

## 两个带有已知或未知参数的复杂网络的改进函数投影同步

杜洪越\* 李春双 公利滨  
(哈尔滨理工大学自动化学院 哈尔滨 150080)

**摘要:** 近年来复杂网络在科学与工程各个领域受到了广泛关注,其中复杂网络同步问题是复杂网络研究的热点之一。该文研究两个复杂网络实现改进函数投影同步的方法。分别基于复杂网络模型参数已知和未知两种情况,利用李雅普诺夫稳定性理论和自适应控制技术,设计自适应同步控制器,使两个复杂网络达到改进函数投影同步。最后分别基于这两种情况利用数值仿真验证所提方法的有效性。

**关键词:** 复杂网络;改进函数投影同步;自适应控制;未知参数

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2016)07-1816-07

**DOI:** 10.11999/JEIT150864

## Modified Function Projective Synchronization Between Two Complex Networks with Known or Unknown Parameters

DU Hongyue LI Chunshuang GONG Libin

(School of Automation, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

**Abstract:** Recently, the complex networks have been more and more popular in various areas of science and engineering. Synchronization is one of the hot topics in the investigation of complex networks. This paper focuses on modified function projective synchronization of two complex networks with known or unknown parameters. Based on Lyapunov stability theory and the adaptive control technique, an adaptive synchronization controller is developed to realize modified function projective synchronization in two complex networks. Numerical examples are provided to show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** Complex network; Modified function projective synchronization; Adaptive control; Unknown parameter

### 1 引言

复杂网络是一个多学科交叉的热点研究领域,其可描述自然界和人类社会中的很多复杂系统,如万维网、生态网、神经网络,电力网络、城市交通网、社会关系网络等等,因此其研究引起学者们的广泛关注<sup>[1,2]</sup>。网络同步机制能解释很多自然现象,如在Internet和WWW上信息的同步交换,通信网络中的数字或模拟信号的同步交换等,所以复杂网络的同步问题是复杂网络研究的热点之一<sup>[3-16]</sup>。文献[3]研究了一类具有时变时滞的复杂网络同步问题。文献[4]研究了复杂网络同步态与孤立节点解的关系。文献[5]利用牵制控制法研究了非时延和时变耦合时延的复杂网络自适应同步问题。文献[6]进一步利用间歇控制法研究非时延和耦合时延的复杂网络

的同步问题。文献[7]研究了带有时延的有向复杂网络的自适应簇同步问题。文献[8]研究带有未知参数和未知拓扑结构的复杂网络的结构辨识问题。文献[9]研究了不同分数阶节点的复杂网络的投影同步问题。文献[10]研究了有向复杂网络的最优牵制控制问题。文献[11]研究了带未知参数的分数阶驱动-响应复杂网络的自适应同步问题。

目前已有的关于复杂网络同步的理论成果,主要集中在复杂网络各结点的动力学行为恒同的完全同步上,部分少数文献研究了具有常数尺度因子的投影同步问题<sup>[9]</sup>。本文研究复杂网络中的一种新的同步方式,即改进函数投影同步。由于改进函数投影同步在同步的混沌系统中引入了尺度函数矩阵,其使同步后的混沌系统的复杂程度及混沌程度增加,根据密码学原理,复杂度越大,系统越难破译,因此利用改进函数投影同步进行保密通信可进一步增加信息的安全性。考虑到网络信息安全是现代信息化社会的一个难题,而利用改进函数投影同步进行保密通信可进一步增加信息的安全性,因此在复杂

收稿日期: 2015-07-20; 改回日期: 2016-04-22; 网络出版: 2016-05-31

\*通信作者: 杜洪越 du\_hong\_yue@163.com

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12541106)

Foundation Item: The Scientific Research Fund of Heilongjiang Provincial Education Department of China (12541106)

网络中研究改进函数投影同步理论具有重要的理论意义和实际应用价值。文献[17]首次基于部分线性化的驱动-响应网络实现了函数投影同步。文献[18]研究具有不同混沌节点的复杂网络函数投影同步问题，文献[19]进一步研究了带有时滞的复杂网络实现函数投影同步的方法。文献[20]利用鲁棒控制法研究驱动-响应网络中的改进函数投影同步问题。文献[21]利用自适应开环加闭环控制法，研究驱动-响应网络中的改进函数投影同步问题。文献[22]研究带时变耦合时延的复杂网络的有限时间函数投影同步问题。文献[23]研究带转换拓扑结构和随机影响的复杂网络的函数投影同步问题。

虽然目前已有一些关于复杂网络函数投影同步的研究成果<sup>[17-23]</sup>，但是这些成果基本都是基于单个网络的内部同步进行研究的，而对于两个复杂网络间的外同步问题鲜有研究。而目前关于复杂网络外同步的研究正逐渐引起学者们的广泛关注<sup>[24-27]</sup>。如文献[24]研究了具有相同拓扑结构的两个网络的外同步行为，文献[25]研究了两个不同拓扑结构的复杂网络外同步问题。文献[26]研究了带自适应耦合矩阵的两个不确定复杂网络的外同步问题。文献[27]研究了具有不同动态节点和拓扑结构的两个复杂网络的外同步问题。这些关于两个复杂网络外同步的研究都是基于完全同步进行的，而如何在两个复杂网络间实现改进函数投影同步仍旧是一个有待解决的问题。并且目前已有一些关于复杂网络函数投影同步的研究成果基本都是在复杂网络模型参数已知的条件下获得的<sup>[17-23]</sup>，而如何在复杂网络模型存在未知参数的条件下实现函数投影同步还是一个有待解决的问题。鉴于上述讨论，本文研究两个复杂网络的改进函数投影同步问题，分别基于网络模型参数已知和未知两种情况，通过李雅普诺夫稳定性理论和自适应控制技术，设计自适应同步控制器使两个复杂网络实现改进函数投影同步。

本文的内容安排如下：第2节给出模型描述和改进函数投影同步的定义；第3节分别在系统模型参数已知和未知两种条件下，给出两个复杂网络实现改进函数投影同步的控制器设计方法；第4节给出两组仿真实例验证所提控制方法的有效性；第5节给出结论。

## 2 改进函数投影同步定义

考虑两个复杂网络模型描述如下：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N \mathbf{C}g_{ij}\mathbf{x}_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中， $\mathbf{x}_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{im}]^T \in R^n$  是驱动网络中第  $i$  个

节点的状态向量， $\mathbf{f}: R^n \rightarrow R^n$  是确定节点动态行为的连续可微向量函数。 $\mathbf{C} \in R^{n \times n}$  是内部耦合矩阵，设其为对角矩阵。 $\mathbf{G} = (g_{ij}) \in R^{N \times N}$  是表示网络拓扑结构的耦合矩阵，其中  $g_{ij}$  被定义如下：如果节点  $i$  和节点  $j$  之间有连接 ( $i \neq j$ )，则  $g_{ij} > 0$ ，否则  $g_{ij} = g_{ji} = 0$ ，并且矩阵  $\mathbf{G}$  的对角线上的元素满足耗散条件，即  $g_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )。

取式(1)为驱动网络，带有非线性控制器的响应网络按式(2)选取。

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i) + \sum_{j=1}^N \mathbf{C}g_{ij}\mathbf{y}_j + \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中， $\mathbf{y}_i = [y_{i1} \ y_{i2} \ \dots \ y_{im}]^T \in R^n$  是响应网络中第  $i$  个节点的状态向量， $\mathbf{u}_i \in R^n$  是控制输入。

**定义 1** 对于驱动网络式(1)和响应网络式(2)，如果存在一个尺度函数矩阵  $\mathbf{\Lambda}(t) = \text{diag}(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ ，其中， $\alpha_i(t)$  是连续可微的函数，使式(3)成立：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_i\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{\Lambda}(t)\mathbf{x}_i\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

其中  $\|\cdot\|$  代表欧几里得范数，则称驱动网络式(1)和响应网络式(2)实现改进函数投影同步。

本文研究的是在复杂网络模型中系统参数已知和未知两种条件下，如何设计控制器  $\mathbf{u}_i$  使驱动网络和响应网络达到改进函数投影同步。

## 3 控制器设计

### 3.1 两个确定复杂网络模型的改进函数投影同步法

本节研究在复杂网络模型参数已知的条件下，驱动网络式(1)和响应网络式(2)实现改进函数投影同步的控制器设计方法。

**定理 1** 对于任意给定的尺度函数矩阵和初始条件，驱动网络式(1)和响应网络式(2)在式(4)所示控制器作用下可实现改进函数投影同步。

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{f}(\mathbf{y}_i) + \mathbf{\Lambda}(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \dot{\mathbf{\Lambda}}(t)\mathbf{x}_i - k_i\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$k_i = r_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i \quad (5)$$

其中， $r_i$  是任意正常数。

**证明** 定义每一个节点的误差向量为

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{\Lambda}(t)\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

其中， $\mathbf{e}_i = [e_{i1} \ e_{i2} \ \dots \ e_{im}]^T \in R^n$ ， $\mathbf{\Lambda}(t)$  是尺度函数矩阵。对式(6)两边求导有

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{y}}_i - \dot{\mathbf{\Lambda}}(t)\mathbf{x}_i - \mathbf{\Lambda}(t)\dot{\mathbf{x}}_i \quad (7)$$

将式(1)和式(2)代入式(7)有

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i) - \mathbf{\Lambda}(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N \mathbf{C}g_{ij}\mathbf{e}_j - \dot{\mathbf{\Lambda}}(t)\mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i \quad (8)$$

将式(4)代入式(8)有

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^N Cg_{ij}e_j - k_i e_i \quad (9)$$

构造李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i} \tilde{k}_i^2 \quad (10)$$

其中,  $\tilde{k}_i = k_i - k_i^*$ ,  $k_i^*$  是正常数。对式(10)两边求导有

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N e_i^T \dot{e}_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i} (k_i - k_i^*) \dot{k}_i \quad (11)$$

将式(5)和式(9)代入式(11)有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N e_i^T \left[ \sum_{j=1}^N Cg_{ij}e_j - k_i e_i \right] + \sum_{i=1}^N (k_i - k_i^*) e_i^T e_i \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T Cg_{ij}e_j - \sum_{i=1}^N k_i^* e_i^T e_i \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T Cg_{ij}e_j - k^* \sum_{i=1}^N e_i^T e_i \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $k^* = \min(k_1^*, k_2^*, \dots, k_N^*)$ 。令  $\mathbf{E} = [e_1^T \ e_2^T \ \dots \ e_N^T]^T \in R^{nN}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{C} \otimes \mathbf{G}$ , 且  $\mathbf{Q} \in R^{nN \times nN}$ , 其中  $\otimes$  是克罗内积。则由式(12)有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{E} - k^* \mathbf{E}^T \mathbf{E} \\ &\leq \left( \lambda_{\max} \left( \frac{\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}}{2} \right) - k^* \right) \mathbf{E}^T \mathbf{E} \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\lambda_{\max} \left( \frac{\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}}{2} \right)$  是矩阵  $\left( \frac{\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}}{2} \right)$  的最大特征

值。取  $k^* = \lambda_{\max} \left( \frac{\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}}{2} \right) + 1$ , 我们得到

$$\dot{V} \leq -\mathbf{E}^T \mathbf{E} \quad (14)$$

所以根据李雅普诺夫稳定性定理,  $e_i$  和  $\tilde{k}_i$  是有界的, 即  $e_i \in L_\infty$  和  $\tilde{k}_i \in L_\infty$ 。由于混沌系统是有界的, 有  $\dot{e}_i$  有界, 即  $\dot{e}_i \in L_\infty$ 。根据式(14)有

$$\int_0^\infty \mathbf{E}^T \mathbf{E} \leq -\int_0^\infty \dot{V} = V(0) - V(\infty) < \infty$$

因此,  $e_i \in L_2$ 。根据 Barbalat 定理, 随着  $t \rightarrow \infty$ , 有  $e_i \rightarrow \mathbf{0}$ , 即驱动网络式(1)和响应网络式(2)在所设计的控制器式(4)的作用下发生改进函数投影同步。

证毕

**注1** 本文所设计的同步控制器是在两个复杂网络的所有状态变量全部已知的条件下获得的, 若状态变量不可直接获取时, 无法直接利用本文所提的控制器设计方法, 此时可先构造状态观测器重构系统的状态信息, 之后再利用本文所提的控制器的设计思想设计所需的控制器。

### 3.2 两个带有未知参数的复杂网络模型的改进函数投影同步法

本节研究复杂网络模型存在未知参数的条件

下, 驱动网络和响应网络实现改进函数投影同步的控制器设计方法。带有未知参数的复杂网络模型描述为

$$\dot{x}_i = \mathbf{f}(x_i) + \mathbf{F}(x_i)\boldsymbol{\theta} + \sum_{j=1}^N Cg_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

其中,  $x_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{in}]^T \in R^n$  表示驱动网络中第  $i$  个节点的状态向量。  $\mathbf{f}: R^n \rightarrow R^n$  是连续可微的向量函数。驱动网络的参数向量  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_m]^T \in R^m$ 。  $\mathbf{C} \in R^{n \times n}$  是内部耦合矩阵, 设其为对角矩阵。  $\mathbf{G} = (g_{ij}) \in R^{N \times N}$  是表示网络拓扑结构的耦合矩阵, 其中  $g_{ij}$  定义如下: 如果节点  $i$  和节点  $j$  之间有连接 ( $i \neq j$ ), 则  $g_{ij} > 0$ , 否则  $g_{ij} = g_{ji} = 0$ , 并且矩阵  $\mathbf{G}$  的对角线上的元素满足耗散条件。

取式(15)作为驱动网络, 带有非线性控制器及未知参数估计器的响应网络按式(16)选取。

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \mathbf{f}(y_i) + \mathbf{F}(y_i)\hat{\boldsymbol{\theta}}_i + \sum_{j=1}^N Cg_{ij}y_j + u_i, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $y_i = [y_{i1} \ y_{i2} \ \dots \ y_{in}]^T \in R^n$  表示响应网络中第  $i$  个节点的状态向量。  $u_i \in R^n$  是控制输入。  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = [\hat{\theta}_{i1} \ \hat{\theta}_{i2} \ \dots \ \hat{\theta}_{im}]^T \in R^m$  是第  $i$  个响应节点对驱动网络中的未知参数  $\boldsymbol{\theta}$  的估计量。

**定理 2** 对于任意给定的尺度函数矩阵和初始条件, 带未知参数的驱动网络式(15)和响应网络式(16)在式(17)所示控制器和式(18)所示参数估计器的作用下可实现改进函数投影同步。

$$\begin{aligned} u_i &= (\boldsymbol{\Lambda}(t)\mathbf{F}(x_i) - \mathbf{F}(y_i))\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \mathbf{f}(y_i) \\ & \quad + \boldsymbol{\Lambda}(t)\mathbf{f}(x_i) + \dot{\boldsymbol{\Lambda}}(t)x_i - k_i e_i \end{aligned} \quad (17)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i = -[\boldsymbol{\Lambda}(t)\mathbf{F}(x_i)]^T e_i \quad (18)$$

$$\dot{k}_i = r_i e_i^T e_i \quad (19)$$

其中,  $r_i$  是任意正常数。

**证明** 把式(15)和式(16)代入式(7)有

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \mathbf{F}(y_i)\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\Lambda}(t)\mathbf{F}(x_i)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{f}(y_i) - \boldsymbol{\Lambda}(t)\mathbf{f}(x_i) \\ & \quad + \sum_{j=1}^N Cg_{ij}e_j - \dot{\boldsymbol{\Lambda}}(t)x_i + u_i \end{aligned} \quad (20)$$

定义系统参数误差为

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

把式(17)和式(21)代入式(20)有

$$\dot{e}_i = \boldsymbol{\Lambda}(t)\mathbf{F}(x_i)\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i + \sum_{j=1}^N Cg_{ij}e_j - k_i e_i \quad (22)$$

构造李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i} \tilde{k}_i^2 \quad (23)$$

其中,  $\tilde{k}_i = k_i - k_i^*$ ,  $k_i^*$  是正常数。对式(23)两边求

导出

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i} (k_i - k_i^*) \dot{k}_i \quad (24)$$

把式(18), 式(19)和式(22)代入式(24)有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \left[ \mathbf{A}(t) \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{C} g_{ij} \mathbf{e}_j - k_i \mathbf{e}_i \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i + \sum_{i=1}^N (k_i - k_i^*) \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \left[ \mathbf{A}(t) \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{C} g_{ij} \mathbf{e}_j \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i - \sum_{i=1}^N k_i^* \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{C} g_{ij} \mathbf{e}_j - \sum_{i=1}^N k_i^* \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{C} g_{ij} \mathbf{e}_j - k^* \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (25)$$

其中,  $k^* = \min(k_1^*, k_2^*, \dots, k_N^*)$ 。

令  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1^T \ \mathbf{e}_2^T \ \dots \ \mathbf{e}_N^T]^T \in R^{nN}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{C} \otimes \mathbf{G}$ , 其中  $\otimes$  是克罗内克积。则由式(25)有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{E} - k^* \mathbf{E}^T \mathbf{E} \\ &\leq \left( \lambda_{\max} \left( \frac{\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}}{2} \right) - k^* \right) \mathbf{E}^T \mathbf{E} \end{aligned} \quad (26)$$

其中,  $\lambda_{\max} \left( \frac{\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}}{2} \right)$  是矩阵  $\left( \frac{\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}}{2} \right)$  的最大特征

值。取  $k^* = \lambda_{\max} \left( \frac{\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}}{2} \right) + 1$ , 我们得到

$$\dot{V} \leq -\mathbf{E}^T \mathbf{E} \quad (27)$$

所以根据李雅普诺夫稳定性原理,  $\mathbf{e}_i$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i$  和  $\tilde{k}_i$  是有界的, 即  $\mathbf{e}_i \in L_\infty$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i \in L_\infty$  和  $\tilde{k}_i \in L_\infty$ 。由于混沌系统是有界的, 有  $\dot{\mathbf{e}}_i$  有界, 即  $\dot{\mathbf{e}}_i \in L_\infty$ 。根据式(27)有

$$\int_0^\infty \mathbf{E}^T \mathbf{E} \leq -\int_0^\infty \dot{V} = V(0) - V(\infty) < \infty \quad (28)$$

因此,  $\mathbf{e}_i \in L_2$ 。根据 Barbalat 定理, 随着  $t \rightarrow \infty$ , 有  $\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{0}$ , 即驱动网络式(15)和响应网络式(16)在所设计的控制器式(17)的作用下发生改进函数投影同步。证毕

### 4 数值仿真

在本节中, 以由混沌 Lorenz 系统组成的两个复杂网络为例证实所提定理的有效性, 其数学描述为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (b - x_3)x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2x_1 - cx_3 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

其中,  $x_1, x_2$  和  $x_3$  是状态变量, 系统参数  $a = 10$ ,  $b = 28$ ,  $c = 8/3$ , 其混沌吸引子如图 1 所示。

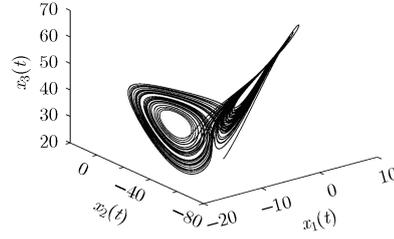


图1 Lorenz系统混沌吸引子

#### 4.1 确定模型的同步仿真例子

本节以两个由 3 个节点组成的全局耦合网络为例, 证实所提定理 1 的有效性, 其中网络节点由混沌 Lorenz 系统式(29)组成。

驱动网络的模型被描述为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} a(x_{i2} - x_{i1}) \\ (b - x_{i3})x_{i1} - x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} - cx_{i3} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{C} g_{ij} \mathbf{x}_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (30)$$

其中, 内部耦合矩阵取  $\mathbf{C} = \text{diag}(1, 1, 1)$ , 网络拓扑结构矩阵  $\mathbf{G} = (g_{ij})$  按式(31)选取。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

相应的响应网络的数学模型取为

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} a_i(y_{i2} - y_{i1}) \\ (b_i - y_{i3})y_{i1} - y_{i2} \\ y_{i1}y_{i2} - c_i y_{i3} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{C} g_{ij} \mathbf{y}_j + \mathbf{u}_i, \quad i=1, 2, 3 \quad (32)$$

其中  $\mathbf{u}_i$  是控制输入, 其可按定理 1 中给出的方法进行设计, 内部耦合矩阵选为  $\mathbf{C} = \text{diag}(1, 1, 1)$ , 网络拓扑结构  $\mathbf{G} = (g_{ij})$  仍按式(31)选取。

在数值仿真中, 取驱动网络初始条件为  $\mathbf{x}_1(0) = [3 \ 5 \ 4]^T$ ,  $\mathbf{x}_2(0) = [9 \ 1 \ 2]^T$ ,  $\mathbf{x}_3(0) = [7 \ 5 \ 9]^T$ , 响应网络的初始条件为  $\mathbf{y}_1(0) = [4 \ 5 \ 6]^T$ ,  $\mathbf{y}_2(0) = [3 \ 4 \ 5]^T$ ,  $\mathbf{y}_3(0) = [5 \ 4 \ 1]^T$ , 反馈增益初值选择为  $k_i(0) = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $r_i = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 尺度函数矩阵  $\mathbf{A}(t) = \text{diag}(2 + \sin t, 2 + \cos t, 2 + 0.5 \sin t)$ , 仿真结果如图 2 所示。图 2 为驱动网络与响应网络同步误差随时间变化图, 图中横坐标表示时间  $t$ , 单位为 s, 纵坐标表示同步误差  $\mathbf{e}(t)$ , 且所有节点的第 1 个误差分量  $e_{i1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 用直线表示, 第 2 个误差分量  $e_{i2}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 用虚线表示, 第 3 个误差分量  $e_{i3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 用点划线表示。

由图2我们可以看到所有误差分量随着时间的变化而渐近趋近于零, 因此驱动网络式(30)和响应

网络式(32)在我们所设计的控制器的作用下达改进函数投影同步。另外，通过大量的仿真实验，我们发现  $r_i$  越大，复杂网络同步的速度越快，相反  $r_i$  越小，复杂网络同步的速度越慢。因此获得结论： $r_i$  的取值影响复杂网络达到同步的速度。

4.2 带未知参数模型的同步仿真例子

本节以两个由 10 个节点组成的全局耦合网络为例证实所提定理 2 的有效性，其中网络节点仍由混沌 Lorenz 系统组成。驱动网络的数学模型为

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} - x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{i2} - x_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & x_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & -x_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{10} Cg_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (33)$$

其中， $\theta = [a \ b \ c]^T$  是未知参数向量，内部耦合矩阵被选为  $C = \text{diag}(1,1,1)$ ，网络拓扑结构矩阵按式(34)选取。

$$G = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \quad (34)$$

相应的响应网络的数学模型按式(35)选取。

$$\dot{y}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_{i1}y_{i3} - y_{i2} \\ y_{i1}y_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{i2} - y_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & y_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & -y_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \\ \hat{c}_i \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{10} Cg_{ij}y_j + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (35)$$

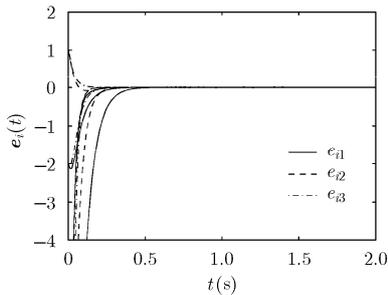


图2 3节点复杂网络同步误差随时间变化图

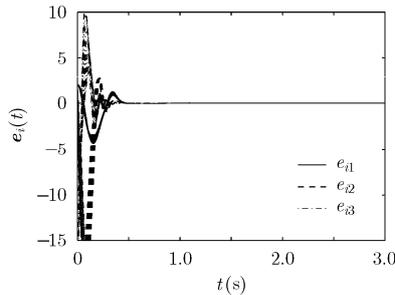


图3 10节点复杂网络同步误差随时间变化图

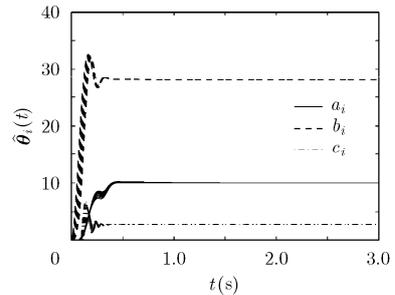


图4 10节点复杂网络参数估值随时间变化图

其中，内部耦合矩阵选为  $C = \text{diag}(1,1,1)$ ，网络拓扑结构  $G = (g_{ij})$  仍按式(34)选取。 $u_i$  为控制器，其可按定理 2 中给出的方法进行设计。 $\hat{\theta}_i = [\hat{a}_i \ \hat{b}_i \ \hat{c}_i]^T$  为各响应节点对驱动网络中的未知参数向量  $\theta = [a \ b \ c]^T$  的估值，其可按定理 2 中给出的未知参数的估计方法进行设计。

在仿真中我们取驱动网络的状态初值为  $x_i(0) = [1 + 0.5i \ 1 + 0.5i \ 2 + i]^T$ , ( $i = 1, 2, \dots, 10$ )，响应网络的状态初值为  $y_i(0) = [4 + i \ 5 + i \ 6 + i]^T$ , ( $i = 1, 2, \dots, 10$ )。用定理 2 对控制器  $u_i$  进行设计，其中取正常数  $r_i = 1$ , ( $i = 1, 2, \dots, 10$ )，反馈增益的初值取为  $k_i(0) = 1$ , ( $i = 1, 2, \dots, 10$ )，参数估计器的初值取为  $\hat{\theta}_i(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ , ( $i = 1, 2, \dots, 10$ )，尺度函数矩阵取为  $\Lambda(t) = \text{diag}(2 + \sin t, 2 + \cos t, 3 + \sin t)$ ，仿真结果如图 3 和图 4 所示。

图3表示复杂网络同步误差随时间变化而渐近趋近于零，因此驱动网络式(33)和响应网络式(35)在我们所设计的控制器的作用下实现改进函数投影同步。图4表示复杂网络未知参数的估计图，由该图我们可以看到各响应节点的参数估值趋于驱动网络中的未知参数的真实值。因此数值仿真结果验证了所提方法的有效性。对比网络拓扑结构矩阵式(31)和式(34)可知，当复杂网络的节点增加时，复杂网络结构会变得更加复杂，在设计控制器时需增加控制器的数量，进而提高了控制代价。

由以上两个仿真结果可得通过所提定理对响应网络进行控制时，响应网络的状态变量从任意初始条件出发能很快地与驱动网络达到改进函数投影同步。同时，只需修改尺度函数矩阵，便可得到其他的同步方式，如当修改所有尺度函数为1时可获得完全同步<sup>[6,7]</sup>，修改所有尺度函数为其他常数时可获得投影同步<sup>[8,9]</sup>。与研究外同步的文献[24-27]相比，本文方法不仅可以实现完全同步或投影同步，还可以实现更为一般的改进函数投影同步。

5 结束语

本文研究在两个复杂网络中实现改进函数投影

同步的控制器设计方法。基于李雅普诺夫稳定性理论和自适应控制技术, 给出在模型参数已知和未知两种情况下, 如何设计自适应同步控制器使两个复杂网络达到改进函数投影同步。并在复杂网络模型参数未知时, 给出了未知参数的估计方法。最后利用两组数值仿真例子验证了所提方法的有效性。

### 参考文献

- [1] PANDIT S A and AMRITKAR R E. Characterization and control of small-world networks[J]. *Physical Review E*, 1999, 60(2A): 1119-1122. doi: 10.1103/PhysRevE.60.R1119.
- [2] STROGATZ S H. Exploring complex networks[J]. *Nature*, 2001, 410: 268-276. doi: 10.1038/35065725.
- [3] LÜ Jinhua and CHEN Guanrong. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 841-846. doi: 10.1109/TAC.2005.849233.
- [4] 陈娟, 陆君安, 周进. 复杂网络同步态与孤立节点解的关系[J]. *自动化学报*, 2013, 39(12): 2111-2120. doi: 10.3724/SP.J.1004.2013.02111.  
CHEN Juan, LU Jun'an, and ZHOU Jin. On the relationship between the synchronous state and the solution of an isolated node in a complex network[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(12): 2111-2120. doi: 10.3724/SP.J.1004.2013.02111.
- [5] LIANG Yi, WANG Xingyuan, and EUSTACE J. Adaptive synchronization in complex networks with non-delay and variable delay couplings via pinning control[J]. *Neurocomputing*, 2014, 123: 292-298. doi: 10.1016/j.neucom.2013.06.040.
- [6] LIANG Yi and WANG Xingyuan. Synchronization in complex networks with non-delay and delay couplings via intermittent control with two switched periods[J]. *Physica A*, 2014, 395: 434-444. doi: 10.1016/j.physa.2013.10.002.
- [7] LIU Heng, WANG Xingyuan, and TAN Guozhen. Adaptive cluster synchronization of directed complex networks with time delays[J]. *PLoS ONE*, 2014, 9(4): e95505. doi: 10.1371/journal.pone.0095505.
- [8] LIU Heng, WANG Xingyuan, and TAN Guozhen. Structure identification of uncertain complex networks based on anticipatory projective synchronization[J]. *PLoS ONE*, 2015, 10(10): e0139804. doi: 10.1371/journal.pone.0139804.
- [9] WANG Mingjun, WANG Xingyuan, and NIU Yujun. Projective synchronization of a complex network with different fractional order chaos nodes[J]. *Chinese Physics B*, 2011, 20(1): 010508. doi: 10.1088/1674-1056/20/1/010508.
- [10] NIAN Fuzhong and WANG Xingyuan. Optimal pinning synchronization on directed complex network[J]. *Chaos*, 2011, 21(4): 043131. doi: 10.1063/1.3665699.
- [11] YAND Lixin and JIANG Jun. Adaptive synchronization of drive-response fractional-order complex dynamical networks with uncertain parameters[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, 19(5): 1496-1506. doi: 10.1016/j.cnsns.2013.09.021.
- [12] 孙海义, 李宁, 张庆灵. 时延复杂网络的自适应周期间歇同步控制[J]. *控制与决策*, 2013, 28(5): 797-800.  
SUN Haiyi, LI Ning, and ZHANG Qingling. Synchronization of delayed complex dynamical networks via adaptive periodically intermittent control[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(5): 797-800.
- [13] 刘歌群, 许晓鸣. 非耗散耦合复杂网络受控同步能力分析[J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(3): 722-727. doi: 10.3724/SP.J.1146.2011.00753.  
LIU Gequn and XU Xiaoming. Controlled synchronizability analysis for non-diffusively coupled complex networks[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(3): 722-727. doi: 10.3724/SP.J.1146.2011.00753.
- [14] 褚衍东, 李红敏, 张建刚, 等. 带有时变时滞和非线性耦合的复杂网络同步[J]. *安徽大学学报(自然科学版)*, 2012, 36(2): 9-14.  
CHU Yandong, LI Hongmin, ZHANG Jianguang, et al. Synchronization of nonlinear complex network with time-varying delays[J]. *Journal of Anhui University (Natural Science Edition)*, 2012, 36(2): 9-14.
- [15] 张丽丽, 王银河, 王钦若. 不同维数非线性节点非线性耦合复杂动态网络渐近同步[J]. *控制与决策*, 2014, 29(3): 537-540.  
ZHANG Lili, WANG Yinhe and, WANG Qinruo. Asymptotic synchronization for nonlinear coupled complex dynamical networks with different-dimension nonlinear nodes[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(3): 537-540.
- [16] 吴雪飞, 徐晨. 基于牵制控制的一类线性耦合复杂网络同步[J]. *深圳大学学报理工版*, 2011, 28(5): 460-465.  
WU Xuefei and XU Chen. The synchronization of a dynamic complex network with linear coupling[J]. *Journal of Shenzhen University Science and Engineering*, 2011, 28(5): 460-465.
- [17] ZHANG Rong, YANG Yongqing, XU Zhenyuan, et al. Function projective synchronization in drive-response dynamical network[J]. *Physics Letters A*, 2010, 374(30): 3025-3028. doi: 10.1016/j.physleta.2010.05.041.
- [18] DU Hongyue. Function projective synchronization in drive-response dynamical networks with non-identical nodes[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2011, 44(7): 510-514. doi: 10.1016/j.chaos.2011.04.002.
- [19] DU Hongyue, SHI Peng, and LÜ Ning. Function projective synchronization in complex dynamical networks with time delay via hybrid feedback control[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2013, 14(2): 1182-1190. doi: 10.1016/j.nonrwa.2012.09.009.

- [20] CHEN Ying, CAO Long, and SUN Mei. Robust modified function projective synchronization in network with unknown parameters and mismatch parameters[J]. *International Journal of Nonlinear Science*, 2010, 10(1): 17-23.
- [21] DU Hongyue. Adaptive open-plus-closed-loop control method of modified function projective synchronization in complex networks[J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2011, 22(12): 1393-1407. doi: 10.1142/S0129183111016956.
- [22] WANG Weiping, PENG Haipeng, LI Lixiang, *et al.* Finite-time function projective synchronization in complex multi-links networks with time-varying delay[J]. *Neural Processing Letters*, 2015, 41(1): 71-88. doi: 10.1007/s11063-013-9335-4.
- [23] JIN Yunguo and ZHONG Shouming. Function projective synchronization in complex networks with switching topology and stochastic effects[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 259(15): 730-740. doi: 10.1016/j.amc.2015.02.080.
- [24] LI Changpin, SUN Weigang, and KURTHS J. Synchronization between two coupled complex networks[J]. *Physical Review E*, 2007, 76(4): 046204. doi: 10.1103/PhysRevE.76.046204.
- [25] TANG Hongwu, CHEN Liang, LU Junan, *et al.* Adaptive synchronization between two complex networks with nonidentical topological structures[J]. *Physica A*, 2008, 387(22): 5623-5630. doi: 10.1016/j.physa.2008.05.047.
- [26] WU Xiangjun and LU Hongtao. Outer synchronization of uncertain general complex delayed networks with adaptive coupling[J]. *Neurocomputing*, 2012, 82: 157-166. doi: 10.1016/j.neucom.2011.10.022.
- [27] 毛芳芳, 蒋国平. 具有不同节点动态和拓扑结构的两个复杂网络之间的同步[J]. *南京邮电大学学报(自然科学版)*, 2012, 32(5): 130-134.
- MAO Fangfang and JIANG Guoping. Synchronization between two complex dynamical networks with different node-dynamics and topological structure[J]. *Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science)*, 2012, 32(5): 130-134.
- 杜洪越: 女, 1975 年生, 教授, 研究方向为复杂网络同步、混沌同步、非线性控制等.
- 李春双: 女, 1990 年生, 硕士生, 研究方向为复杂网络同步.
- 公利滨: 男, 1965 年生, 高级工程师, 研究方向为复杂网络同步、非线性控制等.