<M\},\quad u_{i+M}=I\left(\zeta_3L^{e_{i,0}}(a),\zeta_4L^{e_{i,1}}(a)\right) \tag{8}$$

将 U_1 和 U_2 合并得到序列集 $U=U_1\cup U_2$。$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ \zeta_3 & \zeta_4\end{bmatrix}$ 称为参数矩阵，满足条件的参数矩阵可取 $\begin{bmatrix}+ & +\\ + & -\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}+ & +\\ - & +\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}- & -\\ - & +\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}- & -\\ + & -\end{bmatrix}$。

定理 1 由上述方法交织构造得到的序列集为高斯整数 ZCZ 序列集，序列集参数为 ZCZ($2N$, $2M, Z_{cz}$)，序列集中的序列移位不等价，ZCZ 长度可以灵活设定，取值范围为 $2 < Z_{cz} < N$ 。

证明 当参数矩阵为 $\begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}$ 时的高斯整数 ZCZ 序列集的交织构造，文献[7]已给出了证明，这里只对扩展的其它 3 种参数矩阵进行证明，首先证明参数矩阵为 $\begin{bmatrix} + & + \\ - & + \end{bmatrix}$ 的情况。

当 $e_i \neq e_j \in E$ 时，有 $d_0 \neq d_1$ 且 $d_2 \neq d_3$ ，根据引理 1 可以证得序列集 U 中的序列移位不等价。令 $\tau=2\tau_1+\tau_2$ ，$\tau_2=0, 1$ 。设序列 u 和 v 是序列集 U 中的两个序列，移位序列为 $e_i=(e_{i,0},e_{i,1})$ 和 $e_j=(e_{j,0}, e_{j,1})$，$u=I(\pm L^{e_{i,0}}(a), L^{e_{i,1}}(a))$，$v=I(\pm L^{e_{j,0}}(a), L^{e_{j,1}}(a))$ 。则序列 u 和 v 的周期互相关函数分为以下 4 种情况讨论：(1)当 $u,v \in U_1$ 时；(2)当 $u \in U_1, v \in U_2$ 时；(3)当 $u \in U_2, v \in U_1$ 时；(4)当 $u,v \in U_2$ 时。仅对情况(1)进行证明，其余情况类似。

当 $u,v \in U_1$ 时，周期互相关相关函数计算得

$$R_{u,v}(\tau) = \begin{cases} R_a(\tau_1 - d_0) + R_a(\tau_1 - d_1), & \tau_2 = 0 \\ R_a(\tau_1 - d_2) + R_a(\tau_1 - d_3), & \tau_2 = 1 \end{cases} \tag{9}$$

当 $\tau_2 = 0$ 时，对于序列 $u \neq v$ ，有 $e_i \neq e_j$ 。若 $0 \le \tau < Z_{cz}$ 则 $0 \le \tau_1 < Z_{cz}/2$ ，又因为 $\min\limits_{e_i \neq e_j \in E}\{d_0, d_1\} \ge \dfrac{Z_{cz}}{2}$ ，则有 $\tau_1 < \min\limits_{e_i \neq e_j \in E}\{d_0, d_1\}$ 。当 $\tau_2 = 1$ 时，$0 \le \tau < Z_{cz}$ 则 $0 \le \tau_1 < (Z_{cz}-1)/2$ ，又因为 $\min\limits_{e_i, e_j \in E}\{d_2, d_3\} \ge \dfrac{Z_{cz}-1}{2}$ ，则有 $\tau_1 < \min\limits_{e_i, e_j \in E}\{d_2, d_3\}$ 。因此，根据基序列 a 的自相关性质可得 $R_{u,v}(\tau) = 0$ 。当 $u = v$ 且 $\tau = 0$ 时， $R_{u,v}(\tau) = 2E_a$ 。

由上述讨论可知，序列集 U 是一个参数为 ZCZ $(2N, 2M, Z_{cz})$ 的高斯整数 ZCZ 序列集。 证毕

当参数矩阵为 $\begin{bmatrix} - & - \\ - & + \end{bmatrix}$， $\begin{bmatrix} - & - \\ + & - \end{bmatrix}$ 时，证明过程类似，不再赘述。由引理 1 的结论可知，由于移位序列满足条件(2)，因此序列集中的序列移位不等价。利用本文扩展的 3 种参数矩阵，可以得到更多的 ZCZ 序列集，与文献[7]中参数矩阵得到的序列集比较，序列集的参数形式相同，但包含的序列不同。

4 移位序列的构造

本节提出一种新的移位序列集 E 的构造方法，序列集 E 包含 M 个序列，并且 $M \approx \lfloor N / Z_{cz} \rfloor$，表示取 N/Z_{cz} 的整数部分，$2 < Z_{cz} < N$ 。根据 Z_{cz} 的奇偶性，把移位序列集 $E = \{e_0, e_1, \cdots, e_{M-1}\}$ 分为两种情况进行构造， $e_i = (e_{i,0}, e_{i,1})$ ， $e_{i,0}, e_{i,1} \in \{0,1,\cdots,N-1\}$ 。

(1) Z_{cz} 为偶数，取 $M = \left\lfloor \dfrac{N-2}{Z_{cz}} \right\rfloor$，对于 $0 \le i < M$ 时，移位序列 e_i 构造如下：

当 $Z_{cz} \mid N-1$ 时，有 $M = (N - Z_{cz} - 1)/Z_{cz}$ 。

$$e_i = (e_{i,0}, e_{i,1}) = \left(\frac{Z_{cz}}{2} i + x, N - 1 - \frac{Z_{cz}}{2}(i+1) - y\right) \tag{10}$$

其中， x,y 为非负整数， $0 \le x + y \le Z_{cz} - 1$ 且 $x + y \neq \dfrac{N - 3 - kZ_{cz}}{2}$， $k = \left\{\dfrac{N-1}{Z_{cz}} - 1, \dfrac{N-1}{Z_{cz}} - 2\right\}$ 。

当 $Z_{cz} \nmid N-1$ 时，

$$e_i = (e_{i,0}, e_{i,1}) = \left(\frac{Z_{cz}}{2} i + x,\ N - \frac{Z_{cz}}{2}(i+1) - y\right) \tag{11}$$

其中， x,y 为非负整数，当 N 为偶数时满足：$0 \le x + y \le N - 1 - MZ_{cz}$ ；当 N 为奇数时满足：$0 \le x + y \le N - 1 - MZ_{cz}$ 且 $x + y \neq \dfrac{N - 1 - MZ_{cz}}{2}$ 。

(2) Z_{cz} 为奇数，取 $M=\left\lfloor \dfrac{N-1}{Z_{cz}} \right\rfloor$，对于 $0 \le i < M$ ，移位序列 e_i 构造如下：

当 $Z_{cz} \mid N$ 时，有 $M = (N - Z_{cz}/Z_{cz})$ 。

$$e_i = (e_{i,0}, e_{i,1}) = \begin{cases} \left(\dfrac{i}{2} Z_{cz} + x, N - 1 - \dfrac{(i+1) Z_{cz} - 1}{2} - y\right), & i\text{为偶数} \\ \left(N-1-\dfrac{i+1}{2}Z_{cz} - y, \dfrac{iZ_{cz}+1}{2} + x\right), & i\text{为奇数} \end{cases} \tag{12}$$

其中， x,y 为非负整数， $0 \le x + y \le Z_{cz} - 2$ 。

当 $Z_{cz} \nmid N$ 时，

$$e_i = (e_{i,0}, e_{i,1}) = \begin{cases} \left(\dfrac{i}{2} Z_{cz} + x, N - \dfrac{(i+1)Z_{cz} - 1}{2} - y\right), & i\text{为偶数} \\ \left(N - \dfrac{(i+1)}{2} Z_{cz} - y, \dfrac{iZ_{cz}+1}{2} + x\right), & i\text{为奇数} \end{cases} \tag{13}$$

其中， x,y 为非负整数， $x + y \le N - MZ_{cz}$ 且 $x + y \neq \dfrac{N - MZ_{cz}}{2}$ 。式中，移位序列中元素都是模 N 运算。

定理 2 设 E 为上述方法构造的移位序列集，$e_i = (e_{i,0}, e_{i,1})$ 和 $e_j = (e_{j,0}, e_{j,1})$ 是其中任意的两个移位序列，$0 \le i, j < M$ ， $e_{i,0}, e_{i,1} \in \{0,1,\cdots,N-1\}$ 。记 $d_0 = e_{i,0} - e_{j,0}$ ， $d_1 = e_{i,1} - e_{j,1}$ 和 $d_2 = e_{i,0} - e_{j,1}$ ， $d_3 = e_{i,1} - e_{j,0} - 1$ ，都是模 N 运算。移位序列满足条件(1)：$\min\limits_{e_i \neq e_j \in E}\{d_0, d_1\} \ge \dfrac{Z_{cz}}{2}$ 且 $\min\limits_{e_i, e_j \in E}\{d_2, d_3\} \ge \dfrac{Z_{cz}-1}{2}$ 。

证明　假设 $0 \le i \le j < M$，分为以下几种情况进行讨论：

(1)当 Z_{cz} 为偶数且 $Z_{cz} \mid N-1$ 时，得 $d_0 = N - \frac{Z_{cz}}{2}(j-i)$，$d_1 = \frac{Z_{cz}}{2}(j-i)$，$d_2 = \frac{Z_{cz}}{2}(i+j+1) + (x+y) + 1$，$d_3 = N - 2 - \frac{Z_{cz}}{2}(i+j+1) - (x+y)$。由 $0 \le i \le j < M$ 得 $0 \le j-i \le M-1$，$0 < i+j+1 \le 2M-1$。所以 $i \ne j$ 时有 $d_1 > Z_{cz}/2$，$d_0 \ge N - \frac{Z_{cz}}{2}(M-1) \ge N - \frac{N-2}{2} + \frac{Z_{cz}}{2} > \frac{Z_{cz}}{2}$；又 $0 \le x+y \le Z_{cz}-1$，当 $i \le j$ 时，有 $\frac{Z_{cz}-1}{2} < \frac{Z_{cz}}{2} + 1 \le d_2 \le MZ_{cz} - \frac{Z_{cz}}{2} + Z_{cz} = N - 1 - \frac{Z_{cz}}{2}$，$d_3 = N - 1 - d_2$，$\frac{Z_{cz}}{2} \le d_3 < N - \frac{Z_{cz}+1}{2}$。所以 $\min\limits_{e_i \ne e_j \in E}\{d_0, d_1\} \ge \frac{Z_{cz}}{2}$，$\min\limits_{e_i, e_j \in E}\{d_2, d_3\} \ge \frac{Z_{cz}-1}{2}$ 成立。

(2)当 Z_{cz} 为偶数且 $Z_{cz} \nmid N-1$ 时，证明过程与情况(1)类似，这里不再赘述。

(3)当 Z_{cz} 为奇数且 $Z_{cz} \mid N$ 时，有 $M = \frac{N - Z_{cz}}{Z_{cz}}$，计算可以得到

$$d_0, d_1 \in \left\{N - \frac{Z_{cz}}{2}(j-i), \frac{j-i}{2}Z_{cz}, \frac{(i+j+1)Z_{cz}}{2} + 1 + (x+y), N - 1 - \frac{i+j+1}{2}Z_{cz} - (x+y)\right\} \tag{14}$$

$$d_2, d_3 \in \left\{\frac{(i+j+1)Z_{cz}+1}{2} + (x+y), N - 1 - \frac{(i+j+1)Z_{cz}+1}{2} - (x+y), N - \frac{(j-i)Z_{cz}+1}{2}, \frac{(j-i)Z_{cz}-1}{2}\right\} \tag{15}$$

由 $0 \le i \le j < M$，得 $0 \le j-i \le M-1$，$0 < i+j+1 \le 2M-1$；由于 $M = \left\lfloor \frac{N-1}{Z_{cz}} \right\rfloor$，则有 $MZ_{cz} \le N-1$；当 $i \ne j$ 时，有下面不等式 $\frac{(j-i)Z_{cz}}{2} \ge \frac{Z_{cz}}{2}$ 和 $N - \frac{(j-i)Z_{cz}}{2} \ge N - \frac{(M-1)Z_{cz}}{2} > \frac{Z_{cz}}{2}$ 成立，由 $0 \le x+y < Z_{cz}-1$ 得 $\frac{Z_{cz}}{2} < \frac{(i+j+1)Z_{cz}}{2} + 1 + (x+y) < MZ_{cz} + \frac{Z_{cz}}{2} = N - \frac{Z_{cz}}{2}$，$\frac{Z_{cz}}{2} < N - \frac{(i+j+1)Z_{cz}}{2} - 1 - (x+y) < N - \frac{Z_{cz}}{2}$；所以有 $\min\limits_{e_i \ne e_j \in E}\{d_0, d_1\} \ge \frac{Z_{cz}}{2}$ 成立。当 $i \le j$ 时，有 $\frac{(j-i)Z_{cz}-1}{2} \ge \frac{Z_{cz}-1}{2}$，$N - \frac{(j-i)Z_{cz}+1}{2} \ge N - \frac{MZ_{cz}}{2} + \frac{Z_{cz}-1}{2} > \frac{Z_{cz}-1}{2}$，$\frac{Z_{cz}-1}{2} < \frac{(i+j+1)Z_{cz}+1}{2} + (x+y) \le N - \frac{Z_{cz}+1}{2}$，$\frac{Z_{cz}-1}{2} \le N - \frac{(i+j+1)Z_{cz}+1}{2} - 1 - (x+y) < N - \frac{Z_{cz}-1}{2}$，所以有 $\min\limits_{e_i, e_j \in E}\{d_2, d_3\} \ge \frac{Z_{cz}-1}{2}$ 成立。

(4)当 Z_{cz} 为奇数且 $Z_{cz} \nmid N$ 时，证明过程与情况(3)类似，这里不再赘述。

综合上述讨论，证得定理 2 成立。

定理 3　设 E 为上述方法构造的移位序列集，其中的任意两个序列为 $e_i = (e_{i,0}, e_{i,1})$ 和 $e_j = (e_{j,0}, e_{j,1})$，$0 \le i, j < M$，$e_{i,0}, e_{i,1} \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$。记 $d_0 = e_{i,0} - e_{j,0}$，$d_1 = e_{i,1} - e_{j,1}$ 和 $d_2 = e_{i,0} - e_{j,1}$，$d_3 = e_{i,1} - e_{j,0} - 1$，都是模 N 运算。对于任意 $e_i \ne e_j \in E$ 满足条件(2)：$d_0 \ne d_1$ 且 $d_2 \ne d_3$。

证明　设 $0 \le i \le j < M$，分以下几种情况讨论：

(1)当 Z_{cz} 为偶数且 $Z_{cz} \mid N-1$ 时，由定理 2 的证明过程可知 d_0, d_1, d_2, d_3 的取值，由于 $e_i \ne e_j$，$0 \le i < j < M$，如果 $d_0 = d_1$，则有 $N = (j-i)Z_{cz}$。因为 $0 < j-i \le M-1$，$MZ_{cz} \le N-2$，所以 $Z_{cz} \le (j-i)Z_{cz} \le (M-1)Z_{cz} < MZ_{cz} \le N-2 < N$ 与 $N = (j-i)Z_{cz}$ 相矛盾，故 $d_0 \ne d_1$。对于 $0 \le i < j < M$，若 $d_2 = d_3$，则有 $\frac{Z_{cz}}{2}(i+j+1) + (x+y) + 1 = N - 2 - \frac{Z_{cz}}{2}(i+j+1) - (x+y)$，再计算得到下面的关系：

$$Z_{cz}(i+j+1) + 2(x+y) = N - 3 \tag{16}$$

设 $k = i+j+1$，k 为整数。令 $N-1 = mZ_{cz}$，上式化简为 $x+y = \frac{(m-k)Z_{cz}}{2} - 1$。因为 $0 \le x+y \le Z_{cz}-1$，上式若成立则取值范围应为 $[0, Z_{cz}-1]$；当 $m-k=0$ 时，得 $x+y=-1$；当 $m-k=1$ 时，得 $x+y = \frac{Z_{cz}}{2} - 1$；当 $m-k=2$ 时，得 $x+y = Z_{cz}-1$。通过上述分析可知，当且仅当 $m-k = \{1,2\}$ 时，即 $k = \left\{\frac{N-1}{Z_{cz}} - 1, \frac{N-1}{Z_{cz}} - 2\right\}$ 时式(16)成立，与条件 $x+y \ne \frac{N-3-kZ_{cz}}{2}$，$k = \left\{\frac{N-1}{Z_{cz}} - 1, \frac{N-1}{Z_{cz}} - 2\right\}$ 相矛盾，故(16)式不成立，综合上述讨论得到结论 $d_2 \ne d_3$。

(2)当 Z_{cz} 为偶数且 $Z_{cz} \nmid N-1$ 时，由定理 2 的证明过程可得 d_0, d_1, d_2, d_3 的取值，若 $d_0 = d_1$，则有 $N = (j-i)Z_{cz}$，由 $0 < j-i \le M-1$，$MZ_{cz} \le N-2$ 得出不等式 $(j-i)Z_{cz} < N$ 与 $N = (j-i)Z_{cz}$ 相矛盾，所以有 $d_0 \ne d_1$。如果 $d_2 = d_3$，则可得

$$Z_{cz}(i+j+1)+2(x+y)=N-1 \tag{17}$$

分两种情况进行分析，当N为偶数时，等式左边为奇数，右边为偶数，所以式(17)不成立。当N为奇数时，令$k=i+j+1$，则式(17)化简为$x+y=\dfrac{N-1-kZ_{cz}}{2}$，由于$0\le x+y\le N-1-MZ_{cz}$，进而可以得到$0\le\dfrac{N-1-kZ_{cz}}{2}\le N-1-MZ_{cz}$成立，又因为$k$为整数，所以$2M-\left\lfloor\dfrac{N-1}{Z_{cz}}\right\rfloor\le k\le\left\lfloor\dfrac{N-1}{Z_{cz}}\right\rfloor$。由$M=\left\lfloor\dfrac{N-2}{Z_{cz}}\right\rfloor$，$2<Z_{cz}<N$，得$\left\lfloor\dfrac{N-1}{Z_{cz}}\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{N-2}{Z_{cz}}\right\rfloor=M$，代入不等式得：$M\le k\le M$，因此仅当$k=M$，即$x+y=\dfrac{N-1-MZ_{cz}}{2}$时式(17)成立，与条件$x+y\ne\dfrac{N-1-MZ_{cz}}{2}$矛盾，所以式(17)不成立。由上述讨论得$d_2\ne d_3$。

当Z_{cz}为奇数时，证明过程类似。

综合上述讨论，得到结论$d_0\ne d_1$且$d_2\ne d_3$，定理成立。 证毕

由定理1、定理2和定理3可知，构造得到的移位序列集满足交织法的条件，从而可以利用交织法构造一类高斯整数ZCZ序列集。本文移位序列的构造方法延续了文献[9]的构造思想，得到了新的构造结果，下面在表1中将本文和文献[9]中移位序列的构造结果进行对比，并在表2和表3中给出一些例子。通过表1、表2和表3可以看出，与文献[9]相比较，本文构造了一类不同的移位序列集。

表1 移位序列构造的比较

相关区长度Z_{cz}	文献[9]	本文
Z_{cz}为偶数	$e_i=\begin{cases}\left(N-\dfrac{Z_{cz}}{2}i-x,\ \dfrac{Z_{cz}}{2}(i+1)+2+y\right), & Z_{cz}\mid N-1\\ \left(N-\dfrac{Z_{cz}}{2}i-x,\ \dfrac{Z_{cz}}{2}(i+1)+1+y\right), & Z_{cz}\nmid N-1\end{cases}$	$e_i=\begin{cases}\left(\dfrac{Z_{cz}}{2}i+x,\ N-1-\dfrac{Z_{cz}}{2}(i+1)-y\right), & Z_{cz}\mid N-1\\ \left(\dfrac{Z_{cz}}{2}i+x,\ N-\dfrac{Z_{cz}}{2}(i+1)-y\right), & Z_{cz}\nmid N-1\end{cases}$
Z_{cz}为奇数且$Z_{cz}\mid N$	$e_i=\begin{cases}\left(N-\dfrac{Z_{cz}}{2}i-x,\ \dfrac{(i+1)Z_{cz}+1}{2}+1+y\right), & i\text{为偶数}\\ \left(\dfrac{(i+1)Z_{cz}}{2}+1+y,\ N-\dfrac{iZ_{cz}-1}{2}-x\right), & i\text{为奇数}\end{cases}$	$e_i=\begin{cases}\left(\dfrac{i}{2}Z_{cz}+x, N-1-\dfrac{(i+1)Z_{cz}-1}{2}-y\right), & i\text{为偶数}\\ \left(N-1-\dfrac{i+1}{2}Z_{cz}-y, \dfrac{iZ_{cz}+1}{2}+x\right), & i\text{为奇数}\end{cases}$
Z_{cz}为奇数且$Z_{cz}\nmid N$	$e_i=\begin{cases}\left(N-\dfrac{Z_{cz}}{2}i-x,\ \dfrac{(i+1)Z_{cz}+1}{2}+y\right), & i\text{为偶数}\\ \left(\dfrac{(i+1)Z_{cz}}{2}+y,\ N-\dfrac{iZ_{cz}-1}{2}-x\right), & i\text{为奇数}\end{cases}$	$e_i=\begin{cases}\left(\dfrac{i}{2}Z_{cz}+x,\ N-\dfrac{(i+1)Z_{cz}-1}{2}-y\right), & i\text{为偶数}\\ \left(N-\dfrac{(i+1)}{2}Z_{cz}-y,\ \dfrac{iZ_{cz}+1}{2}+x\right), & i\text{为奇数}\end{cases}$

表2 当$N=16$，$Z_{cz}=5$，$M=3$时的移位序列集

	$E(0,0)$	$E(0,1)$	$E(1,0)$
文献[9]	$e_0=(0,3)$	$e_0=(0,4)$	$e_0=(15,3)$
	$e_1=(5,14)$	$e_1=(6,14)$	$e_1=(5,13)$
	$e_2=(11,8)$	$e_2=(11,9)$	$e_2=(10,8)$
本文	$e_0=(0,14)$	$e_0=(0,13)$	$e_0=(1,14)$
	$e_1=(11,3)$	$e_1=(10,3)$	$e_1=(11,4)$
	$e_2=(5,9)$	$e_2=(5,8)$	$e_2=(6,9)$

5 零相关区高斯整数序列集的性能分析

文献[16]推导得出了ZCZ序列集的理论界限，下面通过与理论界限的比较来得出本文构造的高斯整数ZCZ序列集的性能。

引理 2[16] 对于任意的ZCZ序列集ZCZ(N, M, Z_{cz})都要满足：

表3 当$N=16$，$Z_{cz}=4$，$M=3$时的移位序列集

	$E(0,0)$	$E(0,1)$	$E(1,1)$	$E(2,1)$
文献[9]	$e_0=(0,3)$	$e_0=(15,3)$	$e_0=(15,4)$	$e_0=(14,4)$
	$e_1=(14,5)$	$e_1=(13,5)$	$e_1=(13,6)$	$e_1=(12,6)$
	$e_2=(12,7)$	$e_2=(11,7)$	$e_2=(11,8)$	$e_2=(10,8)$
本文	$e_0=(0,14)$	$e_0=(1,14)$	$e_0=(1,13)$	$e_0=(2,13)$
	$e_1=(2,12)$	$e_1=(3,12)$	$e_1=(3,11)$	$e_1=(4,11)$
	$e_2=(4,10)$	$e_2=(5,10)$	$e_2=(5,9)$	$e_2=(6,9)$

$$M \le \lfloor N / Z_{cz} \rfloor \tag{18}$$

定义 7　设 ZCZ 序列集 U 表示为 ZCZ(N,M,Z_{cz})，如果 $M = \lfloor N/Z_{cz} \rfloor$，则称序列集 U 是最佳的，如果 $M = \lfloor N/Z_{cz} \rfloor - 1$，则称序列集 U 是几乎最佳的。对于任意给定的 $2 < Z_{cz} < N$，本文构造的高斯整数 ZCZ 序列集参数表示为 ZCZ($2N,2M,Z_{cz}$)，令 $M' = \lfloor 2N/Z_{cz} \rfloor$ 表示最佳 ZCZ 序列集包含的序列数目，下面将对本文构造的 ZCZ 序列集和最佳 ZCZ 序列集包含的序列数目的关系进行讨论，如表 4，设 $N = qZ_{cz} + r$，其中 $0 \le r < Z_{cz}$，q 和 r 为非负整数。

表 4 本文构造的 ZCZ 序列集和最佳 ZCZ 序列集中序列数目的关系

零相关区长度	$2M$ 与 M' 的关系
Z_{cz} 为偶数	$M' - 2M = \begin{cases} 0, & 2 \le r < \dfrac{Z_{cz}}{2} \\ 1, & r \ge \dfrac{Z_{cz}}{2} \\ 2, & r = 0,1 \end{cases}$
Z_{cz} 为奇数	$M' - 2M = \begin{cases} 0, & 0 < r < \dfrac{Z_{cz}}{2} \\ 1, & \dfrac{Z_{cz}}{2} \le r < Z_{cz} \\ 2, & r = 0 \end{cases}$

例 1　选取周期为 14 的完备高斯整数序列 a 作为基序列，表示如下：

$$a = (-1-j,-j,j,1,j,1,1,-1+j,j,-j,1,-j,1,1)$$

令 ZCZ 长度 $Z_{cz} = 3$，选取文献[7] 中的参数矩阵为 [++;+−]，移位序列构造法中的参数为 $x = 0$, y=0，根据式(15)构造移位序列集 E={$e_i, 0 \le i \le 3$}，其中 $e_0 = (0,13)$，$e_1 = (11,2)$，$e_2 = (3,10)$，e_3=(8,5)。利用本文方法构造的高斯整数 ZCZ 序列集 $S = \{s_i, 0 \le i \le 7\}$ 表示如下：

$$s_0 = (-1-j,1,-j,-1-j,j,-j,1,j,j,1,1,j,1,1,-1+j,1,j,-1+j,-j,j,1,-j,-j,1,1,-j,1,1)$$
$$s_1 = (-j,j,1,1,1,j,-1-j,1,-j,1,j,-1+j,1,j,j,-j,1,1,1,-j,-1+j,1,j,1,-j,-1-j,1,-j)$$
$$s_2 = (1,1,j,-j,1,1,1,1,-1+j,-1-j,j,-j,-j,j,1,1,-j,j,1,1,1,1,-1-j,-1+j,-j,j,j,-j)$$
$$s_3 = (j,1,-j,1,1,-1+j,-j,j,1,-j,1,1,-1-j,-j,-j,1,j,1,1,-1-j,j,-j,1,j,1,1,-1+j,j)$$
$$s_4 = (-1-j,-1,-j,1+j,j,j,1,-j,j,-1,1,-j,1,-1,-1+j,-1,j,1-j,-j,-j,1,j,-j,-1,1,j,1,-1)$$
$$s_5 = (-j,-j,1,-1,1,-j,-1-j,-1,-j,-1,j,1-j,1,-j,j,j,1,-1,1,j,-1+j,-1,j,-1,-j,1+j,1,j)$$
$$s_6 = (1,-1,j,j,1,-1,1,-1,-1+j,1+j,j,j,-j,-j,1,-1,-j,-j,1,-1,1,-1,-1-j,1-j,-j,-j,j,j)$$
$$s_7 = (j,-1,-j,-1,1,1-j,-j,-j,1,j,1,-1,-1-j,j,-j,-1,j,-1,1,1+j,j,j,1,-j,1,-1,-1+j,-j)$$

序列 $s_0 \sim s_7$ 的自相关函数为：$\{R_{s_m}(\tau)\}_{\tau=0}^{27} = (32,0,0,\#,\cdots,\#)$, $0 \le m \le 7$，其中 $\# \in \{0,16,-16\}$。序列的互相关函数为：$\{R_{s_m,s_n}(\tau)\}_{\tau=0}^{27} = \{0,0,0,x,\cdots,0\}$, $0 \le m \ne n \le 7$，其中 $x \in \{0,16,-16\}$，因此序列集 S 为高斯整数 ZCZ 序列集，序列集的参数为 ZCZ(28, 8, 3)，该序列集中含有的序列个数比最佳序列集少 1，是几乎最佳的高斯整数 ZCZ 序列集。

例 2 选取上例中的完备高斯整数序列 a 和系数矩阵，令 ZCZ 长度为 $Z_{cz} = 6$，移位序列构造法中的参数为 $x = 0, y = 1$，根据式(13)构造移位序列集 $E = \{e_0, e_1\}$，其中 $e_0 = (0,10)$，$e_1 = (3,7)$。利用本文方法构造的高斯整数 ZCZ 序列集参数为 ZCZ(28, 4,6)，序列集达到了理论界，是一个最佳的高斯整数 ZCZ 序列集。

6　结论

本文提出了一类新的移位序列集的构造方法，并基于完备高斯整数序列，利用交织法构造了一类偶长度的最佳或几乎最佳的高斯整数 ZCZ 序列集。通过选择不同的基序列周期 N 和所需的 ZCZ 长度，得到多个不同的移位序列集，相应地构造出多个不同的高斯整数 ZCZ 序列集。本文构造的序列集 ZCZ 长度可以灵活设定，从而可以满足更多用户的需求。

参 考 文 献

[1] HUBER Klaus. Codes over Gaussian integer[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1994, 40(1): 207–216. doi: 10.1109/18.272484.

[2] DENG Xinmin, FAN Pingzhi, and SUEHIRO N. Sequences with zero correlation over Gaussian integers[J]. *Electronics Letters*, 2000, 36(6): 552–553. doi: 10.1049/el:20000439.

[3] CHANG Chungyi, LI Ying, and HIRATA Jonathan. New 64-QAM golay complementary sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(6): 2479–2485. doi: 10.1109/TIT.2010.2043871.

[4] LI Chihpeng, WANG Senhung, and WANG Chinliang. Novel low-complexity SLM schemes for PAPR reduction in OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(5): 2916–2921. doi: 10.1109/TSP.2010.2043142.

[5] LUSINA P, SHAVGULIZDE S, and BOSSERT M. Space-time block factorisation codes over Gaussian integers[J]. *IEE Proceedings*: *Communications*, 2004, 151(5): 415–421. doi: 10.1049/ip-com:20040387.

[6] SUEHIRO N. A signal design without co-channel interference for approximately synchronized CDMA systems[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1994, 12(5): 837–841. doi: 10.1109/49.298057.

[7] ZHOU Zhengchun and TANG Xiaohu. A new class of sequences with zero or low correlation zone based on interleaving technique[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(9): 4267–4273. doi: 10.1109/TIT.2008.928256.

[8] 李玉博, 许成谦. 交织法构造最佳或几乎最佳低零相关区序列集[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(3): 549–554. doi: 10.3724/SP.J.1146.2009.01615.

LI Yubo and XU Chengqian. Construction of optimal or almost optimal sequence sets with zero or low correlation zone based on interleaving technique[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(3): 549–554. doi: 10.3724/SP.J.1146.2009.01615.

[9] 李玉博, 许成谦. 交织法构造移位不等价的 ZCZ/LCZ 序列集[J]. 电子学报, 2011, 39(4): 796–802.

LI Yubo and XU Chengqian. Construction of cyclically distinct ZCZ/LCZ sequence sets based on interleaving technique[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(4): 796–802.

[10] LI Yubo and XU Chengqian. Zero correlation zone sequence sets over the 8-QAM+Constellation[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(11): 1844–1847. doi: 10.1109/LCOMM.2012.092112.121217.

[11] LI Yubo, LIU Kai, and XU Chengqian. Odd perfect sequences and sequence sets with zero odd correlation zone over the 8-QAM+Constellation[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2014, E97-A(1): 425–428. doi: 10.1587/transfun.E97.A.425.

[12] 陈晓玉, 许成谦, 李玉博. 新的完备高斯整数序列的构造方法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(9): 2081–2085. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01697.

CHEN Xiaoyu, XU Chengqian, and LI Yubo. New constructions of perfect Gaussian integer sequences[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(9): 2081–2085. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01697.

[13] PENG Xiuping and XU Chengqian. New constructions of perfect Gaussian integer sequences of even length[J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18(9): 1547–1550. doi: 10.1109/LCOMM.2014.2336840.

[14] LEE Chongdao, HUANG Yupei, and YAOTSU Chang. Perfect Gaussian integer sequences of odd period 2^m–1[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(7): 881–885. doi: 10.1109/LSP.2014.2375313.

[15] PEI Soochang and CHANG Kuowei. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(8): 1040–1044. doi: 10.1109/LSP.2014.2381642.

[16] TANG Xiaohu, FAN Pingzhi, and MATSUFUJI S. Lower bounds on correlation of spreading sequence set with low or zero correlation zone[J]. *Electronics Letters*, 2000, 36(6): 551–552. doi: 10.1049/el:20000462.

刘 凯： 女，1977 年生，副教授，研究方向为扩频通信、编码理论、序列设计.

姜 昆： 女，1990 年生，硕士生，研究方向为扩频序列设计.