

无窗全相位 FFT/FFT 相位差频移补偿频率估计器

黄翔东* 王越冬 靳旭康 吕卫
(天津大学电子信息工程学院 天津 300072)

摘要: 为提高经典全相位 FFT/FFT 相位差频率估计器的精度, 该文提出无窗模式和频移补偿两项改进措施。借助谱分析试验和理论分析, 该文证明无窗模式相比于原有加窗模式更能增强全相位 FFT 和 FFT 的峰值谱幅度, 从而增强抵御噪声的能力; 借助频移补偿措施, 使得无窗模式下的 apFFT 和 FFT 总能工作在小频偏状态, 从而有助于提取准确的相位差信息。仿真实验表明, 该文的改进估计器, 对于单频测量情况, 其频率估计方差紧靠克拉美-罗限, 对于多频情况, 相比于现有的 Tsui 内插估计器, 在低信噪比环境下表现出更好的抗干扰性能, 因而具有较广泛的应用前景。

关键词: 频率估计; 克拉美-罗下限; 频移补偿; 全相位 FFT; 无窗模式

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)05-1135-08

DOI: 10.11999/JEIT151041

No-windowed apFFT/FFT Phase Difference Frequency Estimator Based on Frequency-shift & Compensation

HUANG Xiangdong WANG Yuedong JIN Xukang LÜ Wei

(School of Electronic Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In order to enhance the accuracy of the classical all-phase FFT/FFT phase-difference frequency estimator, two improvement measures are proposed: no-windowed mode and frequency-shift & compensation. By means of spectral analysis trials and theoretical analysis, it is proved that the no-windowed mode outperforms the windowing mode in highlighting the peak spectral bins of apFFT and FFT, thereby enhancing the estimator's robustness to noise contamination. By means of frequency-shift & compensation, the no-windowed apFFT and FFT can always work in the state of small frequency deviation, which helps to extract accurate information of phase difference. Simulation results show that, for the proposed estimator, its frequency estimate variance approximates the Cramer-Rao lower bound. Moreover, compared to the Tsui interpolation-based estimator, it also exhibits higher performance of anti-interference in low SNR circumstances, which presents the vast potential for future development.

Key words: Frequency estimate; Cramer-Rao lower bound; Frequency-shift & compensation; All-phase FFT; No-windowed mode

1 引言

频率估计是信号处理的基础课题, 其应用领域非常广泛(如多普勒效应检测^[1]、阵列波达方向估计^[2]、振动分析中的转速测量^[3]等都可转化为频率估计问题)。由于 FFT(Fast Fourier Transform)具有高运算效率的优势, 因而基于 FFT 的频率估计一直是学术界经久不衰的研究课题。

为消除 FFT 的栅栏效应, 人们常常通过对 FFT

峰值谱附近的谱线做内插^[4-7]来提高估计精度。然而文献[5]指出, FFT 内插估计器通常是有偏的。为消除该固有偏差, 通常需要采取频移、迭代等措施, 对 FFT 谱峰附近的谱值做进一步修正和细化。如文献[8]提出修正 Rife 算法, 用该算法得到的初始值做一次牛顿迭代后即可得到高精度频率估计结果, 其频率估计方差不但不随信号本身频率波动, 而且还接近克拉美-罗下限(Cramer-Rao lower Bound, CRB)^[9]; 文献[10]指出, 获得 FFT 谱峰位置后, 若借助比值内插措施进一步算出距离谱峰左、右各 0.5 个频率分辨率位置的 DTFT(Discrete Time Fourier Transform)谱值, 就可估算出更精确的谱峰位置, 并将以上过程迭代多次, 则不仅可消除固有偏差,

收稿日期: 2015-09-14; 改回日期: 2016-03-08; 网络出版: 2016-05-05

*通信作者: 黄翔东 xduang@tju.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61271322)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61271322)

而且在任意频偏情况下其频率估计方差可完全到达克拉美-罗限。

与内插法不同,相位差估计法^[11-14]仅需单根峰值谱线上的相位信息,即可得到频偏估计结果。且相位差估计器无需引入频移、修正措施,其频率估计就是无偏的^[13]。在有些对相位参数敏感场合,如电力系统谐波分析^[15]、光学工程^[16]等,相位差法得到了广泛应用。

全相位FFT(all-phase FFT, apFFT)因兼备优良的抑制谱泄漏性能和高精度测相性能(即“相位不变性”^[17]),故非常适合做频率估计。文献[11]从apFFT与FFT的相位差中提取了精确的频率信息,提出一种相位差频率估计法(为突出其特征,本文称之为经典apFFT/FFT相位差法),该方法的值已在低频实信号频率估计^[12]、超声波时间测量^[18]、水声波束生成^[19]等领域得到证实。为提升上述领域的检测精度,本文旨在对经典apFFT/FFT相位差法做根本改进。

需指出的是,对于单频信号频率估计,经过国内外学者长年学术积累,其精度已经不存在可以提升的空间(如文献[10]的Tsui估计器的频率估计方差已经到达了CRB),然而对于多频信号的频率估计,因FFT谱泄漏会造成各频率成分的谱间干扰,使得现有的FFT内插估计器产生新的固有偏差,导致其精度出现不同程度的下降,故仍有些工作可以完善。因而对经典apFFT/FFT相位差估计器的改进工作有两方面:(1)提升该估计器的精度,使之在单频情况下逼近CRB(文献[11,12]的经典apFFT/FFT相位差估计器距离CRB还有一定距离);(2)使该估计器具备对多频信号频率估计的适应性。本文将解决以上问题,指出信号的频率偏离和apFFT/FFT的加窗方式对估计器精度有决定性影响,故分别用无窗apFFT和无窗FFT取代文献[11,12]中的双窗apFFT和加窗FFT,并且引入频移补偿措施对原估

计器做根本改进,此外还提出了相位差整周模糊的解决措施,提高了其实用性。数值模拟实验表明,本文提出的改进措施,可以实现上述两个目标。

2 经典apFFT/FFT相位频率估计法

2.1 全相位FFT

图1给出了apFFT谱分析的两个步骤:

步骤1 用长为 $(2N-1)$ 的卷积窗 w_c 对输入数据 $x(n)$ 加权,然后将间隔为 N 的数据两两叠加(中间元素除外)而形成 N 个数据 $y(0), y(-1), \dots, y(-N+1)$;

步骤2 对 $y(0), y(-1), \dots, y(-N+1)$ 做FFT得离散谱 $Y(k)$ 。

图1中, w_c 是长为 N 的“前窗” f 和翻转的“后窗” b 卷积得到的长为 $(2N-1)$ 的卷积窗^[17],即

$$w_c(n) = f(n) * b(-n), \quad n \in [-N+1, N-1] \quad (1)$$

令 R_N 表示矩形窗,若 $f = b = R_N$,则称图1为无窗apFFT;若 $f = b \neq R_N$,则称为双窗apFFT。广义上而言,无窗apFFT可看成是双窗apFFT取 $f = b = R_N$ 时的特殊情况。

2.2 apFFT/FFT相位差频率估计器

不妨把前窗 f 的傅里叶变换表示为幅度和相位分离的形式,即

$$F(j\omega) = F_g(\omega) e^{-j(N-1)\omega/2} \quad (2)$$

对于 $\{x(n) = a_0 e^{j(\omega_0 n + \theta_0)}, 0 \leq n \leq N-1\}$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi(k^* + \delta)/N$, $k^* \in \mathbb{Z}^+$, $-0.5 < \delta \leq 0.5$,其传统加窗FFT谱 $X(k)$ 为

$$X(k) = a_0 F_g((k^* - k + \delta)\Delta\omega) e^{j[\theta_0 + \frac{N-1}{2}(k^* + \delta - k)\Delta\omega]}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \Delta\omega = 2\pi/N \quad (3)$$

文献[17]指出: $\{x(n) = a_0 e^{j(\omega_0 n + \theta_0)}, -N+1 \leq n \leq N-1\}$ 的双窗apFFT幅度谱与传统加窗FFT幅度谱的平方成正比,而相位谱与频率无关,等于输入中间样

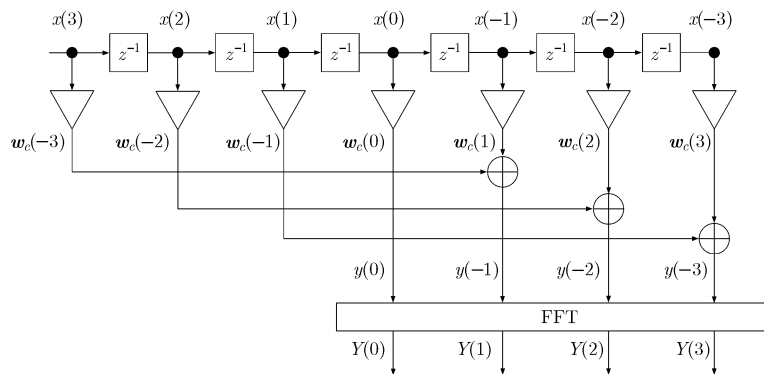


图1 全相位FFT谱分析的流程($N=4$)

点的瞬时相位, 即

$$Y(k) = a_0 F_g^2 \left((k^* - k + \delta) \Delta\omega \right) e^{j\theta_0}, \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (4)$$

在峰值谱 $k = k^*$ 处, 则其传统加窗 FFT 为

$$X(k^*) = a_0 F_g \left(\delta \Delta\omega \right) e^{j\left[\theta_0 + \frac{N-1}{2}\delta\Delta\omega\right]} \quad (5)$$

其 apFFT 的峰值谱为

$$Y(k^*) = a_0 F_g^2 \left(\delta \Delta\omega \right) e^{j\theta_0} \quad (6)$$

令 $\varphi_X(k^*)$, $\varphi_Y(k^*)$ 分别表示峰值谱线上观测到的 apFFT 和 FFT 相位值, 则取式(5)与式(6)的相位差, 即可得频率偏离值。

$$\delta = [\varphi_X(k^*) - \varphi_Y(k^*)] / \tau = \Delta\tilde{\varphi} / \tau, \quad \tau = (N-1)/2 \quad (7)$$

在实际应用中, 要考虑到峰值谱观测相位和 $\varphi_X(k^*)$ 的取值范围都是有限的, 即满足 $\varphi_X(k^*) \in [-\pi, \pi]$, $\varphi_Y(k^*) \in [-\pi, \pi]$, 故

$$-2\pi \leq \Delta\tilde{\varphi} \leq 2\pi \quad (8)$$

因而式(7)的观测相位差 $\Delta\tilde{\varphi}$ 有可能存在整周模糊问题。为消除模糊, 考虑频偏值满足 $-0.5 < \delta \leq 0.5$, 需对 $\Delta\tilde{\varphi}$ 做如式(9)调整:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \Delta\tilde{\varphi}, & \Delta\tilde{\varphi} \in [-\pi, \pi] \\ \Delta\tilde{\varphi} - 2\pi, & \Delta\tilde{\varphi} > \pi \\ \Delta\tilde{\varphi} + 2\pi, & \Delta\tilde{\varphi} < -\pi \end{cases} \quad (9)$$

显然 $\Delta\varphi \in [-\pi, \pi]$, 进而频偏估计和频率估计表达式分别为

$$\hat{\delta} = \Delta\varphi / \tau, \quad \hat{f}_0 = (k^* + \hat{\delta}) / N \quad (10)$$

则实际可行的 apFFT/FFT 相位差频率估计法的流程如图 2 所示。

图 2 的乘法计算复杂度分析如下: 给定 $2N-1$ 个样本, 若 N 为 2 的幂次方, 则加窗 FFT 其加窗操作耗费 N 次实数乘法, 其 FFT 耗费 $N/2 \times \log_2 N$ 次复数乘法计算(即对应 $2N \log_2 N$ 次实数乘法计算), 故加窗 FFT 共耗费 $(2N \log_2 N + N)$ 次实数乘法计算。而双窗 apFFT 包括 1 次长度为 $2N-1$ 的实数加窗计算和 1 次 FFT 计算, 故耗费 $(2N-1 + 2N \log_2 N)$ 次实数乘法计算, 相位调整不涉及乘法计算, 式(10)的频偏估计仅需做 1 次实数乘法计算, 故其耗费的实数乘法总数是 $(3N + 4N \log_2 N)$ 次。

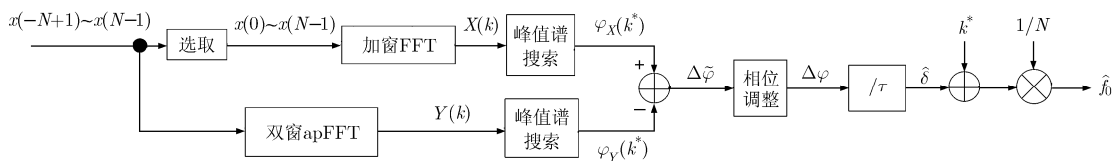


图 2 apFFT/FFT 相位差频率估计流程

3 加窗模式和信号频偏对精度的影响

3.1 两种加窗模式下的主峰幅度随频偏的变化

从图 2 流程可看出, apFFT/FFT 相位差法与文献[4-7]给出的基于谱线内插的估计器有所不同, 这些内插谱校正器除了用到峰值谱外, 还必须利用附近 1~2 根旁谱线信息, 而图 2 的相位差法仅需单根峰值谱线 ($k = k^*$ 处) 的 apFFT/FFT 相位信息, 无需旁谱线参与。这意味着, 应尽量使得能量集中在单根主峰值谱线上, 才可增强估计器的抗噪性能和精度。

ApFFT 和 FFT 的谱峰幅度及泄漏程度, 既与频偏值 δ 有关, 又与加窗类型有关。研究幅值为 1 的复信号 $\{x(n) = \exp[j(\omega_0 n + \theta_0)], -N+1 \leq n \leq N-1\}$ (其中 $N = 32$, $\omega_0 = (k^* + \delta) \Delta\omega$, $k^* = 3$), 令 δ 分别取 0, 0.1, 0.4, 图 3 给出归一化后的双窗 apFFT 振幅谱(由两个汉明窗卷积而得 w_c)和加汉明窗的 FFT 振幅谱, 图 4 给出归一化后的无窗 apFFT 振幅谱和无窗 FFT 振幅谱。表 1 列出了不同加窗情况下的谱峰幅值。

表 1 不同加窗情况的 apFFT 和 FFT 谱峰幅值

		$\delta = 0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.4$
apFFT	双窗	0.7173	0.7064	0.5606
	无窗	1.0000	0.9676	0.5731
FFT	加窗	0.5256	0.5216	0.4647
	无窗	1.0000	0.9836	0.7570

从图 3, 图 4 和表 1 可总结出 3 个规律:

(1) 无论频偏绝对值 $|\delta|$ 怎样取值, 双窗 apFFT 峰值谱幅度 $|Y(k^*)|$ 和加窗 FFT 峰值谱幅度 $|X(k^*)|$ 都无法取到大的值。甚至当 $\delta=0$ 值, $|Y(k^*)|$ 仅为 0.7173, $|X(k^*)|$ 仅为 0.5256, 与理想值 1 差距较大。

(2) 频偏绝对值 $|\delta|$ 较小时 ($\delta = 0, \delta = 0.1$), 无窗 FFT 谱泄漏较小, 而无窗 apFFT 几乎不存在谱泄漏, $|Y(k^*)|$ 和 $|X(k^*)|$ 都高达 0.96 以上, 接近于理想值 1 ($\delta = 0$ 时, 两者均不存在谱泄漏, $|Y(k^*)|$ 和 $|X(k^*)|$ 都达到理想值 1)。

(3) 当频偏绝对值 $|\delta|$ 较大时 ($\delta = 0.4$), 无论是哪

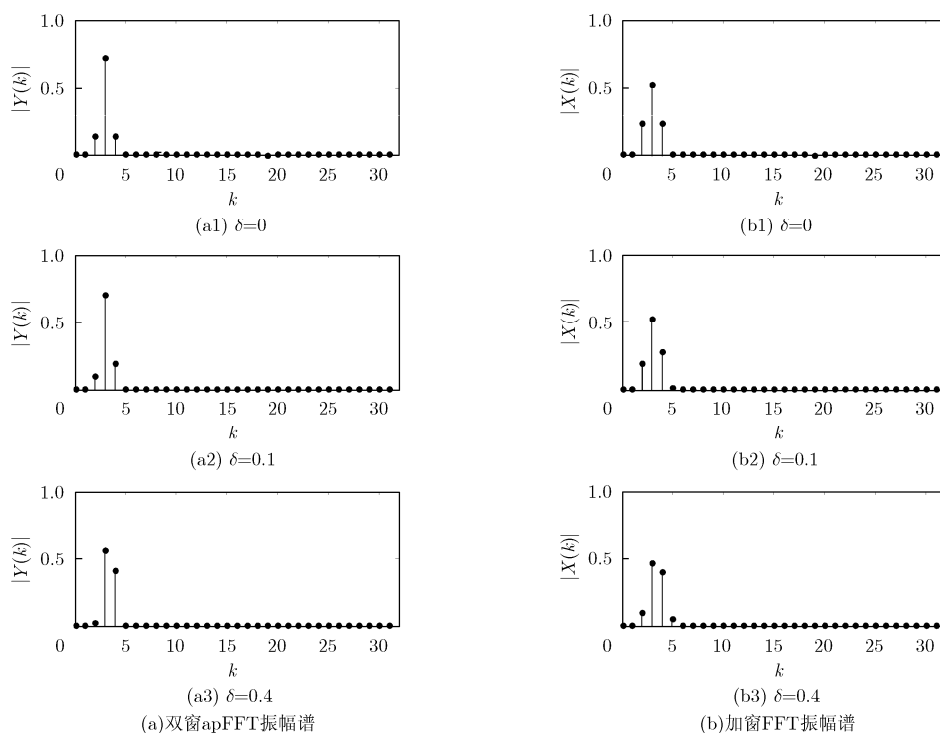


图3 双窗 apFFT 和加窗 FFT 的振幅谱

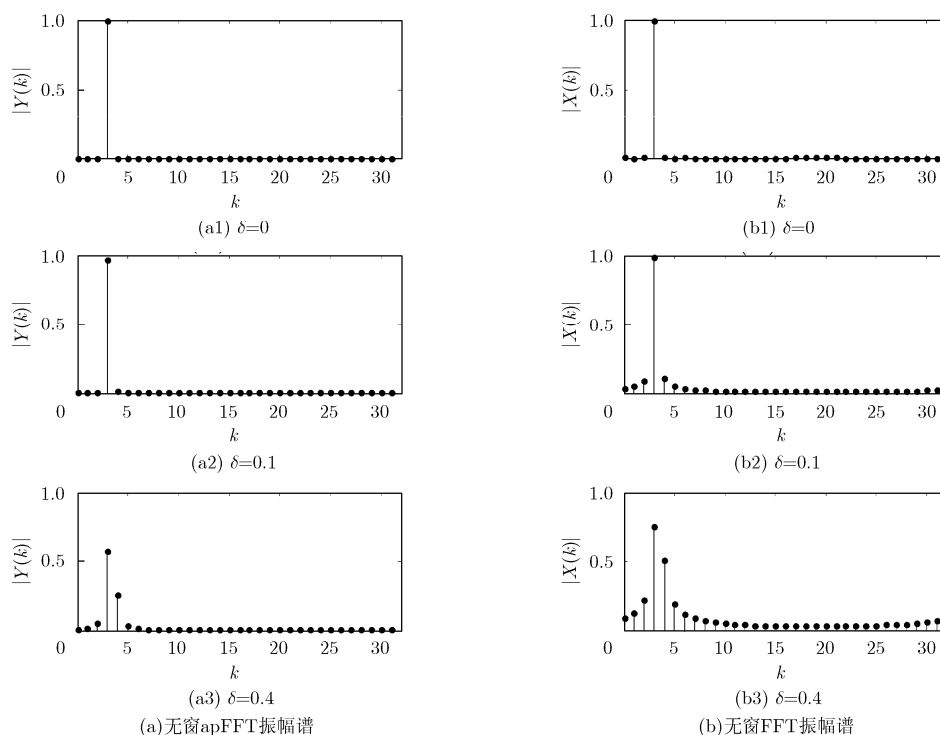


图4 无窗 apFFT 和无窗 FFT 的振幅谱

种加窗情况, apFFT 和 FFT 的谱峰峰值都很小, 大部分能量被分摊到周围的旁谱线上。

需指出, 文献[11,12]的经典 apFFT/FFT 相位差校正法, 都是基于双窗 apFFT 和加窗 FFT 做频率估计的, 虽然加窗可以缩小大频偏时的旁谱线泄

漏范围, 但这对于仅需峰值谱信息的相位差频率估计器来说, 起不到改善作用; 相反, 这要以降低谱峰幅度作为代价, 限制其抵御噪声能力, 降低频率估计精度。

因而为提高频率估计精度, 需要引入两个措施:

(1)在选择加窗模式上,采用无窗 apFFT 和无窗 FFT; (2)尽可能在 $|\delta|$ 较小时取相位差。

3.2 小频偏下无窗情况的主谱线幅值的理论解释

如前所述,无窗 apFFT 可看成是双窗 apFFT 取 f, b 同为矩形窗 R_N 时的特殊情况。众所周知, $f = R_N$ 对应的归一化幅度谱 $F_g(\omega)$ 为^[17]

$$F_g(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} \quad (11)$$

则联立式(5),式(6),其无窗 FFT 峰值谱 $X(k^*)$ 和无窗 apFFT 的峰值谱 $Y(k^*)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} X(k^*) &= a_0 e^{j\theta_0 + \frac{N-1}{2}\delta\Delta\omega} \frac{\sin(\pi\delta)}{N \sin(\pi\delta/N)} \\ Y(k^*) &= a_0 e^{j\theta_0} \frac{\sin^2(\pi\delta)}{N^2 \sin^2(\pi\delta/N)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

当 $\delta \rightarrow 0$ 时,利用等价无穷小关系 $\sin(\alpha) \sim \alpha$,取式(12)中模值的极限有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |X(k^*)| = \lim_{\delta \rightarrow 0} |Y(k^*)| = a_0 \quad (13)$$

即当 $\delta \rightarrow 0$ 时,无窗 FFT 和无窗 apFFT 的谱峰幅值都趋于理想值 a_0 。由于 FFT 具有能量保持性,若谱峰占据了大部分能量,则旁谱线只能分摊到信号能量的很小部分,两者相互衬托,使得峰值谱不易被噪声严重污染,保证了估计器的精度。

4 基于频移补偿的高精度 apFFT/FFT 相位差频率估计器

4.1 估计器流程

结合无窗 apFFT 和无窗 FFT 小频偏情况下能量聚集于峰值谱线的特性,本文提出表 2 所示的改进的 apFFT/FFT 相位差频率估计流程。

注意步骤 2 对不同符号的大频偏有自动调小的作用:即当频偏检测值 $\hat{\delta}_1$ 为较大的正值时,则时域调制操作 $x(n)\exp(-j2\pi\hat{\delta}_1 n/N)$ 使得频谱朝负方向搬移,恰好搬到 $k^*\Delta f = k^*/N$ 附近;当 $\hat{\delta}_1$ 为较大的负值时,则时域调制操作 $x(n)\exp(-j2\pi\hat{\delta}_1 n/N)$ 使得频谱朝正方向搬移,也恰好搬到 $k^*\Delta f$ 附近——无论哪种情况,频移后的信号频偏都趋于 0,使得无窗 apFFT 和无窗 FFT 谱峰都获得大幅值,抵御噪声

干扰的能力比频移前都会提升,再经频偏补偿后 ($\hat{\delta} = \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1$),可获得更高精度。

4.2 估计器计算复杂度分析

步骤 1 中的计算复杂度分析为:由于采用无窗 FFT 替代了图 2 中的加窗 FFT,故耗费的实数乘法次数由 $(3N + 4N \log_2 N)$ 降为 $(2N + 4N \log_2 N)$ 。

步骤 2 中的计算复杂度分析为:由于复序列 $\{s(n) = \exp(-j2\pi\hat{\delta}_1 n/N), -N+1 \leq n \leq N-1\}$ 的实部和虚部均具有对称性(即满足 $\text{Re}[s(n)] = \text{Re}[s(-n)]$, $\text{Im}[s(n)] = -\text{Im}[s(-n)]$ 且 $s(0) = 1$),故构造序列 $s(n)$ 涉及 $2(N-1)$ 次三角函数查表操作,而频移操作 $x(n) \leftarrow x(n)s(n)$ 则耗费 $2N-1$ 次复数乘法计算,即 $8N-4$ 次实数乘法计算。基于此再重复步骤 1(耗费的实数乘法计算量为 $(2N + 4N \log_2 N)$ 次)。

综上所述,表 2 耗费的总计算量为 $2(2N + 4N \log_2 N) + 8N - 4 = (12N + 8N \log_2 N - 4)$ 次实数乘法计算,以及 $2(2N-1)$ 次三角函数查表操作。

相比于同样样本的传统 FFT 内插估计器情况,由于给定 $2N-1$ 个样本,当 N 足够大时,近似为 $2N$ 个样本,则需耗费 $2N \log_2 2N$ 次复数乘法计算量(即 $8N \log_2 2N = 8N + 8N \log_2 N$ 次实数乘法计算量)。而传统 FFT 内插器为消除偏差,仍需做迭代,每次迭代都要做 FFT,再次耗费 $8N + 8N \log_2 N$ 次实数乘法计算,且每次迭代仍要构造复频移序列,耗费 $2(N-1)$ 次三角函数查表计算,故计算复杂度高于表 2 流程情况。

4.3 多频成分情况的频率估计

对于信号包含多频成分的情况,只需逐个搜索 apFFT 和 FFT 的谱峰位置 k^* ,然后再按照表 2 流程依次算出各个谱峰位置对应的频率输出即可。

需指出,对于多频成分的频率估计,无论是传统 FFT 内插法,还是本文提出的改进 apFFT/FFT 相位差法,都存在谱间干扰问题,即必然引入因谱泄漏而造成的新的固有偏差。而本文估计器内嵌了具有良好抑制谱泄漏性能的 apFFT 谱分析,故相比于传统 FFT 内插情况,其固有偏差会稍小些,以下通过仿真实验来证明这点。

5 仿真实验

给定 $2N-1=63$ 个样本(故 $N=32$, $\Delta\omega = 2\pi/N$),考虑两个频率 $\omega_1 = 3.1\Delta\omega$, $\omega_2 = 6.3\Delta\omega$,对两个单频信号 $\{x_i(n) = \exp(j\omega_i n) + \eta_i(n), -N+1 \leq n \leq N-1\}$, $i=1,2$, ($\eta_i(n)$ 为零均值高斯复噪声)分别用经典双窗 apFFT/FFT 相位差法、本文提出的无窗 apFFT/FFT 频移补偿相位差法(阈值 ξ 设为 0.1)和文献[10]的内插估计法,在不同信噪比条件下

表 2 改进的 apFFT/FFT 相位差频率估计流程(单频情况)

步骤 1	输入 $M = 2N - 1$ 个样本 $x(n)$,在无窗 apFFT 和无窗 FFT 框架下,按照图 2 的经典 apFFT/FFT 相位差法流程,得到谱峰位置 k^* 和频偏估计 $\hat{\delta}_1$;
步骤 2	若 $ \hat{\delta}_1 \geq \xi$ (ξ 为给定小阈值),则令 $\hat{\delta}_2 = \hat{\delta}_1$,构造序列 $s(n) = \exp(-j2\pi\hat{\delta}_1 n/N)$, $-N+1 \leq n \leq N-1$, $x(n) \leftarrow x(n)s(n)$,重新执行步骤 1,得到新 $\hat{\delta}_1$,设定 $\hat{\delta} = \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1$;否则满足 $0 \leq \hat{\delta}_1 \leq \xi$,直接设定 $\hat{\delta} = \hat{\delta}_1$;
步骤 3	得到归一化频率估计 $\hat{f}_0 = (k^* + \hat{\delta})/N$ 。

做频率估计(对每种 SNR 情况, 做 1000 次 Monte-Carlo 试验, 并统计均方根误差 RMSE)。图 5(a), 图 5(b)给出测试的 RMSE 曲线并与 CRB 做对照。

文献[9]给出耗费 N 个样本、信噪比为 ρ (即 $\text{SNR} = 10 \lg \rho$) 的频率估计克拉美-罗限为

$$\text{CRB} = \frac{3}{2\pi^2 \rho N(N^2 - 1)} \quad (14)$$

由于每次试验各估计器都耗费等长的 $M = 2N - 1$ 个样本, 因而相应的 CRB 为

$$\text{CRB} = \frac{3}{8\pi^2 \rho (N - 1)N(2N - 1)} \quad (15)$$

为对比以上各方法的抗干扰性能, 还对包含两成分的信号 $x(n) = \exp(j\omega_1 n) + \exp(j\omega_2 n) + \eta(n)$, $-N + 1 \leq n \leq N - 1$, 做 Monte-Carlo 测试。并考虑了 $\{\omega_1 = 3.1\Delta\omega, \omega_2 = 6.3\Delta\omega\}$ 和 $\{\omega_1 = 4.4\Delta\omega, \omega_2 = 6.3\Delta\omega\}$ 两种不同的频率间距情况, 与这两种情况对应的单频成分的 RMSE 曲线分别如图 6(a), 图 6(b)和图 7(a), 图 7(b)所示(测试过程中对两个成分做了独立的谱峰搜索)。

从图 5~图 7 可总结如下规律:

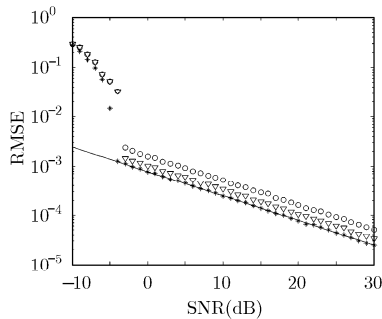
(1)从图 5(a), 图 5(b)可看出, 对于单频测试情况, 经过频移补偿和无窗处理后, 本文提出改进的 apFFT/FFT 相位差法(‘ ∇ ’ 标记), 相比于经典双

窗 apFFT/FFT 相位差法(‘ $\circ$ ’ 标记), 其频率精度均得以提升, 其 RMSE 曲线更逼近 CRB 的开方曲线(实线标记)。

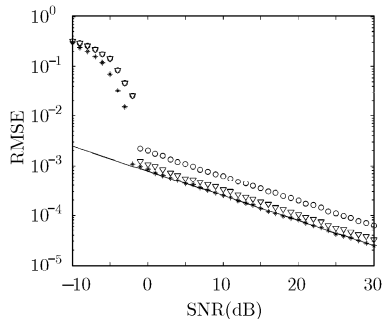
(2)从图 5(a), 图 5(b)还可看出, 对于两种单频测试情况, 本文方法其精度仍略逊于文献[10]内插法(‘ $*$ ’ 标记), 后者是已证明其估计方差已达到 CRB 的无偏估计器, 是不可能超越的。

(3)无论从图 6(a), 图 6(b), 还是从图 7(a), 图 7(b)可看出, 对于多频测试情况, 与文献[10]内插法相比, 本文方法具有更小的 RMSE。随着 SNR 增大, 两者均趋于平坦直线, 但本文方法的平坦区的 RMSE 值更低, 这是因为对于多频情况, 影响估计误差的因素除了噪声, 还有谱泄漏造成的固有偏差。本文方法因内嵌了具有优良抑制谱泄漏性能的 apFFT 谱分析, 其固有偏差相比于基于传统 DFT 的文献[10]估计器要小, 故其精度更高。而随着 SNR 增大, 固有偏差便成为影响误差的主要因素, 因而本文方法抗干扰性能更高。

(4)对于多频测试情况, 本文提出无窗 apFFT/FFT 频移补偿相位差法(‘ ∇ ’ 标记)相比于双窗 apFFT/FFT 频移补偿相位差法(‘ $\circ$ ’ 标记)的精度优势更体现在较低 SNR 区域。例如: 在图 6(a), 图 6(b)中的 $\text{SNR} \in [6 \text{ dB}, 16 \text{ dB}]$ 区域和图 7(a)中 $\text{SNR} \in [9 \text{ dB}, 18 \text{ dB}]$ 的区域, 本文提出无窗法精度均高于



(a) $\omega_1 = 3.1\Delta\omega$

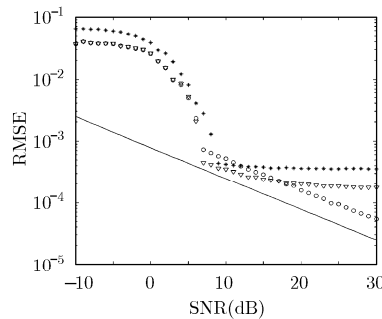


(b) $\omega_2 = 6.3\Delta\omega$

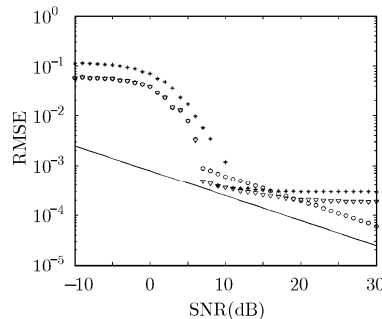
○ 双窗apFFT/FFT相位差法
▽ 无窗apFFT/FFT频移补偿相位差法
+ 文献[10]内插估计法
— CRB的平方根

图5 两个单频信号测试的 RMSE 曲线

($\omega_1 = 3.1\Delta\omega, \omega_2 = 6.3\Delta\omega$)



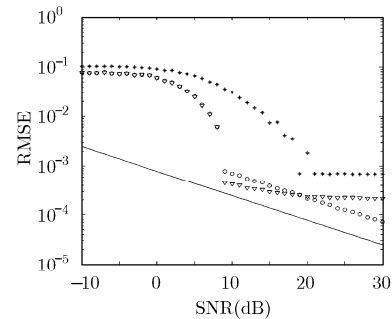
(a) $\omega_1 = 3.1\Delta\omega$



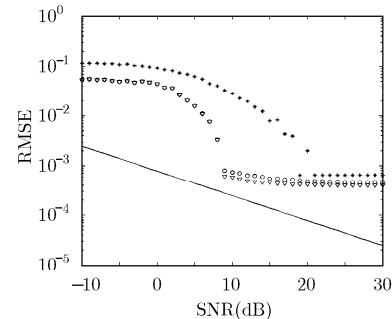
(b) $\omega_2 = 6.3\Delta\omega$

○ 双窗apFFT/FFT相位差法
▽ 无窗apFFT/FFT频移补偿相位差法
+ 文献[10]内插估计法
— CRB的平方根

图6 复合信号中的两个单频成分的 RMSE 曲线 ($\omega_1 = 3.1\Delta\omega, \omega_2 = 6.3\Delta\omega$)



(a) $\omega_1 = 4.4\Delta\omega$



(b) $\omega_2 = 6.3\Delta\omega$

○ 双窗apFFT/FFT相位差法
▽ 无窗apFFT/FFT频移补偿相位差法
+ 文献[10]内插估计法
— CRB的平方根

图7 复合信号中的两个单频成分的 RMSE 曲线 ($\omega_1 = 4.4\Delta\omega, \omega_2 = 6.3\Delta\omega$)

经典双窗差法, 这印证了第3节得出的频移和无窗措施因其可凸显单根谱峰而更易于抵御大噪声干扰的结论, 而若 SNR 进一步升高, 从图 6(a), 图 6(b) 和图 7(a) 可看出, 无窗方法估计精度低于双窗情况, 这是由于相比于无窗 apFFT, 双窗 apFFT 的旁谱泄漏抑制能力更强^[17], 故谱间干扰更小, 精度更高。

6 结束语

本文提出无窗 apFFT/FFT 相位差频移补偿法, 无需增加样本数量, 即可大大提升经典的双窗 apFFT/FFT 相位差法的频率估计精度。由于本文方法在有外界干扰频率的低信噪比环境中仍能高精度地做频率估计, 故在超声波测量^[18]、水声通信^[19]等工程领域有望获得更广泛的应用。

参 考 文 献

- [1] 曹文杰, 张磊, 杜兰, 等. 基于瞬时频率估计的进动锥体目标微多普勒频率提取方法[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(5): 1091-1096. doi: 10.11999/JEIT140985.
CAO Wenjie, ZHANG Lei, DU Lan, *et al.* Micro-Doppler frequency extraction for cone-shaped target with precession based on instantaneous frequency estimation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(5): 1091-1096. doi: 10.11999/JEIT140985.
- [2] WANG Wenqin and SO Hingcheung. Transmit subaperturing for range and angle estimation in frequency diverse array radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(8): 2000-2011. doi: 10.1109/TSP.2014.2305638.
- [3] ANSARI M, ESMAILZADEH E, and JALILI N. Exact frequency analysis of a rotating cantilever beam with tip mass subjected to torsional-bending vibrations[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2011, 133(4): 041003. doi: 10.1115/1.4003398.
- [4] ABOUTANIOS E and MULGREW B. Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(4): 1237-1242. doi: 10.1109/TSP.2005.843719.
- [5] CANDAN C. A method for fine resolution frequency estimation from three DFT samples[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(6): 351-354. doi: 10.1109/LSP.2011.2136378.
- [6] DUDA K. DFT interpolation algorithm for Kaiser-Bessel and Dolph-Chebyshev windows[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2011, 60(3): 784-790. doi: 10.1109/TIM.2010.2046594.
- [7] CANDAN C. Analysis and further improvement of fine resolution frequency estimation method from three DFT samples[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2013, 20(9): 913-916. doi: 10.1109/LSP.2013.2273616.
- [8] 邓振森, 刘渝. 正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究[J]. 电子学报, 2007, 35(1): 104-111.
DENG Zhenmiao and LIU Yu. The starting point problem of sinusoid frequency estimation based on Newton's method[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2007, 35(1): 104-111.
- [9] RIFE D and BOORSTYN R R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1974, 20(5): 591-598. doi: 10.1109/TIT.1974.1055282.
- [10] TSUI J. Digital Techniques for Wideband Receivers[M]. Herndon, Virginia, USA: SciTech Publishing, 2004: 124-126.
- [11] 黄翔东, 王兆华. 基于全相位频谱分析的相位差频谱校正法[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(2): 293-297.
HUANG Xiangdong and WANG Zhaohua. Phase difference correcting spectrum method based on all-phase spectrum analysis[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(2): 293-297.
- [12] 谭思炜, 任志良, 孙常存. 全相位 FFT 相位差频谱校正法改进[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(1): 34-39. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2013.01.06.
TAN Siwei, REN Zhiliang, and SUN Changcun. Improvement of phase difference correcting spectrum method based on all phase FFT[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2013, 35(1): 34-39. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2013.01.06.
- [13] 黄翔东, 孟天伟, 丁道贤, 等. 前后向子分段相位差频率估计法[J]. 物理学报, 2014, 63(21): 214304. doi: 10.7498/aps.63.214304.
HUANG Xiangdong, MENG Tianwei, DING Daoxian, *et al.* A novel phase difference frequency estimator based on forward and backward sub-segmenting[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(21): 214304. doi: 10.7498/aps.63.214304.
- [14] HUANG Xiangdong and XIA Xianggen. A fine resolution frequency estimator based on double sub-segment phase difference[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(8): 1055-1059. doi: 10.1109/LSP.2014.2385086.
- [15] 曹浩, 刘得军, 冯叶, 等. 全相位时移相位差法在电力谐波检测中的应用[J]. 电测与仪表, 2012, 49(7): 24-28. doi: 10.3969/j.issn.1001-1390.2012.07.006.
CAO Hao, LIU Dejun, FENG Ye, *et al.* Application of the all-phase time-shift difference method in the power harmonic detection[J]. *Electrical Measurement & Instrumentation*, 2012, 49(7): 24-28. doi: 10.3969/j.issn.1001-1390.2012.07.006.
- [16] 姜成昊, 杨进华, 张丽娟, 等. 基于激光拍频高精度相位式测距方法[J]. 光子学报, 2014, 43(9): 912006. doi: 10.3788/gzxb20144309.0912006.
JIANG Chenghao, YANG Jinhua, ZHANG Lijuan, *et al.* High-precision phase-shift laser range finder system based on laser beat-frequency[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, 43(9): 912006.

912006. doi: 10.3788/gzxb20144309.0912006.
- [17] 王兆华, 黄翔东. 数字信号全相位谱分析与滤波技术[M]. 北京: 电子工业出版社, 2009: 211-217.
WANG Zhaohua and HUANG Xiangdong. All-phase Spectral Analysis and Filtering for Digital Signals[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2009: 211-217.
- [18] 方汉方, 黄勇, 蔡艺剧, 等. 超声波传输时间的高精度测量[J]. 信号处理, 2012, 28(4): 595-600. doi: 10.3969/j.issn.1003-0530.2012.04.020.
FANG Hanfang, HUANG Yong, CAI Yiju, *et al.* High precision measurement of ultrasonic wave transmission time[J]. *Signal Processing*, 2012, 28(4): 595-600. doi: 10.3969/j.issn.1003-0530. 2012.04.020.
- [19] 孙向前, 李晴, 范展. 全相位频谱校正技术在水声通信中的应用研究[J]. 声学技术, 2015, 34(2): 127-133. doi: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2015.02.005.
SUN Xiangqian, LI Qing, and FAN Zhan. Research on the application of all-phase spectrum correction technique in underwater acoustic communication[J]. *Technical Acoustics*, 2015, 34(2): 127-133. doi: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2015.02.005.
- 黄翔东: 男, 1979 年生, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为滤波器设计、频谱分析等.
- 王越冬: 男, 1992 年生, 硕士生, 研究方向为频谱分析等.
- 靳旭康: 女, 1991 年生, 硕士生, 研究方向为频谱分析、盲信号处理等.
- 吕 卫: 男, 1976 年生, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为数字信号处理的硬件实现等.