

基于贝叶斯压缩感知的复数稀疏信号恢复方法

王伟 唐伟民* 王霖 雷舒杰
(哈尔滨工程大学自动化学院 哈尔滨 150001)

摘要: 该文利用复数稀疏信号的时域相互关系提出一种新的稀疏贝叶斯算法(CTSBL)。该算法利用复数信号的实部与虚部分量具有相同的稀疏结构的特点,提升估计信号的稀疏程度。同时将多个测量信号间的内部结构信息引入到了信号恢复中,使原始的多测量稀疏信号恢复问题转变为单测量块稀疏信号恢复问题,使恢复性能得到了提升。理论分析和仿真结果证明,提出的CTSBL算法相较于目前的针对复数信号的多测量矢量贝叶斯压缩感知(CMTBCS)算法和块正交匹配追踪算法(BOMP)在估计精度上具有更好的性能。

关键词: 压缩感知; 稀疏信号恢复; 多矢量测量模型; 块稀疏贝叶斯

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)06-1419-05

DOI: 10.11999/JEIT151056

Sparse Signal Recovery Based on Complex Bayesian Compressive Sensing

WANG Wei TANG Weimin WANG Ben LEI Shujie
(Institute of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: An effective Sparse Bayesian Learning algorithm exploiting Complex sparse Temporal correlation (CTSBL) is proposed in this paper, which is used to recover sparse complex signal. By exploiting the fact that the real and imaginary components of a complex value share the same sparsity pattern, it can improve the sparsity of the estimated signal. A multitask sparse signal recovery issue is transformed to a block sparse signal recovery issue of a single measurement by taking full advantage of the internal structure information among the multiple measurement vector signals. The experiments show that the proposed algorithm CTSBL achieves better recovery performance compared with the existing Complex MultiTask Bayesian Compressive Sensing (CMTBCS) algorithm and BOMP algorithm.

Key words: Compressive Sensing (CS); Sparse signal recovery; Multitask measurement vector model; Block sparse Bayes

1 引言

基于压缩感知理论的方法由于其计算高效,准确性高,近年来得到了广泛的关注^[1,2]。在恢复信号为稀疏信号条件下,压缩感知技术能够利用远小于奈奎斯特采样率的采样样本以很大的概率精确恢复出原始信号。目前,它广泛的应用于雷达信号成像,角度估计,无线通信,机器学习等领域^[3,4]。

现有的压缩感知方法包括了匹配追踪算法(Marching Pursuit, MP),正交匹配追踪(Orthogonal Marching Pursuit, OMP),基追踪(Basis Pursuit, BP),LASSO(Least absolute shrinkage and selection operator)和基于贝叶斯压缩感知算法^[5-7],上述算法主要针对的是解决单一测量矢量模型的稀疏信号恢复问题。拓展到多个测量矢量模型时,上述大多数算法可以直接被推广运用,包括已提出的块正交匹配追踪算法(Block Orthogonal Marching Pursuit, BOMP),块BP,块LASSO等算法^[8-11]。其中基于贝叶斯原理的算法由于能够获得更好的恢复性能,近来得到了人们的广泛关注,如文献^[12-14]提出的利用多拍信号的时域相关性来提升性能的BSBL(Block Sparse Bayesian Learning),T-SBL等算法。

但在基于贝叶斯压缩感知的稀疏信号恢复问题中所提出的算法一般假设其中涉及数据为实数,这样在实验仿真中能更方便地进行数据处理和分析。而在实际应用中,如雷达信号处理方面,很多实验

收稿日期: 2015-09-17; 改回日期: 2016-03-18; 网络出版: 2016-05-05

*通信作者: 唐伟民 tangweimin1992@hrbeu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61571148), 中国博士后科学基金(2014M550182), 黑龙江省博士后特别资助(LBH-TZ0410), 哈尔滨市科技创新人才资助课题(2013RFXXJ016), 中国博士后特别资助(2015T80328)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61571148), China Postdoctoral Science Foundation (2014M550182), Heilongjiang Province Postdoctoral Special Foundation (LBH-TZ0410), Harbin Science and Technology Innovation Talents (2013RFXXJ016), China Postdoctoral Special Funding (2015T80328)

信号为复数形式, 因此之前的实数算法不能直接被应用。为此, 文献[15]提出了一个简单的方法, 将复数信号分解为实部和虚部两部分, 从而将复数表达式转换为实数的形式。但是该方法仅仅将信号的实部与虚部视为两个独立的分量, 没有充分利用同一信号的实部与虚部之间的联系, 所以性能还有待提升。文献[16]在文献[15]的基础上改善了算法, 利用同一信号实部与虚部间具有的相同稀疏形式提出了多测量矢量贝叶斯压缩感知算法(Complex Multi Task Bayesian Compressive Sensing, CMTBCS)算法, 算法估计的精确度得到了一定的改善。

本文进一步考虑了多个复数测量矢量信号之间的时域相互关系, 提出了针对复数信号的稀疏贝叶斯算法 CTSBL。首先将复数信号分解为实部与虚部两部分, 然后将多拍信号间的时域相干性转化为单拍的块稀疏信号的块内相互关系, 通过利用块内相互关系提高算法的估计精度。文章首先介绍了复数多测量矢量信号模型, 然后利用贝叶斯原理推导出估计信号的后验概率分布, 之后通过 Evidence 最大化方法估计出超参数, 将估计的超参数代入后验概率分布中, 从而得到未知信号的估计结果。理论分析和仿真结果表明了相较于 CMTBCS 算法和 BOMP, 本文提出的方法具有更好的估计性能。

2 信号模型

对于单一测量矢量模型, 其典型的复数域模型表示为

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (1)$$

这里, $\Phi \in \mathbb{C}^{N \times M}$ 为已知字典矩阵, 字典 Φ 中的各列均线性独立, 且 $N \ll M$ 。 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 是实验可获得的测量数据矢量, \mathbf{v} 是未知的噪声矢量。主要任务是估计加权矢量 \mathbf{x} 。为了确保得到唯一的全局解, \mathbf{x} 中非零元个数必须小于一个上限值, 即 \mathbf{x} 应该是一个稀疏矢量。

在实际应用中, 例如角度估计方面, 可以得到一系列的测量数据。因此单一测量矢量(Single Measurement Vector, SMV)模型被拓展到多测量矢量(Multiple Measurement Vector, MMV)模型。与单一测量矢量模型类似, 在多测量矢量模型中的未知信号源矩阵的非零行个数需要小于一个上限值, 从而确保能够恢复出一个唯一的解, 信号源因此被称为行稀疏信号。多测量矢量模型的复数域表达式一般为

$$\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} + \mathbf{V} \quad (2)$$

这里, $\mathbf{Y} \triangleq [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_L] \in \mathbb{C}^{N \times L}$, 是由 L 拍测量矢量构成的一个已知测量矩阵。 $\mathbf{X} \triangleq [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_L] \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 是一个未知的恢复矩阵, \mathbf{V} 是未知的噪声矩

阵。通过下面提出的算法可以准确地恢复出未知矩阵 \mathbf{X} 。

3 基于贝叶斯原理的复数多测量矢量信号估计框架

假设信号源 X_i 之间是独立的, 并且各个信号源均服从复高斯分布。即

$$p(\mathbf{X}_i) \sim \text{CN}(0, \mathbf{C}_{xx}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

这里, \mathbf{C}_{xx} 为复信号的相关矩阵。假设同一信号源的多拍采样数据中, 复数信号的实部与虚部具有相同的方差。由于复数信号的实部与虚部是同一个复信号的两个正交分量, 它们通常表现为同时为 0 或同时不为 0。因此可以将信号的实部与虚部分开, 这样可以明显地增加被估计信号的稀疏度, 改善稀疏信号恢复性能。

将复数模型 $\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} + \mathbf{V}$ 通过如下变换变为实数模型 $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{V}}$ 。其中,

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{Y}) \\ \text{Im}(\mathbf{Y}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times L}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\Phi) & -\text{Im}(\Phi) \\ \text{Im}(\Phi) & \text{Re}(\Phi) \end{bmatrix},$$

$\bar{\mathbf{X}} = [\text{Re}(\mathbf{X}); \text{Im}(\mathbf{X})] \in \mathbb{R}^{2M \times 1}$, $\bar{\mathbf{V}} = [\text{Re}(\mathbf{V}); \text{Im}(\mathbf{V})]$ 这里, $\bar{\mathbf{X}}_i$ 服从实数多维高斯分布, $\bar{\mathbf{X}}_i \sim N(0, \gamma_i \mathbf{B}_i)$, $i = 1, 2, \dots, 2M$ 。其中 γ_i 为非负的超参, 控制着 \mathbf{x} 的行稀疏。当 γ_i 为 0 时, 相应地 $\bar{\mathbf{X}}_i$ 也为 0。 \mathbf{B}_i 为一正定的矩阵, 表示 $\bar{\mathbf{X}}_i$ 的相关结构。由前文可知, 复数信号的实部与虚部具有相同的稀疏性, 并且具有相同的方差, 所以两者的控制参数 γ_i 也相同, 这里表示为 $\gamma_i = \gamma_{i+M}$ 。

通过矢量化, 即 $\mathbf{z} = \text{vec}(\bar{\mathbf{Y}}^T) \in \mathbb{R}^{2NL \times 1}$, $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_L, \mathbf{s} = \text{vec}(\bar{\mathbf{X}}^T) \in \mathbb{R}^{2ML \times 1}, \mathbf{n} = \text{vec}(\bar{\mathbf{V}}^T) \in \mathbb{R}^{2NL \times 1}$, 将 MMV 模型转换为分块的 SMV 模型。

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{s} + \mathbf{n} = \left[\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{I}_L \quad \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{I}_L \quad \dots \quad \mathbf{D}_{2M} \otimes \mathbf{I}_L \right] \cdot \left[\mathbf{s}_1^T \quad \mathbf{s}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{s}_{2M}^T \right]^T + \mathbf{n} \quad (4)$$

这里, \mathbf{D}_i 表示 $\boldsymbol{\psi}$ 的第 i 列, $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ 为 \mathbf{s} 的第 i 块, $\mathbf{s}_i = \bar{\mathbf{X}}_i^T$ 。所以 \mathbf{X} 中 K 个非零行经过实部与虚部分离在 $\bar{\mathbf{X}}$ 中变为 $2K$ 个非零行, 之后经过矢量化在 \mathbf{s} 中变为 $2K$ 个非零块。因此 \mathbf{s} 是块稀疏的。

假设噪声矢量 \mathbf{n} 中的各元素是相互独立的, 且均满足实高斯分布, 即 $p(n_i) \sim N(0, \sigma^2)$ 。此处 n_i 为 \mathbf{n} 的第 i 个元素, σ^2 为其方差。对于该模型, 其高斯似然函数为

$$p(\mathbf{z} | \mathbf{s}; \sigma^2) \sim N_{z|\mathbf{s}}(\boldsymbol{\psi} \mathbf{s}, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (5)$$

其中, \mathbf{s} 的先验信息为

$$p(\mathbf{s}; \gamma_i, \mathbf{B}_i, \forall i) \sim N_s(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_0) \quad (6)$$

这里, Σ_0 为

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \mathbf{B}_1 & & & \\ & \gamma_2 \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{2M} \mathbf{B}_{2M} \end{pmatrix} \quad (7)$$

由前文可知 $\gamma_i = \gamma_{i+M}$, $i = 1, 2, \dots, M$ 。

根据贝叶斯原理可知 \mathbf{s} 的后验概率密度分布也是高斯分布:

$$p(\mathbf{s} | \mathbf{z}; \sigma^2, \gamma_i, \mathbf{B}_i, \forall i) = N_s(\boldsymbol{\mu}_s, \Sigma_s) \quad (8)$$

其中, 均值为

$$\boldsymbol{\mu}_s = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma_s \mathbf{D}^T \mathbf{z} \quad (9)$$

它的协方差为

$$\Sigma_s = \left(\Sigma_0^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{D}^T \mathbf{D} \right)^{-1} \quad (10)$$

所以当超参数 $\sigma^2, \gamma_i, \mathbf{B}_i, \forall i$ 给定时, \mathbf{s} 的最大后验估计为

$$\mathbf{s}^* \triangleq \boldsymbol{\mu}_s = \Sigma_0 \mathbf{D}^T \left(\sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{D} \Sigma_0 \mathbf{D}^T \right)^{-1} \mathbf{z} \quad (11)$$

从式(11)可以看出 \mathbf{s}^* 的块稀疏性由 Σ_0 中的 γ_i 所控制, 在贝叶斯学习过程中, 当 $\gamma_i = 0$ 时, \mathbf{s}^* 中相应的第 i 块也变为零, 所以在字典矩阵中对应的 $\mathbf{D}_i \otimes \mathbf{I}_L$ 就可以被剔除出去。但在上述贝叶斯学习过程中, 超参数事先没有给定, 因此需要通过第 4 节的方法来对超参数进行估计。

4 贝叶斯学习过程中超参数的估计

为了确定超参数, 一般采用 Evidence 最大化或者是 Type-II 最大似然方法。通过求观测数据 \mathbf{z} 的边缘概率密度函数, 再进行最大似然估计, 可估计所需参数。由于各个信号源 $\bar{\mathbf{X}}_i$ 具有不同的时域相关性, 所以各自对应不同的 \mathbf{B}_i 。但在有限的具有过多的参数会导致过拟合, 所以在本文假设所有信号源具有相同的相互关系 \mathbf{B} ^[17]。这样我们可以通过期望最大化 (Expectation Maximization, EM) 算法来最大化边缘似然函数 $p(\mathbf{z}; \mathbf{B}, \sigma^2, \gamma_i)$, 这等效于对其对数似然函数取最大值^[18,19]。本文基于复数统计信号处理的估计理论, 将 EM 算法拓展到了复数领域用来解决复数信号^[20]。有效的对数似然函数为 $L(\mathbf{B}, \sigma^2, \gamma_i) = \lg P(\mathbf{z} | \mathbf{B}, \sigma^2, \gamma_i) \propto \mathbf{z}^T \Sigma_z^{-1} \mathbf{z} + \lg |\Sigma_z|$ (12) 此处, $\Sigma_z = \sigma^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\psi} \Sigma_0 \boldsymbol{\psi}^T$ 。在 EM 算法中 \mathbf{s} 被视为隐藏变量, 对似然函数求最大化为

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{B}, \sigma^2, \gamma_i) &= E_{\mathbf{z} | \mathbf{s}} \left[\lg p(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{B}, \sigma^2, \gamma_i) \right] \\ &= E_{\mathbf{z} | \mathbf{s}} \left[\lg p(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \sigma^2) \right] \\ &\quad + E_{\mathbf{z} | \mathbf{s}} \left[\lg p(\mathbf{s}; \gamma_i, \mathbf{B}) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

为了估计 γ_i, \mathbf{B} , 从式(13)可看到其右端第 1 项与估计参数无关, 可以忽略。所以似然函数可以简化为 $Q(\mathbf{B}, \gamma_i) = E_{\mathbf{s} | \mathbf{z}} [\lg p(\mathbf{s}; \gamma_i, \mathbf{B})]$ 。式中,

$$\begin{aligned} \lg p(\mathbf{s}; \gamma_i, \mathbf{B}) &\propto -\frac{1}{2} \lg (|\boldsymbol{\Pi}|^L |\mathbf{B}|^{2M}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\Pi}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}) \mathbf{s} \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\boldsymbol{\Pi} \triangleq \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2M})$ 。因此可知:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{B}, \gamma_i) &\propto -\frac{L}{2} \lg (|\boldsymbol{\Pi}|) - M \lg (|\mathbf{B}|) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\boldsymbol{\Pi}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}) (\Sigma_s + \boldsymbol{\mu}_s \boldsymbol{\mu}_s^T) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

对于式(15)分别取关于 γ_i ($i = 1, 2, \dots, 2M$) 和 \mathbf{B} 的微分, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \gamma_i} &= -\frac{L}{\gamma_i} + \frac{1}{2\gamma_i^2} \text{Tr} \left(\mathbf{B}^{-1} \left(\Sigma_s^i + \boldsymbol{\mu}_s^i (\boldsymbol{\mu}_s^i)^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Sigma_s^{i+M} + \boldsymbol{\mu}_s^{i+M} (\boldsymbol{\mu}_s^{i+M})^T \right) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_s^i &\triangleq \boldsymbol{\mu}_s((i-1)L+1:iL) \\ \Sigma_s^i &\triangleq \Sigma_s((i-1)L+1:iL, (i-1)L+1:iL) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{B}} = -M \mathbf{B}^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2M} \frac{\mathbf{B}^{-1} \left(\Sigma_s^i + \boldsymbol{\mu}_s^i (\boldsymbol{\mu}_s^i)^T \right) \mathbf{B}^{-1}}{\gamma_i} \quad (18)$$

由上述可知,

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(\text{ne})} &= \text{Tr} \left[\mathbf{B}^{-1} \left(\Sigma_s^i + \boldsymbol{\mu}_s^i (\boldsymbol{\mu}_s^i)^T + \Sigma_s^{i+M} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \boldsymbol{\mu}_s^{i+M} (\boldsymbol{\mu}_s^{i+M})^T \right) \right] / (2L) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{B}^{(\text{ne})} = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{2M} \frac{\Sigma_s^i + \boldsymbol{\mu}_s^i (\boldsymbol{\mu}_s^i)^T}{\gamma_i} \quad (20)$$

同理, 对于超参数 σ^2 的估计, 可以对简化后的似然函数 $Q(\sigma^2)$ 关于 σ^2 求微分。可以得到

$$\sigma^{2(\text{ne})} = \frac{\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\mu}_s\|_2^2 + \hat{\sigma}^2 [2ML - \text{Tr}(\Sigma_s \Sigma_0^{-1})]}{2NL} \quad (21)$$

其中, $\hat{\sigma}^2$ 表示在上一次迭代过程中估计的 σ^2 值。下面对算法的各步骤进行总结:

(1) 将测量矢量的复数模型经过实部, 虚部分离及矢量化变换为单一测量矢量的实数模型 $\mathbf{z} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{s} + \mathbf{n}$;

(2) 新的实数模型满足高斯似然分布 $p(\mathbf{z} | \mathbf{s}; \sigma^2) \sim N_{2L}(\boldsymbol{\psi} \mathbf{s}, \sigma^2 \mathbf{I})$;

(3) 设置贝叶斯学习过程中遇到的超参数的初始值 $\sigma^2, \gamma_i, \mathbf{B}_i$, 及迭代停止条件;

(4) 根据贝叶斯原理求得未知信号 \mathbf{s} 的后验概率分布及其均值 $\boldsymbol{\mu}_s$ 与协方差表达式 Σ_s ;

(5) 利用 EM 算法求得新的超参数;

$$\begin{aligned}\gamma_i^{(\text{ne})} &= \text{Tr} \left[\mathbf{B}^{-1} \left(\boldsymbol{\Sigma}_s^i + \boldsymbol{\mu}_s^i (\boldsymbol{\mu}_s^i)^\text{T} + \boldsymbol{\Sigma}_s^{i+M} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \boldsymbol{\mu}_s^{i+M} (\boldsymbol{\mu}_s^{i+M})^\text{T} \right) \right] / (2L) \\ \mathbf{B}^{(\text{ne})} &= \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{2M} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_s^i + \boldsymbol{\mu}_s^i (\boldsymbol{\mu}_s^i)^\text{T}}{\gamma_i} \\ \sigma_2^{(\text{ne})} &= \frac{\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\mu}_s\|_2^2 + \hat{\sigma}^2 [2ML - \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_s \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1})]}{2NL}\end{aligned}$$

判断结果是否满足迭代停止条件, 若不满足重复迭代更新步骤(4)和步骤(5);

(6) 获得未知信号 \mathbf{s} 最终的估计结果 $\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu}_s$ 。

5 仿真实验与分析

在仿真中, 所有实验由 500 个独立实验组成。字典矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的大小为 30×150 , 并且满足独立同分布复高斯分布, 假设信号长度 M 为 150, 信号源数 K 为 7, 测量快拍数 L 为 4。各个信号源均满足一阶自回归过程(AR1), 时序相关性为 0.9。噪声信号 \mathbf{V} 满足复数零均值高斯白噪声。信噪比的定义为 $\text{SNR}(\text{dB}) \triangleq 20 \lg(\|\boldsymbol{\Phi} \mathbf{X}\|_2 / \|\mathbf{V}\|_2)$ 。仿真中信噪比设为 10 dB, 从图 1 中可以看出本文算法能精确地恢复出原始信号, 而 CMTBCS 算法表现出较差的估计性能, 这是因为它没有充分利用多拍信号的时域相关性。

从图 1 可看出本文算法 CTSBL 相较于 CMTBCS 算法具有更好的恢复性能。但和 BOMP 算法比较, 两者具有相近的恢复性能。为了进一步探究该算法在强噪声条件下的性能, 下面考虑让信噪比从 0 到 25 dB 变化, 比较各个算法的性能。实验中定义标准均方根误差 (Mean Square Error, MSE) 为 $\|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}\|_2^2 / \|\mathbf{s}\|_2^2$ 来衡量估计性能。这里 $\hat{\mathbf{s}}$ 为真实信号 \mathbf{s} 的估计值。

在图 2 中可以看出本文算法相较于 CMTBCS

算法在低信噪比下具有更好的性能, 在高信噪比时两者具有相似的估计性能。相较于 BOMP, 本文算法具有更好的估计性能。

接下来, 将实验中的信噪比固定为 15 dB, 数据长度 N 从 10 到 60 变化, 比较各个算法的性能。在图 3 中可以看到本文算法与 CMTBCS 算法均可在数据长度为 20 时准确的估计出信号, 相较于 BOMP 算法有更好的估计性能。

为了对算法的复杂度进行比较, 先分析各个算法的运算量大小。在 BOMP 算法中, 最耗时的操作是对字典中的原子进行搜索。对于文中提到的信号模型, 算法的每次迭代将需要 $O(MN)$ 的运算复杂度, 则该算法总的运算量为 $O(K_s MN)$, 其中 K_s 为 BOMP 的迭代次数。对于 CMTBCS 算法和本文提出的 CTSBL 算法, 其运算量主要集中于 EM 算法的迭代过程中, 也就是集中于式(17), 式(19), 式(20)和式(21)中。其中式(17)中计算 $\boldsymbol{\Sigma}_s^i$ 的对角线元素的运算复杂度为 $O(KM^2N)$, 其余式子的计算复杂度分别为 $O(NL)$, $O(MN)$, $O(KMNL)$ 。因而当 $L \leq M$ 时, 总的运算复杂度为 $O(KM^2N)$, 则这两种算法总的运算量为 $O(KM^2NK_{it})$, 其中, K_{it} 为 EM 算法的迭代次数。下面通过具体的实验来比较各算法在时间复杂度上的差别。实验中将信噪比设为 10 dB, 数据长度为 30, 其它条件与之前实验条件相同, 对于各个算法的平均运行时间进行了对比。实验结果显示, BOMP 算法平均运行时间为 0.06 s, CMTBCS 算法平均运行时间为 0.901 s, 本文提出的 CTSBL 算法的平均运行时间为 1.213 s。经过数据分析, 可以看出 BOMP 在运行时间上有明显的优势, 本文算法与 CMTBCS 算法性能相近, 其实时性有待改善。

6 总结

基于贝叶斯压缩感知的信号恢复问题, 已知的

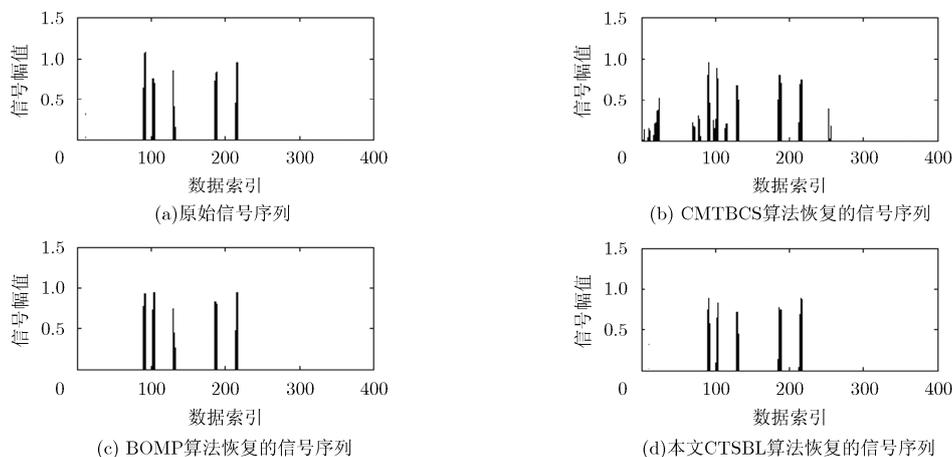


图 1 原始信号序列与各算法恢复信号序列的比较

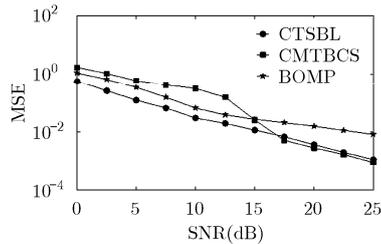


图 2 不同信噪比条件下各算法的恢复性能

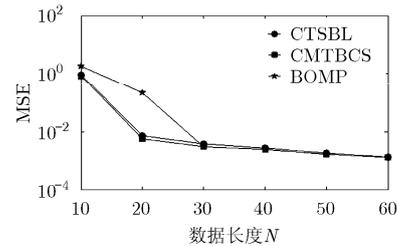


图 3 不同数据长度条件下各个算法的恢复性能

大部分算法无法处理实际应用中的复数信号, 为此本文提出了一种能处理复数数据的贝叶斯压缩感知算法, 它将稀疏的多拍信号转化为单拍情况下的块稀疏信号, 并利用块内信号源的相互关系, 来提升算法的估计精度, 从而有效地恢复出多测量矢量模型的稀疏权值。理论分析和仿真结果表明了本文算法相较于 BOMP, CMTBCS 等算法, 由于充分利用了多拍信号的相互关系, 因此在估计性能上有明显的优势。

参 考 文 献

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306. doi: 10.1109/TIT.2006.871582.
- [2] ELAD M. *Sparse and Redundant Representations*[M]. New York: Springer, 2010: 1094–1097.
- [3] 王天云, 于小飞, 陈卫东. 基于稀疏贝叶斯学习的无源雷达高分辨成像[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(5): 1023–1030. doi: 10.11999/JEIT140899.
WANG T Y, YU X F, and CHEN W D. High-resolution imaging of passive radar based on sparse Bayesian learning[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(5): 1023–1030. doi: 10.11999/JEIT140899.
- [4] 孙磊, 王华力, 许广杰. 基于稀疏贝叶斯学习的高效 DOA 估计方法[J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(5): 1196–1201. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01429.
SUN L, WANG H L, and XU G J. Efficient direction-of-arrival estimation via sparse Bayesian learning[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(5): 1196–1201. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01429.
- [5] CHEN S and DONOHO D L. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(1): 33–61. doi: 10.1137/S1064827596304010.
- [6] THEIS F J, JUNG A, PUNTONET C G, et al. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 15(2): 419–439.
- [7] TIBSHIRANI R. Regression shrinkage and subset selection with the Lasso[J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 1996, 58(1): 267–288.
- [8] HUANG J and ZHANG T. The benefit of group sparsity[J]. *Annals of Statistics*, 2009, 38(4): 1978–2004. doi: 10.1214/09-AOS778.
- [9] YUAN M and LIN Y. Model selection and estimation in regression with grouped variables[J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2006, 68(1): 49–67. doi: 10.1111/j.1467-9868.2005.00532.x.
- [10] FU Y L, LI H F, ZHANG Q H, et al. Block-sparse recovery

via redundant block OMP[J]. *Signal Processing*, 2014, 97(7): 162–171. doi:10.1016/j.sigpro.2013.10.030.

- [11] LI B, SHEN Y, LI J, et al. Sensing and measurement dictionaries design for block OMP algorithm[J]. *Electronics Letters*, 2014, 50(19): 1351–1353. doi: 10.1049/el.2014.2000.
- [12] ZHANG Z and RAO B D. Sparse signal recovery with temporally correlated source vectors using sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(5): 912–926. doi: 10.1109/JSTSP.2011.2159773.
- [13] WANG W, JIA M, and GUO Q. A compressive sensing recovery algorithm based on sparse Bayesian learning for block sparse signal[C]. 2014 International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications, Sydney, 2014: 547–551. doi: 10.1109/WPMC.2014.7014878.
- [14] 王峰, 向新, 易克初, 等. 基于隐变量贝叶斯模型的稀疏信号恢复[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(1): 97–102. doi: 10.11999/JEIT140169.
WANG F, XIANG X, YI K C et al. Sparse signals recovery based on latent variable Bayesian models[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(1): 97–102. doi: 10.11999/JEIT140169.
- [15] CARLIN M, ROCCA P, OLIVERI G, et al. Directions-of-arrival estimation through Bayesian compressive sensing strategies[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 2013, 61(7): 3828–3838. doi: 10.1109/TAP.2013.2256093.
- [16] WU Q, ZHANG Y D, AMIN M G, et al. Complex multitask Bayesian compressive sensing[C]. 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Florence, 2014: 3375–3379. doi: 10.1109/ICASSP.2014.6854226.
- [17] CAWLEY G C and TALBOT N L C. Preventing over-fitting during model selection via Bayesian regularisation of the hyper-parameters[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2007, 8(4): 841–861.
- [18] ZHANG Z and RAO B D. Extension of SBL algorithms for the recovery of block sparse signals with Intra-Block correlation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(8): 2009–2015. doi: 10.1109/TSP.2013.2241055.
- [19] ZHANG Z and RAO B D. Recovery of block sparse signals using the framework of block sparse Bayesian learning[C]. 2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Kyoto, Japan, 2012: 3345–3348. doi: 10.1109/ICASSP.2012.6288632.
- [20] KAY S M. Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory[J]. *Technometrics*, 1995, 37(4): 465–466.

王 伟: 男, 1979 年生, 教授, 研究方向为雷达信号处理。

唐伟民: 男, 1992 年生, 硕士生, 研究方向为雷达信号处理。

王 犇: 男, 1990 年生, 博士生, 研究方向为雷达信号处理。