第 38 卷第 6 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.38No.6
2016 年 6 月 Journal of Electronics & Information Technology Jun. 2016

基于稀疏迭代协方差估计的缺失数据谱分析及时域重建方法

马俊涛*[①②] 高梅国[①] 董 健[②]
[①](北京理工大学电子与信息学院 北京 100081)
[②](中国人民解放军军械工程学院电子与光学工程系 石家庄 050003)

摘 要：应用于缺失数据恢复的迭代自适应方法(IAA)被证实可利用 20%的有效数据估计信号参数，并能高精度恢复缺失数据，优于经典 GAPES 方法，但当缺失数据超过 80%时其数据恢复性能迅速下降。该文基于稀疏迭代协方差估计提出一种新的缺失数据谱分析方法(M-SPICE)及针对该方法的缺失数据修正时域重建方法。该方法将加权缺失数据协方差拟合代价函数转换为凸优化问题，构造循环最小化器保证缺失数据参数估计的全局收敛特性，通过对缺失数据估计算子的更新实现了时域重建方法的修正，使其在有效数据功率谱欠估计的情况下获得更高的数据重建精度。仿真实验表明无论是数据块缺失还是任意缺失，该方法均能够利用更少的有效数据进行谱分析，并重建大比例缺失数据。

关键词：缺失数据重建；谱估计；迭代自适应；稀疏协方差估计
中图分类号： TN95 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2016)06-1431-07
DOI: 10.11999/JEIT151008

Sparse Iterative Covariance Estimation-based Approach for Spectral Analysis and Reconstruction of Missing Data

MA Juntao[①②] GAO Meiguo[①] DONG Jian[②]
[①](*School of Information and Electronics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)
[②](*Department of Electronic and Optical Engineering*, *Ordance Engineering College*, *Shijiazhuang* 050003, *China*)

Abstract: Many researches confirmed the excellent performance of Iterative Adaptive Approach (IAA), when it is applied to spectrum analysis of missing data. Simulation results show that the IAA can use 20 percent of the data to recover the missing samples, which is superior to Gapped Amplitude and Phase EStimation (GAPES). But the reconstruction performance of IAA degrades rapidly when the missing data exceed 80%. This paper introduces a novel method of missing data spectrum analysis, and a relevant modified method of time-domain reconstruction is proposed, called Missing SParse Iterative Covariance-based Estimation(M-SPICE). This method converts the weighted missing data covariance fitting cost function to a convex optimization problem. The global convergence property is obtained by adopting cyclic minimizers. The time-domain reconstruction method is modified by renewing estimation operator, which increases the accuracy of the data reconstruction in the case of underestimation. The simulation indicates that the novel method can be used to estimate the missing data spectrum, and reconstruct missing data accurately, with even fewer valid samples, regardless of gapped or arbitrary missing patterns.

Key words: Missing data reconstruction; Spectral analysis; Iterative Adaptive Approach (IAA); Sparse covariance-based estimation

1 引言

缺失数据谱估计问题存在于天文观测、遥感遥测以及雷达、声呐信号处理等领域[1,2]，特别是在雷达成像领域应用更为广泛，视角遮挡、信号污染、子带融合及多角观测等问题，在适当回波预处理前提下，都可等效为 1 维或 2 维缺失数据谱估计问题[3−6]。缺失数据分为块缺失(gapped-data)和任意缺失(missing-data)两种情况，块缺失是指有效数据在整个数据序列中连续成块出现，而任意缺失指的是缺失数据样本可能出现在数据序列的任意位置。缺失数据谱分析即利用有限的不连续数据估计信号参数，因数据相位连续性被破坏，一般基于 FFT 的

收稿日期：2015-09-09；改回日期：2016-01-29；网络出版：2016-03-25
*通信作者：马俊涛 tm0508@sina.com
基金项目：国家自然科学基金(61401024)
Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61401024)

直接方法均有严重的谱泄露，随着数据缺失比例增大则更为复杂。

时域缺失数据恢复基于这样一种假设：缺失数据和有效数据具有相同的谱成分[1]。MUSIC, ESPRIT 等高分辨技术能够提供非常精确的谱估计，但较多依赖于模型阶数，对于较小的数据缺失比(小于 50%)具有较好的数据恢复精度[4]。最早应用于线谱模型块缺失数据恢复的非参数化方法是文献[1]提出的缺失数据自适应幅相估计方法(Gapped Amplitude and Phase EStimation, GAPES)。该方法继承了匹配滤波器组方法优秀的统计性能，随后被扩展到 2 维，应用于恢复角度分集 SAR 缺失的相位历史数据，实现了非参数化方法的数据插补和频谱外推，块缺失数据占比提高到 65%，成像效果优于 CLEAN 方法[3]。文献[6]在 GAPES 方法基础上将 tuning 因子引入缺失数据谱估计问题，补偿样本协方差与真实值之间的微小偏差，证实其在小样本缺失情况下比 GAPES 具有更高的估计精度。

近年来，一种基于非参数化的迭代自适应方法(Iterative Adaptive Approach, IAA)被用于空域谱估计，能够在快拍数较少甚至于单快拍情况下显著提高频谱分辨能力和减少泄露问题[7]，该方法的多种变型从不同角度减少了运算量[8−10]。文献[11]将其扩展到缺失数据的谱分析问题中，并分别在频域和时域对缺失数据进行了恢复，将缺失数据占比进一步提高到 80%，其恢复数据均方估计误差可达10^{-2}。缺失数据迭代自适应方法(Iterative Adaptive Approach, M-IAA)及其改进应用于雷达成像[12,13]，解决了条带 SAR 和多角观测融合的问题。文献[14]提出了一种新的稀疏迭代协方差估计方法(SParse Iterative Covariance-based Estimation, SPICE)用于线谱和波达方向估计[15]，随后被扩展用于时延估计[16]，证实了该方法对均匀、非均匀，相关和非相关都具有良好的适应能力。

本文将稀疏迭代协方差估计扩展到缺失数据谱分析问题，应用于任意缺失数据称之为 M-SPICE (Missing SParse Iterative Covariance-based Estimation)，应用于块缺失数据称之为 G-SPICE (Gapped SParse Iterative Covariance-based Estimation)，针对有效数据功率谱欠估计的问题提出了一种缺失数据修正时域恢复方法。该方法将加权缺失数据协方差拟合代价函数转换为凸优化问题，构造循环最小化器保证缺失数据参数估计的全局收敛特性，通过对缺失数据估计算子的更新实现了时域重建方法的修正，使其在有效数据功率谱欠估计的情况下获得更高的数据重建精度。仿真实验表明该方法能够从更少的有效数据中估计信号参数，显著抑制数据缺失带来的谱泄露问题，应用于任意样本缺失同样有效。

2 基于迭代自适应方法的缺失数据重建

2.1 缺失数据表示及谱分析

线谱数据模型可表示成矩阵形式：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{y}=\left[y(1),y(2),\cdots,y(N)\right]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}\\&\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\left[\boldsymbol{a}(\omega_1)\ \ \boldsymbol{a}(\omega_2)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}(\omega_K)\right]\\&\boldsymbol{s}=\left[s(\omega_1),s(\omega_2),\cdots,s(\omega_K)\right]^{\mathrm{T}}\\&\boldsymbol{a}(\omega_k)=\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k},\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_k},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\omega_k}\right]^{\mathrm{T}}\\&\omega_k=(2\pi/K)k,\ k=1,2,\cdots,K\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中，K 表示频域分辨点数，$K\gg N$，$\boldsymbol{a}(\omega_k)\in\mathbb{C}^{N\times1}$ 为频率导向矢量，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\in\mathbb{C}^{N\times K}$ 为导向矩阵，$s(\omega_k)\in\mathbb{C}$ 为 ω_k 的复幅度，$\boldsymbol{e}\in\mathbb{C}^{N\times1}$ 为高斯复噪声。

对于缺失数据模型，用 N_g 表示有效数据点数，N_m 表示缺失数据点数，$N=N_g+N_m$ 为数据矢量 $\boldsymbol{y}(n)$ 点数。构造 $N_g\times N$ 有效数据选择矩阵 $\boldsymbol{S}_g$，从 $\boldsymbol{y}(n)$ 中选择出有效数据组合成一个 $N_g\times1$ 列矢量，表示为 $\boldsymbol{y}_g$，构造 $N_m\times N$ 缺失数据选择矩阵 $\boldsymbol{S}_m$，将待重建的缺失数据组成一个 $N_m\times1$ 列矢量 $\boldsymbol{y}_m$，相应的频率导向矢量和导向矩阵可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{y}_g=\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{y}=\boldsymbol{S}_g\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}\right)=\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{e}\\&\boldsymbol{A}_g^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\\&\boldsymbol{a}_g(\omega_k)=\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{a}(\omega_k)\\&\boldsymbol{a}_m(\omega_k)=\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{a}(\omega_k)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

假设信号与噪声不相关，有效数据的噪声和干扰协方差矩阵可定义为

$$\boldsymbol{Q}_g(\omega_k)=\boldsymbol{R}_g-p_k\boldsymbol{a}_g(\omega_k)\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(\omega_k)\tag{3}$$

$$\boldsymbol{R}_g=\boldsymbol{A}_g^{\mathrm{H}}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_g=\boldsymbol{A}_g^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_g\tag{4}$$

$\boldsymbol{R}_g$ 为有效数据的协方差矩阵，$\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{p})$ 为由 $\boldsymbol{p}=[p_1\ \ p_2\ \ \cdots\ \ p_K]^{\mathrm{T}}$ 形成的对角阵，$p_k=|s(\omega_k)|^2$，在加权最小二乘意义下，有效数据谱估计由代价函数的最优解给出[11]：

$$\begin{aligned}\min_{\alpha_g(\omega_k)}\sum_{n=1}^{N}&\left[\boldsymbol{y}_g(n)-s(\omega_k)\boldsymbol{a}_g(\omega)\right]^{\mathrm{H}}\\&\cdot\boldsymbol{W}^{-1}\left[\boldsymbol{y}_g(n)-s(\omega_k)\boldsymbol{a}_g(\omega)\right]\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_g(\omega_k)&=\frac{\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(\omega_k)\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{y}_g(n)}{\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(\omega_k)\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{a}_g(\omega_k)}\\&=\frac{\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(\omega_k)\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y}_g(n)}{\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(\omega_k)\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{a}_g(\omega_k)}\end{aligned}\tag{6}$$

式(6)利用了矩阵求逆引理，可以避免在每个频

率上计算 $\boldsymbol{W}^{-1}$。计算过程用迭代的方式，首先对有效数据进行一次周期图估计，作为初始值，再分别用式(6)计算 $\hat{\alpha}_g(\omega_k)$，用式(4)计算 $\boldsymbol{R}_g$，直到其收敛。由于 IAA 方法具有更好的数据适应性，且适用于单快拍数据，因此具有比周期图等方法更好的统计性能，比滤波器组方法更好的分辨性能，但已有证明，IAA 方法在加权最小二乘准则下最小化代价函数是局部收敛的，在特定情况下不具有稳定的全局收敛特性[14]。

2.2 缺失数据时域重建方法

利用有效数据的谱估计重建缺失数据可以分别从时域和频域实现[11]，时域方法利用了在 $\boldsymbol{R}_g$ 给定的情况下，缺失数据 $\hat{\boldsymbol{y}}_m$ 与有效数据 $\boldsymbol{y}_g$ 满足线性关系这一条件，即 $\hat{\boldsymbol{y}}_m=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}_g$，通过最小化均方误差：

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{y}}_m)&=E\left\{(\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}_g-\boldsymbol{y}_m)^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}_g-\boldsymbol{y}_m)\right\}\\&\geq \mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{R}_m-\boldsymbol{R}_{mg}\boldsymbol{R}_g^{-1}\boldsymbol{R}_{mg}^{\mathrm{H}}\right\}\end{aligned}\tag{7}$$

$E\{\}$ 表示期望运算，$\mathrm{Tr}\{\cdot\}$ 表示矩阵的迹，$\boldsymbol{R}_g=E\left\{\boldsymbol{y}_g\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}\right\}$, $\boldsymbol{R}_m=E\left\{\boldsymbol{y}_m\boldsymbol{y}_m^{\mathrm{H}}\right\}$, $\boldsymbol{R}_{mg}=E\left\{\boldsymbol{y}_m\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}\right\}=\boldsymbol{R}_{mg}^{\mathrm{H}}$，可由式(7)解出 $\hat{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{R}_{mg}\boldsymbol{R}_g^{-1}$，即可给出缺失数据矢量 $\boldsymbol{y}_m$ 的估计 $\hat{\boldsymbol{y}}_m$：

$$\hat{\boldsymbol{y}}_m=\sum_{k=1}^{K}p_k\left[\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(\omega_k)\boldsymbol{R}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right]\boldsymbol{a}_m(\omega_k)\tag{8}$$

3 基于稀疏迭代协方差估计的缺失数据重建

3.1 Missing-SPICE(M-SPICE)算法谱分析

用 2.1 节中的有效数据选择矩阵描述有效数据协方差矩阵有式(9)形式：

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{\boldsymbol{R}}_g=E(\boldsymbol{y}_g\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}_g\begin{bmatrix}\sigma_1&0&\cdots&0\\0&\sigma_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\sigma_N\end{bmatrix}\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}&\boldsymbol{I}_{N_g\times N_g}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_s&\boldsymbol{0}_{K\times N_g}\\\boldsymbol{0}_{N_g\times K}&\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{P}_e\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{I}_{N_g\times N_g}\end{bmatrix}=\widetilde{\boldsymbol{A}}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_g\\&\widetilde{\boldsymbol{A}}_g^{\mathrm{H}}(\omega)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}&\boldsymbol{I}_{N_g\times N_g}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_g(\omega_1)&\boldsymbol{a}_g(\omega_2)&\cdots&\boldsymbol{a}_g(\omega_K)\,\boldsymbol{I}_{N_g\times N_g}\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{N_g\times(K+N_g)}\\&\widetilde{\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_s&\boldsymbol{0}_{K\times N_g}\\\boldsymbol{0}_{N_g\times K}&\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{P}_e\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&p_2&0&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&0&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&p_{K+1}&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&p_{K+N_g}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(K+N_g)\times(K+N_g)},\quad p_k=\left|s(\omega_k)\right|^2\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{y}_g,\boldsymbol{S}_g,\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}},\boldsymbol{P}_s$ 的定义与 2.1 节 IAA 方法中的定义一致，$\widetilde{\boldsymbol{R}}_g,\widetilde{\boldsymbol{A}}_g^{\mathrm{H}},\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{A}}_g$ 是如式(9)所表示的定义方式，与 IAA 方法中的定义不同。

用有效数据估计信号参数 $\{s_k,\omega_k\}$ 可在加权协方差拟合准则下最小化代价函数 f：

$$f=\left\|\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1/2}\left(\boldsymbol{y}_g\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}-\widetilde{\boldsymbol{R}}_g\right)\right\|^2\tag{10}$$

用 $\|\bullet\|^2$ 表示矢量 Euclid 范数和矩阵 Frobenius 范数，权矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1/2}$ 为 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}$ 的平方根矩阵，$\widetilde{\boldsymbol{R}}_g$ 厄尔米特正定，但不是托普利兹的。对式(10)进行简化[14]，得到

$$\left.\begin{aligned}&f=-2+\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right)+\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_g)\Big/\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2\\&\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{R}}_g)=E\left(\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2\right)=\sum_{k=1}^{K+N_g}\left\|\boldsymbol{a}_g(\omega_k)\right\|^2p_k\\&g=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right)+\sum_{k=1}^{K+N_g}w_kp_k\\&w_k=\left\|\boldsymbol{a}_g(\omega_k)\right\|^2\Big/\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

最小化函数 g 与全数据 SPICE 方法具有一样的形式，区别在于 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_g$ 的阶数，因此有效数据协方差拟合问题的凸性得以保留，仍可转换为等式约束凸优化问题：

$$\min_{\{p_k\geq 0\}}\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g,\quad\text{s.t.}\ \sum_{k=1}^{K+N_g}w_kp_k=1\tag{12}$$

该约束最优化问题是加权 ℓ_1 范数约束问题，同样也是一凸优化问题，其解与原问题的解相差一个系数，但并不影响频率估计。

为求解式(12)，用如式(13)的方法构造一等价等式约束最优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{Q}_g}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{Q}_g\right),\quad\text{s.t.}\ \boldsymbol{Q}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_g=\boldsymbol{I}_{N_g\times N_g}\tag{13}$$

对式(13)利用拉格朗日乘子法求解，构造代价函数：

$$J\left(\boldsymbol{Q}_g,\boldsymbol{L}\right)=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{Q}_g\right)+\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_g\right)\right)\tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{L}$ 为拉格朗日乘数矩阵，对式(14)求梯度可

得联立方程：

$$\frac{\partial J\left(\boldsymbol{Q}_g,\boldsymbol{L}\right)}{\partial \boldsymbol{Q}_g^*}=\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{Q}_g-\widetilde{\boldsymbol{A}}_g\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\Rightarrow \boldsymbol{Q}_g=\widetilde{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_g\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}} \tag{15}$$

$$\frac{\partial J\left(\boldsymbol{Q}_g,\boldsymbol{L}\right)}{\partial \boldsymbol{L}^*}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_g \tag{16}$$

联合式(15)，式(16)可得

$$\boldsymbol{L}=\left(\widetilde{\boldsymbol{A}}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_g\right)^{-1}=\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1} \tag{17}$$

将式(17)代入式(16)，可得

$$\boldsymbol{Q}_g=\widetilde{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_g\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1} \tag{18}$$

将式(18)代入式(13)，可得

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{Q}_g\boldsymbol{y}_g\right)=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right) \tag{19}$$

式(18)为等价最优化问题式(13)的解，式(19)进一步验证了式(13)与原问题式(12)等价，同时也表明了对 $\boldsymbol{Q}_g,\widetilde{\boldsymbol{P}}$ 的循环最小化可使目标函数式(13)快速收敛。下面参考全数据 SPICE 方法[16]给出 M-SPICE 方法的求解过程。

为最小化式(19)，首先构造一中间变量 $\boldsymbol{B}$，令

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}_g\boldsymbol{y}_g=\widetilde{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_g\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_{K+N}\end{bmatrix}\\&b_k=p_k\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

式(19)所示的等价目标函数 $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{Q}_g\boldsymbol{y}_g\right)$ 变为

$$\begin{aligned}h&=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{y}_g^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{Q}_g\boldsymbol{y}_g\right)=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\\&=\mathrm{tr}\left(\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\right)=\sum_{k=1}^{K+N}\frac{\left\|b_k\right\|^2}{p_k}=\sum_{k=1}^{K+N}p_k\left|\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right|^2\end{aligned} \tag{21}$$

经简化，等价目标函数形如式(21)所示，依据该式的简化形式及式(12)给出的约束条件，可为式(21)构造柯西-施瓦茨不等式，通过求解不等式下界得到函数 h 的最小值，其过程如式(22)：

$$\begin{aligned}\left[\sum_{k=1}^{K+N}w_k^{1/2}\left\|b_k\right\|\right]^2&=\left[\sum_{k=1}^{K+N}\frac{\left\|b_k\right\|}{p_k^{1/2}}w_k^{1/2}p_k^{1/2}\right]^2\le\left[\sum_{k=1}^{K+N}\left(\frac{\left\|b_k\right\|}{p_k^{1/2}}\right)^2\right]\\&\quad\cdot\left[\sum_{k=1}^{K+N}\left(w_k^{1/2}p_k^{1/2}\right)^2\right]=\sum_{k=1}^{K+N}\frac{\left\|b_k\right\|^2}{p_k}\end{aligned} \tag{22}$$

式(22)不等号右侧第 2 项为式(12)给出的约束条件，因此可得到函数 h 的下界，同时得到满足下界即等号成立的条件，综合上述关系，得到 p_k^{i+1} 的闭式解：

$$p_k^{i+1}=\frac{\left\|b_k^i\right\|}{w_k^{1/2}\sum\limits_{m=1}^{K+N}w_m^{1/2}\left\|b_m^i\right\|} \tag{23}$$

其中，i 表示迭代次数，w_k 由式(11)给出，根据式(9) $\widetilde{\boldsymbol{A}}_g^{\mathrm{H}}(\omega)$ 的定义求解 w_k 得到

$$\begin{aligned}w_k&=\left\|\boldsymbol{a}_g(\omega_k)\right\|^2\Big/\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2\\&=\begin{cases}N_g\Big/\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2, & k\in[1,2,\cdots,K]\\1\Big/\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2, & k\in\left[K+1,K+2,\cdots,K+N_g\right]\end{cases}\end{aligned} \tag{24}$$

将式(24)代回式(23)可得 p_k^{i+1} 的解：

$$\begin{aligned}p_k^{i+1}&=\left\|b_k\right\|\Bigg/\left(w_k^{1/2}\sum_{k=1}^{K+N}w_k^{1/2}\left\|b_k\right\|\right)\\&=\left\|p_k^i\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right\|\\&\quad\Bigg/\left[\frac{N_g}{\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2}\sum_{k=1}^{K}\left|p_k^i\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right|\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2}\sum_{k=K+1}^{K+N_g}\left|p_k^i\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right|\right]\end{aligned} \tag{25}$$

设 $\overline{\boldsymbol{P}}_s=[p_1,p_2,\cdots,p_K]^{\mathrm{T}}$，$\overline{\boldsymbol{P}}_e=[p_{K+1},p_{K+2},\cdots,p_{K+N_g}]^{\mathrm{T}}$，可将式(25)表示为向量形式：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}_s\\\overline{\boldsymbol{P}}_e\end{bmatrix}^{i+1}&=\left\|\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_s^i\boldsymbol{A}_g(k)\\\left(\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{P}_e\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}\right)^i\boldsymbol{I}_{N_g\times N_g}\end{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right\|\\&\quad\Bigg/\left[\frac{N_g}{\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2}\sum_{k=1}^{K}\left|p_k^i\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right|\right.\\&\quad\left.+\frac{\sigma^i}{\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2}\sum_{k=K+1}^{K+N_g}\left|\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right|\right]\end{aligned} \tag{26}$$

$$\overline{\boldsymbol{P}}_s^{\,i+1}=\frac{\left|\boldsymbol{P}_s^i\boldsymbol{A}_g(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right|}{\rho^i} \tag{27}$$

$$\overline{\boldsymbol{P}}_e^{\,i+1}=\frac{\left|\boldsymbol{P}_e^i\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right|}{\rho^i} \tag{28}$$

$$\rho^i=\frac{N_g}{\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2}\left\|\boldsymbol{P}_s^i\boldsymbol{A}_g(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right\|+\frac{\sigma^i}{\left\|\boldsymbol{y}_g\right\|^2}\left\|\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\right\| \tag{29}$$

3.2 缺失数据修正时域恢复方法

应用 2.2 节中的缺失数据时域重建方法，只需用式(27)分子 $\boldsymbol{P}_s^i\boldsymbol{A}_g(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g$ 的最后一次迭代值，用式(30)重建缺失数据：

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{y}}_u=\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{P}_s^i\boldsymbol{A}_g(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g=\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{Z}_s\\&\boldsymbol{Z}_s=\boldsymbol{P}_s^i\boldsymbol{A}_g(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

其中，$\boldsymbol{A}_m$ 是由缺失导向矢量 $\boldsymbol{a}_m(\omega_k)$ 构成的矩阵，$\boldsymbol{a}_m(\omega_k)$ 由文中式(2)给出。考虑到 SPICE 方法估计

出的信号峰值与真实信号峰值有确定的比例关系[14]，式(30)所示的缺失数据重建过程中，$\boldsymbol{Z}_s$ 并不与真实信号峰值对应的 $\boldsymbol{Z}_s$ 一致，因此用于数据恢复的 $\boldsymbol{Z}_s$ 应通过对 $\boldsymbol{P}_s^{i+1},\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}$ 及 $\boldsymbol{Z}_s$ 依次更新而得到，该更新过程可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{y}}_u=\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{Z}_{sn}\\&\boldsymbol{Z}_{sn}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{Z}_s^2)\boldsymbol{A}_g(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_{gn}^{-1}\boldsymbol{y}_g\\&\widetilde{\boldsymbol{R}}_{gn}^{-1}=\left[\widetilde{\boldsymbol{A}}_g^{\mathrm{H}}\operatorname{diag}(\boldsymbol{Z}_s^2)\widetilde{\boldsymbol{A}}_g\right]^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

实际应用中，需将 $\hat{\boldsymbol{y}}_u$ 插补回原序列，可利用有效数据选择矩阵 $\boldsymbol{S}_g$ 与缺失数据选择矩阵 $\boldsymbol{S}_m$ 之间的关系 $\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_g+\boldsymbol{S}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_m=\boldsymbol{I}_{N\times N}$，根据式(32)重建全数据 $\boldsymbol{y}_{N\times1}$：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_{N\times1}&=\left(\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_g+\boldsymbol{S}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_m\right)\boldsymbol{y}_{N\times1}\\&=\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{y}_{N\times1}+\boldsymbol{S}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{y}_{N\times1}=\boldsymbol{S}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_u+\boldsymbol{S}_m^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{y}}_m\end{aligned}\tag{32}$$

3.3 缺失数据恢复步骤

算法初始化：

(1)构造数据选择矩阵 $\boldsymbol{S}_g$，有效数据导向矩阵 $\boldsymbol{A}_g^{\mathrm{H}}$ 及 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_g^{\mathrm{H}}(\omega)=\left[\boldsymbol{S}_g\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\ \ \boldsymbol{I}_{N_g\times N_g}\right]$；

(2) 根据 $p_k=\left|\boldsymbol{a}_g^{\mathrm{H}}(k)\boldsymbol{y}_g\right|^2\Big/\left\|\boldsymbol{a}_g(k)\right\|^4$ $(k=1,2,\cdots,K+N_g)$ 计算迭代初始值；

迭代计算：

(3)根据式(9)构造 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$，并计算 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_g=\widetilde{\boldsymbol{A}}_g^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_g$；

(4)计算 $\boldsymbol{Z}_s=\boldsymbol{P}_s^i\boldsymbol{A}_g(k)\widetilde{\boldsymbol{R}}_g^{-1}\boldsymbol{y}_g,k=1,2,\cdots,K+N_g$；

(5)根据式(29)计算 ρ^i；

(6)根据式(27)更新 $\overline{\boldsymbol{P}}_s^{\,i+1},\boldsymbol{P}_e^{i+1}$，不满足迭代条件返回(3)；

数据恢复：

(7)根据式(31)用最后一次 $\boldsymbol{Z}_s$ 更新计算 $\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{R}}_{gn}^{-1}$，$\boldsymbol{Z}_{sn}$；

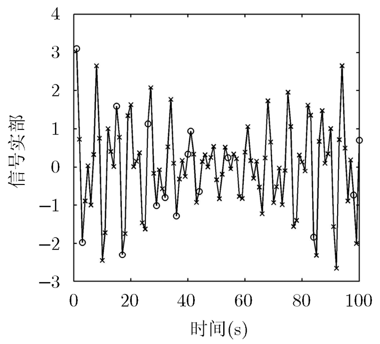
(8)计算恢复的缺失数据 $\hat{\boldsymbol{y}}_u=\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{Z}_{sn}$；

(9)根据式(32)对原有效数据进行插补，形成全数据。

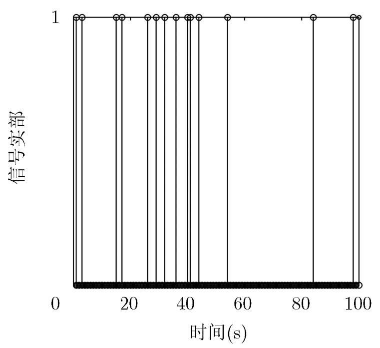
4 仿真实验

4.1 线谱模型随机缺失数据恢复精度

由 4 个复正弦信号叠加形成数据样本，加入零均值、方差为 0.01 的复高斯白噪声，4 个复正弦信号的信噪比和频率分别为(20 dB, 0.15 Hz), (15 dB, 0.16 Hz), (20 dB, 0.27 Hz), (15 dB, 0.28 Hz)，采样形成 100 点数据样本。构造数据随机缺失模型如图 1 所示，在 86%数据大缺失比情况下验证两种方法仅用有效数据估计线谱的能力，并利用本文提出的基于 M-SPICE 的缺失数据修正时域恢复方法恢复数据的实部，仿真结果如图 2、图 3 所示。在此数据缺失比情况下，进行 10 次蒙特卡洛实验，每一次均采用不同的随机缺失模型，数据恢复的精度用平均均方误差衡量：$\mathrm{AMES}=E\left\{\left\|\boldsymbol{y}_m-\hat{\boldsymbol{y}}_m\right\|^2\right\}\Big/10$，比较 10 次数据恢复精度，结果如图 4 所示。

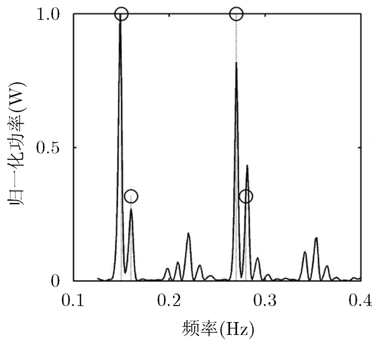


(a)原始数据

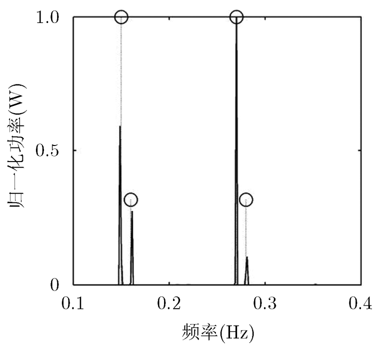


(b)随机采样模型

图 1 原始数据随机缺失模型

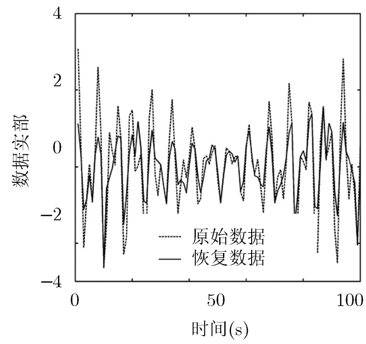


(a) M-IAA估计

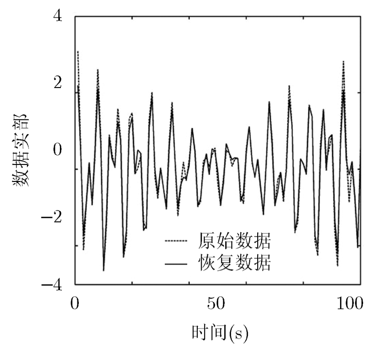


(b) M-SPICE估计

图 2 有效数据谱估计(缺失 86%)



(a) M-IAA方法恢复数据



(b) M-SPICE方法恢复数据

图 3 两种方法数据重建效果(缺失 86%)

仿真实验表明，在随机缺失数据比例较大情况下，仅利用有效数据两种方法都能够正确分辨 4 个谱峰，并给出精确的位置估计，但信号幅度是欠估计的，相较而言，M-SPICE 方法能够更好地抑制任意数据缺失带来的谱泄露问题。图 3 表明对原始数据实部的恢复结果，M-SPICE 方法恢复的数据能够更好地贴合原始数据，而 M-IAA 方法有相对大的估计误差。图 4 表明 M-SPICE 方法总体占优，具有较强的鲁棒性，在缺失比 86%的情况下，M-SPICE 方法重建数据均方差 10 次平均的结果为-10.07 dB，远小于 M-IAA 方法的-5.15 dB。

4.2 线谱模型块缺失数据恢复精度

有效数据分布在数据样本的两端，缺失数据比例以 10%间隔从 10%到 90%，在每一个缺失比例分别完成 50 次蒙特卡洛实验，数据恢复的精度用平均均方误差衡量：$\mathrm{AMES(Gap\_rate)}=E\left\{\left\|\boldsymbol{y}_m-\hat{\boldsymbol{y}}_m\right\|^2\right\}\Big/50$，验证 G-IAA 方法和 G-SPICE 方法数据恢复的精度，仿真结果如图 5 所示。

实验表明，块缺失情况下，G-SPICE 方法同样具有较高的缺失数据重建精度，当数据缺失比例较小时，两种方法缺失数据重建精度相当，当缺失比例较大时，G-SPICE 方法具有更好的恢复能力(以-20 dB 为临界点)。

4.3 迭代次数与收敛速度

验证本文提出的由式(31)修正后的数据恢复方法(表示为 MG-SPICE)与不经过修正的 G-SPICE 方法在 80%数据缺失情况下的迭代收敛情况，G-IAA 方法作为对比，仿真结果如图 6 所示。本文提出的数据恢复方法具有更快的收敛速度，并且总体均方误差水平最低。

5 结论

本文在稀疏迭代协方差估计的基础上提出了一种新的缺失数据谱估计方法和一种改进的缺失数据时域恢复方法，对于线谱模型数据，在缺失比例较大的情况下，利用该方法恢复缺失数据表现出良好的性能。仿真实验表明，无论是数据块缺失还是任意缺失，相对于 M-IAA，该方法对数据缺失带来的谱泄露问题都具有更好的抑制能力。与 M-IAA 方法一样，M-SPICE 方法同样需要对协方差矩阵求逆，单次迭代运算量与 M-IAA 方法相当，但由于 M-SPICE 的循环最小化优势使其具有更快的迭代收敛速度。

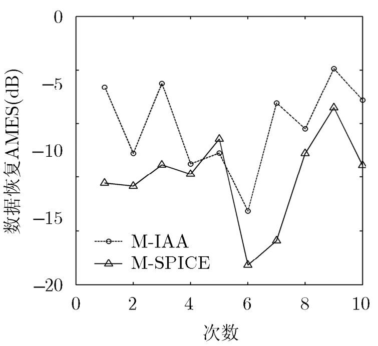


图 4 86%缺失比，10 次独立实验数据恢复 AMES

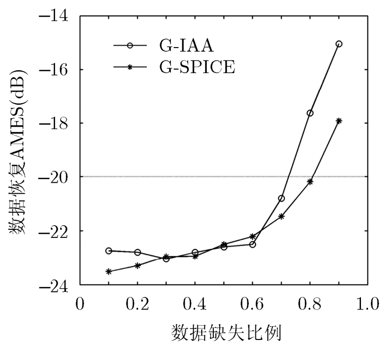


图 5 10%~90%数据缺失比的恢复精度

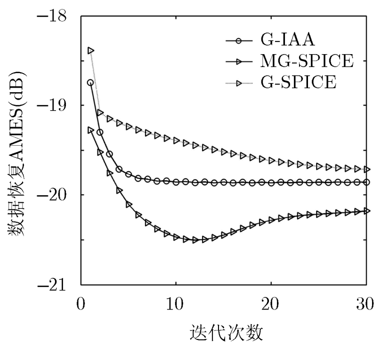


图 6 迭代次数与收敛速度

参 考 文 献

[1] STOICA P, LARSSON E G, and LI Jian. Adaptive filter-bank approach to restoration and spectral analysis of gapped data[J]. *The Astronomical Journal*, 2000, 120(4): 2163-2173.

[2] SCHAFER J L and GRAHAM J W. Missing data: our view of the state of the art[J]. *Psychological Methods*, 2002, 7(2): 147-177.

[3] BAI Xueru, ZHOU Feng, XING Mengdao, *et al.* High-resolution radar imaging of air targets from sparse azimuth data[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, 48(2): 1643-1655.

[4] 王成, 胡卫东, 杜小勇, 等. 稀疏子带的多频段雷达信号融合超分辨距离成像[J]. 电子学报, 2006, 34(6): 985-990.
WANG Cheng, HU Weidong, and DU Xiaoyong, *et al.* The super-resolution range imaging based on sparse band multiple frequency bands radars signal fusion[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(6): 985-990.

[5] 刘启, 洪文, 谭维贤, 等. 宽角合成孔径雷达二维缺失数据自适应幅相估计成像方法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(3): 616-621. doi: 10.3724/SP.J.1146.2011.00650.
LIU Qi, HONG Wen, TAN Weixian, *et al.* Adaptive tuning missing-data amplitude and phase estimation method in wide angle SAR[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(3): 616-621. doi: 10.3724/SP.J.1146.

2011.00650.

[6] 田彪, 刘洋, 徐世友, 等. 基于几何绕射理论模型高精度参数估计的多频带合成成像[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(7): 1532–1539. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01364.
TIAN Biao, LIU Yang, XU Shiyou, *et al*. Multi-band fusion imaging based on high precision parameter estimation of geometrical theory of diffraction model[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(7): 1532–1539. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01364.

[7] YARDIBI T, LI Jian, STOICA P, *et al*. Source localization and sensing: a nonparametric iterative adaptive approach based on weighted least squares[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, 46(1): 425–443.

[8] SUN W, SO H C, CHEN Y, *et al*. Approximate subspace-based iterative adaptive approach for fast two-dimensional spectral estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(12): 3220–3231.

[9] ZHANG Yongchao, ZHANG Yin, LI W, *et al*. Divide and conquer: a fast matrix inverse method of iterative adaptive approach for real beam superresolution[C]. International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), Québec City, 2014: 698–701.

[10] GLENTIS G O, JAKOBSSON A, and ANGELOPOULOS K. Block-recursive IAA-based spectral estimates with missing samples using data interpolation[C]. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Florence, 2014: 350–354.

[11] STOICA P, LI Jian, and LING J. Missing data recovery via a nonparametric iterative adaptive approach[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, 16(4): 241–244.

[12] GLENTIS G O, ZHAO K, JAKOBSSON A, *et al*. Non-parametric high-resolution SAR imaging[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(7): 1614–1624.

[13] KARLSSON J, ROWE W, XU L, *et al*. Fast missing-data IAA with application to notched spectrum SAR[J]. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 2014, 50(2): 959–971.

[14] STOICA P, PRABHU Babu, and LI Jian. New method of sparse parameter estimation in separable models and its use for spectral analysis of irregularly sampled data[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(1): 35–47.

[15] STOICA P, PRABHU Babu, and LI Jian. SPICE: a sparse covariance-based estimation method for array processing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 629–638.

[16] PARK H R and LI Jie. Sparse covariance-based high resolution time delay estimation for spread spectrum signals [J]. *Electronics Letters*, 2015, 51(2): 155–157.

马俊涛： 男，1977 年生，博士生，讲师，研究方向为雷达信号处理、雷达成像技术.

高梅国： 男，1965 年生，教授，博士生导师，研究方向为雷达电子对抗与反对抗、高速实时信号处理、雷达成像技术等.

董　健： 男，1983 年生，博士，讲师，研究方向为雷达信号处理、雷达成像技术、高速实时信号处理.