第 38 卷第 5 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.38No.5
2016 年 5 月 Journal of Electronics & Information Technology May 2016

基于空间谱的频谱感知算法及性能分析

党小宇* 李阿明 虞湘宾
(南京航空航天大学电子信息工程学院 南京 210016)

摘 要：现有的基于特征值或谱密度的频谱感知算法，多分别使用近似高斯分布和 Tracy-Widom 分布来分别分析求解检验统计量在信号是否存在时的分布，未能给出统一的解析表达式。该文提出均匀线阵(ULA)条件下基于空间谱密度比的频谱感知算法，并且基于顺序统计量的最新研究成果，给出检验统计量统一的闭合表达式。该算法基于离散空间谱密度最大最小值的比建立检验统计量。仿真结果表明，对于 8 阵元的 ULA，在采样点数为 1000、检测概率为 0.9 时，所提算法比最大最小特征值(MME)比算法有约 1.7 dB 的性能优势，同时也有效验证了检验统计量理论分布的准确性。

关键词：认知无线电；频谱感知；均匀线阵；顺序统计量
中图分类号： TN929.5 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2016)05-1179-07
DOI: 10.11999/JEIT150823

Spatial Spectrum Based Spectrum Sensing Algorithm and Performance Analysis

DANG Xiaoyu LI Aming YU Xiangbin
(*College of Electronic Information Engineering*, *Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing* 210016, *China*)

Abstract: Spectrum sensing algorithms based on eigenvalue or spectral density usually use the Gaussian approximated distribution and Tracy-Widom distribution to analyze the test statistic with the presence of the primary user or not respectively, but it is hard to find the analysis expression with unified form. In this paper, a spectrum sensing algorithm is proposed based on spatial spectrum density ratio using a Uniform Linear Array (ULA), and a unified expression for the distribution of test statistic is proposed using the latest research results of order statistics. In this algorithm, the test statistic is established using the maximum and minimum values of the discrete spatial spectrum density. Simulation results show that the performance of the proposed algorithm is about 1.7 dB better than the Maximum-Minimum Eigenvalue (MME) ratio algorithm with the detection probability equal to 0.9. At the same time, the results also verify the accuracy of the theoretical distribution of the test statistic.

Key words: Cognitive Radio (CR); Spectrum sensing; Uniform Linear Array (ULA); Order statistics

1 引言

随着无线通信技术的高速发展，对频谱的需求变得日益紧迫，这给无线通信的发展带来了严峻的挑战。然而由于自然频带的限制，原来固定频谱分配方式已经不能满足现有的需求。为有效解决该问题，人们积极寻求更为高效合理的频谱利用方式。认知无线电(Cognitive Radio, CR)的诞生与发展[1,2]就旨在解决如何更高效地利用频谱资源的问题，其核心思想是通过频谱感知和系统的智能学习，实现动态频谱分配和频谱共享。

阵列天线技术已经应用于 LTE(Long Term Evolution)基站，并且在未来的第五代移动通信(5G)的发展中大规模的阵列天线将得到有效应用，同时频谱共享技术也将成为其关键技术[3]。因此研究基站的阵列天线信号处理，有效利用阵列天线的性能优势，将提供更高效的频谱感知能力，为频谱的动态分配和共享提供坚实的基础。目前，有诸多关于频谱感知算法的研究[4]，其中基于特征值的频谱感知算

收稿日期：2015-07-09；改回日期：2015-12-02；网络出版：2016-02-03
*通信作者：党小宇 dang@nuaa.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61172078, 61201208)，教育部留学回国人员科研启动基金和中央高校基本科研业务费(NS2014038)，南京航空航天大学研究生创新基地开放基金(kfjj20150404)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61172078, 61201208), The State Education Ministry Project Sponsored by the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (NS2014038), The Foundation of Graduate Innovation Center in NUAA (kfjj20150404)

法表现出优秀的感知性能。文献[5]基于广义最大似然比(GLRT)方法和特征子空间的方法，给出了认知用户在多天线条件下的几种基于特征值的频谱感知方法，这些方法有效克服了噪声不确定度[6]的问题，并具有很好的频谱感知能力。但它们均需要估计信号协方差矩阵，然而利用最大似然估计得到的协方差矩阵往往不具备 Toeplitz 形式，因此协方差矩阵的不精确估计会带来一定感知性能的损失。文献[7,8]通过使用均匀线阵(ULA)，将波束成形用于频谱感知，有效提高接收信号的信噪比，但在 ULA 条件下基于空间谱密度比的频谱感知算法仍然未得到研究。

更进一步，在算法性能分析上，基于特征值或者谱密度的算法往往使用 Tracy-Widom 分布[9,10]来分析频谱感知方法的虚警概率和判决门限，并且用近似高斯分布来分析检测概率，两者未能有统一的分析表达式。利用 Tracy-Widom 的性质可将虚警概率和判决门限的分析统一到高斯渐进分布上，简化该分布的计算。但是，Tracy-Widom 分布计算有很严格的假设条件，并且需要求解特殊的微分方程[11]，即 Painlevé II 微分方差，复杂的计算往往弱化了对影响检测性能的因素的分析，使得物理意义不明确。

本文提出了一种建立在均匀线阵(ULA)基础上空间谱密度比的频谱感知算法，并给出了统一的检验统计量分布的闭合表达式。这是根据特征值与空间谱密度的关系，并以有效利用加权 FFT 方法为条件。算法充分利用了阵列天线的优势，将接收信噪比提高了 M 倍(M 为天线阵元个数)，有效提高了频谱感知的性能，并且该算法不受噪声不确定度的影响，是有效的频谱感知算法。数值仿真结果表明，在检测概率为 0.9 时，所提出的算法比已知的最大最小特征值(MME)比算法有约 1.7 dB 的性能优势，同时也有效验证了所提出的检验统计量理论分布的准确性。

本文内容安排如下：第 2 节给出频谱感知系统模型的描述；第 3 节提出基于空间谱的频谱感知算法；第 4 节给出了检验统计量的分布，分析了所提算法的各项性能；第 5 节给出仿真结果与讨论分析；第 6 节总结全文。

2 系统模型描述

考虑认知用户拥有 M 个阵元的均匀线阵[12]，阵元间距 d 为半波长，有 L 个 $(L<M)$ 入射角分别为 $\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_L$ 的同中心频率的属于授权用户的互不相关的窄带远场的随机信号作用于该线阵。第 m 个阵元在时刻 n 的接收信号的采样为

$$x_m[n]=\sum_{l=1}^{L}s_l[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi m\sin(\theta_l)}+w_m[n],\quad m=0,1,\cdots,M-1 \tag{1}$$

认知用户的 M 个阵元输出矢量信号为 $\boldsymbol{x}[n]=[x_1[n],x_2[n],\cdots,x_M[n]]^{\mathrm{T}}$。把式(1)表示成矢量形式，将得到信号感知的二元假设检验问题[13]为

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{H}_0:\ \boldsymbol{x}[n]=\boldsymbol{w}[n], && n=0,1,\cdots,N-1\\ &\mathcal{H}_1:\ \boldsymbol{x}[n]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}[n]+\boldsymbol{w}[n], && n=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{s}[n]=[s_1[n]\ s_2[n]\cdots s_L[n]]^{\mathrm{T}}$ 为信号矢量；噪声矢量为 $\boldsymbol{w}[n]=[w_1[n]\ w_2[n]\cdots w_M[n]]^{\mathrm{T}}$；均匀线阵的导向矩阵为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}(\theta_1)\ \boldsymbol{a}(\theta_2)\cdots\boldsymbol{a}(\theta_L)]$，其列向量为导向向量。

$$\boldsymbol{a}(\theta_l)=\left[1\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi\sin(\theta_l)}\quad\cdots\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(M-1)\sin(\theta_l)}\right]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

假设 $\boldsymbol{w}[n]$ 是均值为零，方差为实数 σ_w^2 的独立同分布的广义平稳(WSS)复高斯随机噪声矢量。授权用户发射机的信号 $\boldsymbol{s}[n]$ 是均值为零，协方差矩阵为 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{ss}}=E(\boldsymbol{s}[n]\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}[n])$ 的相互独立的 WSS 高斯随机信号矢量，且信号和噪声之间相互独立。因为接收信号 $\boldsymbol{x}[n]$ 是 WSS 复高斯随机矢量，所以 $\boldsymbol{x}[n]$ 的协方差矩阵等于自相关矩阵，自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{xx}}=E(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}})$ 的具体形式是 Toeplitz 矩阵，如式(4)：

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{xx}}=\begin{bmatrix}r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \cdots & r_{xx}^*[M-1]\\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[M-2]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{xx}[M-1] & r_{xx}[M-2] & \ldots & r_{xx}[0]\end{bmatrix} \tag{4}$$

在假设 $\mathcal{H}_0$ 时，接收信号的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{xx}}=\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ww}}=E(\boldsymbol{w}[n]\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}[n])=\sigma_w^2\boldsymbol{I}_{M\times M} \tag{5}$$

此时 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{xx}}$ 是对角阵，也是循环矩阵。在假设 $\mathcal{H}_1$ 时，接收信号的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{xx}}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})E(\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{H}}+E(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}})\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ss}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ww}}\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Lambda}_s\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{H}}+\sigma_w^2\boldsymbol{I}_{M\times M}\end{aligned} \tag{6}$$

由于授权信号相互独立，所以信号自相关矩阵为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{s}}=\mathrm{diag}\{\sigma_1'^2,\sigma_2'^2,\cdots,\sigma_L'^2\}$，其中 $\sigma_l'^2$ 为信号功率。

3 基于空间谱的频谱感知算法

3.1 基于特征值与谱密度的频谱感知算法

空间谱一般定义为 $P_{\boldsymbol{x}}(w)=\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}$，这里 $\boldsymbol{w}$ 为加权向量。令加权向量 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}_M(k)/\sqrt{M}$，即得到本文中使用的离散空间谱密度定义 $P_{\boldsymbol{x}}(k)=(1/M)\cdot\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}(k)$，这里 $\boldsymbol{f}_M(k)$ 为 FFT 的变换向量，具体形式为 $\boldsymbol{f}_M(k)=[1\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi 2k/M}\quad\cdots\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(M-1)2k/M}]^{\mathrm{T}}$。为避

免协方差矩阵 $\boldsymbol{R_{xx}}$ 的估计影响感知性能，直接利用 $\boldsymbol{x}[n]$ 计算离散谱，即上述谱密度定义的等价形式。

$$P_{\boldsymbol{x}}(k)=\frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X_n(k)\right|^2 \tag{7}$$

其中 $X_n(k)=\sum_{m=0}^{M-1}x_m[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mk/M}$，是 $\boldsymbol{x}[n]$ 的离散傅里叶变换，可以通过 FFT 快速计算求得。

当信号来向对准 M 点 FFT 的 M 个波束的最大指向时，见图 1，信号的入射角将满足下述角度条件，此时协方差矩阵可以写成 $\boldsymbol{R_{xx}}=\boldsymbol{F}_M\boldsymbol{\Lambda_x}\boldsymbol{F}_M^{\mathrm{H}}$ 的形式，$\boldsymbol{R_{xx}}$ 将是循环矩阵[14]。

$$\theta_l\in\left\{\psi_k\middle|\psi_k=\begin{cases}\arcsin(-2k/M), & k=0,\cdots,M/2-1\\ \arcsin(-2k/M+2), & k=M/2,\cdots,M-1\end{cases}\right. \tag{8}$$

其中 θ_l 为信号的入射角，θ_k 对应于 FFT 的 M 个波束最大指向角度，矩阵 $\boldsymbol{F}_M=\frac{1}{\sqrt{M}}\left[\boldsymbol{f}_M(1)\ \boldsymbol{f}_M(2)\cdots\boldsymbol{f}_M(M)\right]$，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda_x}=\mathrm{diag}\{\sigma_1^2\ \sigma_2^2\cdots\sigma_M^2\}$。对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda_x}$ 的元素满足关系 $\begin{cases}\sigma_k^2=M\sigma_l'^2+\sigma_w^2, & \psi_k=\theta_l\\ \sigma_k^2=\sigma_w^2, & \psi_k\neq\theta_l\end{cases}$，从中可以看出，利用均匀线阵对接收信号可以有 M 倍的信号功率增益。因为循环矩阵的特征值可通过求自相关矩阵第 1 列元素 $[r_0\ r_1\cdots r_{M-1}]$ 的 FFT 求得，所以此时特征值将等于离散谱密度的值。

利用统计方法和随机矩阵理论得到的最大最小特征值(MME)比检验统计量[9]为 $T_{\mathrm{MME}}(\boldsymbol{\lambda})=\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\gamma$，MME 方法具备很好的感知能力，能有效抵抗噪声不确定度的影响。由于空间谱密度的最大最小值分别为特征值的上下限[13]，即 $\min_{\omega}P_{\boldsymbol{x}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\le\lambda_i\le\max_{\omega}P_{\boldsymbol{x}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，这样可以考虑用空间谱密度的最值代替自相关矩阵特征值的最值建立检验统计量。

$$T_{\mathrm{MMP}}=\frac{\max\limits_k P_{\boldsymbol{x}}(k)}{\min\limits_k P_{\boldsymbol{x}}(k)} \tag{9}$$

3.2 利用调制 FFT 提高频谱感知能力

在实际应用中，阵元数目受到目前生产工艺及天线阵列体积大小的制约，往往不能通过提高采样数目来更多地划分空间角，来满足式(8)的角度要求。为解决上述问题，本文利用调制 FFT[15]的方法，并参考均匀线阵接收机的常见结构[16]，通过对 $\boldsymbol{x}[n]$ 加权，间接使得 FFT 的 M 个波束在角度 $[-90°,90°]$ 间移动，进而使得 FFT 波束的最大指向对准信号的入射方向，此时对应 FFT 波束上获得的离散谱的值最大。信号的加权运算如式(10)：

$$\boldsymbol{x}'[n]=\boldsymbol{x}[n]\odot\boldsymbol{d}(\Delta\psi) \tag{10}$$

其中 $\odot$ 为点乘符号，$\boldsymbol{d}(\Delta\psi)=[1\ \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi\Delta\psi}\ \cdots\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(M-1)\Delta\psi}]^{\mathrm{T}}$。使用 FFT 变换向量 $\boldsymbol{f}_M(k)$ 对 $\boldsymbol{x}'[n]$ 计算离散谱，等价于使用变换向量 $\boldsymbol{f}_M(k)\odot\boldsymbol{d}(\Delta\psi)$ 对 $\boldsymbol{x}[n]$ 计算离散谱，从而间接实现了 FFT 波束指向的搬移，其中 FFT 变换向量为 $\boldsymbol{f}_M(k)=[1\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi2k/M}\cdots\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(M-1)2k/M}]^{\mathrm{T}}$。图 1 为当天线阵元数 $M=8$ 时，M 点 FFT 对应的方向增益图及空间谱密度的关系图。

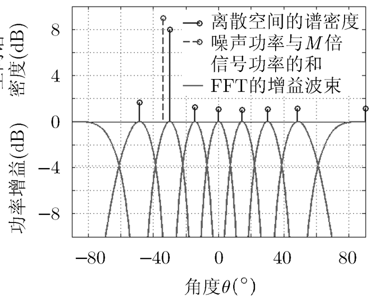

图 1　FFT 方向增益波束图与空间谱的关系

当信号入射角没有落在 FFT 波束最大指向位置时，最差情况下有−3.89 dB 的功率衰减。该文选取 1 次 FFT 和 3 次调制 FFT 的方案，对应的角度偏移量为 $\Delta\psi\in\{0,3/16,3/8,9/16\}$。如图 2 所示，此时将有 32 个 FFT 波束用于各个入射方向信号的感知，可以实现有效的角度覆盖，获得的离散谱最大值的功率衰减最多时仅有−0.22 dB，其影响是近乎可以忽略的。频谱感知算法的算法原理框图如图 2。

频谱感知算法步骤如下：

(1)根据系统中 4 个通道对应的角度偏移量，通

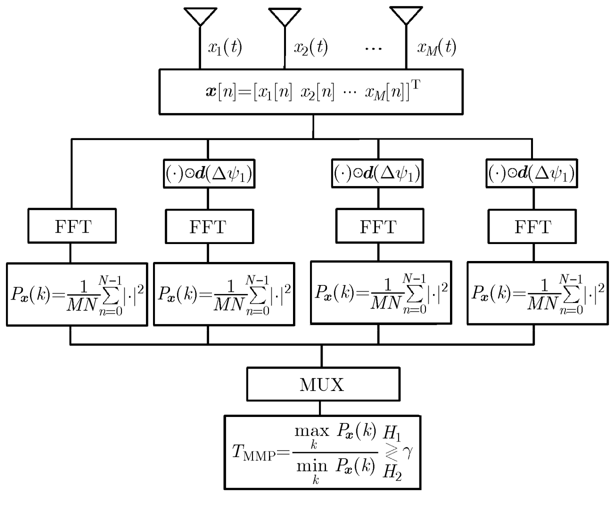

图 2 系统原理框图

过式(1)计算加权后的信号；

(2)分别求加权后信号的 M 点 FFT，即 $X_n(k)=\sum_{m=0}^{M-1}x_m^{'}[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mk/M}$ ；

(3)计算各个通道的离散空间谱密度 $P_{\boldsymbol{x}}(k)=\dfrac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X_n(k)\right|^2$ ；

(4)根据信号的来向，并通过 FFT 最大波束指向选出性能最佳的通道；

(5)计算检验统计量 T_{MMP}，并与判决门限比较，依据 $T_{\mathrm{MMP}}=\dfrac{\max_k P_{\boldsymbol{x}}(k)}{\min_k P_{\boldsymbol{x}}(k)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\gamma$ 给出判决结果。

4 检验统计量的性能分析

4.1 离散谱密度的分布

特征值频谱感知算法基于的协方差矩阵，往往是通过最大似然估计获得，而估计的误差将带来频谱感知性能上的损失。因此，直接利用式(7)计算得到的空间谱密度来进行频谱感知计算，可以避免该问题带来的影响。下面将分析给出离散谱密度的分布。

根据假设，授权用户所发射的信号服从零均值 WSS 高斯分布，且相互独立 $s_l[n]\sim\mathcal{N}(0,\sigma_l^2)$。天线阵元的噪声服从零均值 WSS 复高斯分布，且相互独立 $w_m[n]\sim\mathcal{CN}(0,\sigma_w^2)$。同时信号和噪声间相互独立。各个天线阵元的接收信号 $x_m[n]$ 满足关系式(1)，由于 $x_m[n]$ 是 $s_l[n]$ 和 $w_m[n]$ 的线性组合，所以 $x_m[n]$ 也将服从高斯分布：

$$x_m[n]\sim\mathcal{CN}\left(0,\sum_{l=1}^{L}\sigma_l'^2+\sigma_w^2\right)\tag{11}$$

同理， $X_n(k)$ 是 $x_m[n]$ 的线性组合，所以 $X_n(k)$ 也满足高斯分布，均值 $E\{X_n(k)\}=0$，考虑各个天线的接收信号 $x_m[n]$ 是相关的，所以方差 $K\{X_n(k)\}=K\left\{\sum_{m=0}^{M-1}x_m[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mk/M}\right\}=\boldsymbol{f}_k^*\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}_k=M\sigma_k^2$ ，所以 $X_n(k)$ 的分布为

$$X_n(k)\sim\mathcal{CN}(0,M\sigma_k^2)\tag{12}$$

根据 χ^2 分布的性质有 $E\left(\left|X_n(k)\right|^2/\left(M\sigma_k^2\right)\right)=1$ ，$K\left(\left|X_n(k)\right|^2/\left(M\sigma_k^2\right)\right)=2$ ，则 $E\left(\left|X_n(k)\right|^2\right)=M\sigma_k^2$ ，$K\left(\left|X_n(k)\right|^2\right)=2M^2\sigma_k^4$。当 N 足够大，根据中心极限定理， $P_{\boldsymbol{x}}(k)$ 将是关于 k 相互独立的高斯随机变量。

$$P_{\boldsymbol{x}}(k)\sim\mathcal{N}(\sigma_k^2,2\sigma_k^4/N)\tag{13}$$

4.2 检验统计量的分布

下面利用顺序统计量的方法，分析给出检验统计量式(9)在不同假设条件下的分布。

在假设 $\mathcal{H}_0$ 时，离散空间谱密度 $P_{\boldsymbol{x}}(k)$ 是关于 k 的独立同分布的高斯随机变量， $P_{\boldsymbol{x}}(k)\sim\mathcal{N}(\sigma_w^2,2\sigma_w^4/N)$。将 $P_{\boldsymbol{x}}(k)$ 按照递增排序标记为 $P_{1:M}\le P_{2:M}\le\cdots\le P_{M:M}$ ，每个随机变量的概率密度函数均相同，标记为 $f(x)$ ，同样累计分布函数也均相同，标记为 $F(x)$。其中离散空间谱密度最小值最大值分别为 $P_{1:M}=\min_k P_{\boldsymbol{x}}(k)$, $P_{M:M}=\max_k P_{\boldsymbol{x}}(k)$ ，随机变量对 $(P_{1:M},P_{M:M})$ 的联合概率密度函数[17]为

$$\begin{aligned}g(x,y)&=M(M-1)(F(y)-F(x))^{M-2}f(x)f(y),\\&\quad 0<x<y<\infty\end{aligned}\tag{14}$$

将检验统计量 T_{MMP} 表示为 $w=y/x$ 的形式，其中 $0<x<y<\infty$, $w\ge 1$。检验统计量的概率密度函数为

$$f(w)=\int_0^\infty x\cdot g(x,wx)\mathrm{d}x\tag{15}$$

将具体的 $g(x,y)$ 代入式(15)，可以得到检验统计量 T_{MMP} 的概率密度函数为

$$\begin{aligned}f(w)&=M(M-1)\\&\quad\cdot\int_0^\infty x(F(wx)-F(x))^{M-2}f(x)f(wx)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{16}$$

通过积分，可以得到累计分布函数：

$$\begin{aligned}F(w)&=\int_1^w f(w)\mathrm{d}w=\int_1^w\int_0^\infty x\cdot g(x,wx)\mathrm{d}x\mathrm{d}w\\&=M(M-1)\int_1^w\int_0^\infty x(F(wx)-F(x))^{M-2}\\&\quad\cdot f(x)f(wx)\mathrm{d}x\mathrm{d}w\end{aligned}\tag{17}$$

所以检验统计量的虚警概率为

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{fa}}(\gamma)&=P(T>\gamma\mid\mathcal{H}_0)=1-F_T(\gamma\mid\mathcal{H}_0)\\&=1-M(M-1)\\&\quad\cdot\int_1^\gamma\int_0^\infty x(F(\gamma x)-F(x))^{M-2}f(x)f(\gamma x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\gamma\end{aligned}\tag{18}$$

其中判决门限 $\gamma>1$。通常取虚警概率 $P_{\mathrm{fa}}=0.1$ 时对应的 γ 作为判决门限，即 $\gamma=P_{\mathrm{fa}}^{-1}(0.1)$ ，由式(18)可计算得到精确的数值解。

在假设 $\mathcal{H}_1$ 时，离散空间谱密度 $P_{\boldsymbol{x}}(k)$ 之间相互独立，但不满足同分布的条件， $P_{\boldsymbol{x}}(k)\sim\mathcal{N}(\sigma_{k|H_1}^2,2\sigma_{k|H_1}^4/N)$。同样将 $P_{\boldsymbol{x}}(k)$ 按照递增排序标记为 $P_{1:M}\le P_{2:M}\le\cdots\le P_{M:M}$ ，对应离散空间谱密度的概率密度函数标记为 $f_i=f_{X_i}(x)$，累计分布函数标记为 $F_i=F_{X_i}(x)$。

为了推导离散空间谱密度的累计分布函数，首先定义积和式(Permanent)[18]：如果 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots$ 是列向量，那么

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots\end{bmatrix}\tag{19}$$
$$\quad i_1\quad\ \ i_2\quad\ \cdots$$

将表示 i_1 个 $\boldsymbol{a}_1$ 的拷贝，i_2 个 $\boldsymbol{a}_2$ 的拷贝，以此类推。定义 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积和式，这里 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 的方阵。

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A}=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)} \tag{20}$$

这里 S_n 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全排列的集合。离散空间谱密度随机变量对 $(P_{1:M},P_{M:M})$ 的联合概率密度函数[19]为

$$g(x,y)=\frac{1}{(M-2)!}\mathrm{per}[\underset{1}{\boldsymbol{f}(x)}\quad \underset{M-2}{\boldsymbol{F}(y)-\boldsymbol{F}(x)}\quad \underset{1}{\boldsymbol{f}(y)}],\quad 0<x<y<\infty \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{f}(x)=[f_1\ f_2\ \cdots\ f_n]$，$\boldsymbol{F}(x)=[F_1\ F_2\ \cdots\ F_n]$。则根据式(15)，检验统计量的概率密度函数为

$$f(w)=\frac{1}{(M-2)!}\cdot\int_0^\infty x\cdot\mathrm{per}[\underset{1}{\boldsymbol{f}(x)}\quad \underset{M-2}{\boldsymbol{F}(wx)-\boldsymbol{F}(x)}\quad \underset{1}{\boldsymbol{f}(wx)}]\mathrm{d}x \tag{22}$$

同样通过积分，可以得到检验统计量 T_{MMP} 的累计分布函数为

$$\begin{aligned}F(w)&=\int_1^w f(x)\mathrm{d}w=\int_1^w\int_0^\infty x\cdot g(x,wx)\mathrm{d}x\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{(M-2)!}\cdot\int_1^w\int_0^\infty x\cdot\mathrm{per}[\underset{1}{\boldsymbol{f}(x)}\quad \underset{M-2}{\boldsymbol{F}(wx)-\boldsymbol{F}(x)}\quad \underset{1}{\boldsymbol{f}(wx)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}w\end{aligned} \tag{23}$$

由此，得到检验统计量的检测概率为

$$\begin{aligned}P_d&=P(T>\gamma\mid\mathcal{H}_1)=1-F_T(\gamma\mid\mathcal{H}_1)\\&=1-\frac{1}{(M-2)!}\cdot\int_1^\gamma\int_0^\infty x\cdot\mathrm{per}[\underset{1}{\boldsymbol{f}(x)}\quad \underset{M-2}{\boldsymbol{F}(\gamma x)-\boldsymbol{F}(x)}\quad \underset{1}{\boldsymbol{f}(\gamma x)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}\gamma\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $\gamma>1$。由上述分析可知式(23)为式(17)的一般表达，即本文利用顺序统计量的研究方法，给出了检验统计量分布的统一解析表达式。

5　仿真结果与讨论

下面通过 Monte-Carlo 仿真来评估本文中频谱感知算法的性能和理论分析的正确性。一般情况下的仿真条件为：使用图 2 中的感知方案，设定阵元个数 $M=8$，待感知信号个数为 $L=1$，未特别说明的情况下，仿真数据长度即采样点数默认取 $N=1000$。仿真次数设定为在假设 $\mathcal{H}_0$ 条件下为 100000，在假设 $\mathcal{H}_1$ 条件下为 10000，其中选择 $\mathcal{H}_0$ 仿真次数大于 $\mathcal{H}_1$ 是为了确保获得的仿真判决门限的相对准确性。

仿真 1　理论分析的仿真验证

图 3 利用式(18)，分析比较了虚警概率和判决门限关系的理论与仿真曲线。并且，分别给出了采样个数 $N=100$，$N=200$，$N=1000$ 情况下的仿真和理论曲线，从图中可以比较看出，当 N 适当大时，理论门限与仿真门限几乎完全匹配。据此，可以得到精确的判决门限。图 4 利用式(24)，分析对比了系统在采样个数 $N=100$，$N=200$，$N=1000$ 情况下的理论性能与仿真性能，从图中可以看出，对于算法的感知性能，仿真曲线与理论曲线重合得很好，并且随着 N 的增大，仿真结果越接近理论值。因此，仿真曲线与理论曲线对比结果可以有效证明理论分析的正确性。

仿真 2　频谱感知算法性能分析与比较

图 5 比较了基于空间谱密度的感知算法 T_{MMP}，基于特征值的频谱感知算法 T_{MME} 和能量检测算法 T_{ED} 在信噪比为-18 dB 时的接收机工作特性曲线(ROC)。在检测概率为 0.9 时，基于空间谱的频谱感知算法 T_{MMP} 对应的虚警概率为 0.17，能量检测 T_{ED} 对应的虚警概率为 0.44，而特征值检测算法 T_{MME} 的虚警概率为 0.62。可以看出，在相同的检测概率下，基于空间谱密度比的频谱感知算法 T_{MMP} 产生的虚警概率最小，性能明显优于其他两种方法。

图 6 分析了在虚警概率为 0.1 的情况下，检测概率与信噪比的关系，并分别给出各检验统计量的性能曲线。从图中可以看出，在检测概率为 0.9 时，文中 T_{MMP} 方法所需的信噪比为-17.7 dB，基于特征值的方法 T_{MME} 需要的信噪比为-16.0 dB，能量检测 T_{ED} 需要的信噪比为-15.5 dB。从中可以看出，与基于特征值的感知方法 T_{MME} 比较，T_{MMP} 算法需要的信噪比最小，并且相对 T_{MME} 算法有约 1.7 dB 的性能优势，相对 T_{ED} 算法有约 2 dB 的性能优势。T_{MMP} 算法的性能明显优于其他两种算法。

图 7 比较了几种感知算法抵抗噪声不确定度的能力。在仿真中，对噪声添加了 0.5 dB 的噪声不确定度，对比图 6 和图 7，从中可以看到 T_{MMP} 和 T_{MME} 算法的性能几乎没有变化，即对噪声不确定度表现出很好的抵抗能力。而能量检测算法受噪声不确定度的影响很大，性能严重变差。

6　结论

本文通过建立空间谱密度与特征值的关系，提出了在均匀线阵(ULA)基础上的空间谱密度的感知算法，并且利用顺序统计量推导了统一的检验量性能的解析表达式，给出了检验统计量的ROC曲线和性能曲线。仿真结果有效验证了该算法与理论分析

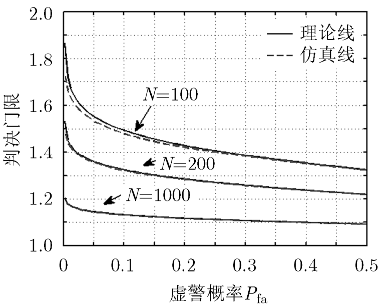

图 3 判决门限与虚警概率曲线

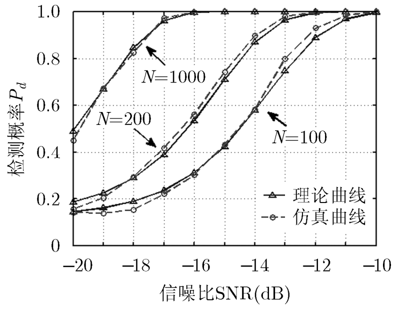

图 4 检验统计量的仿真与理论性能曲线

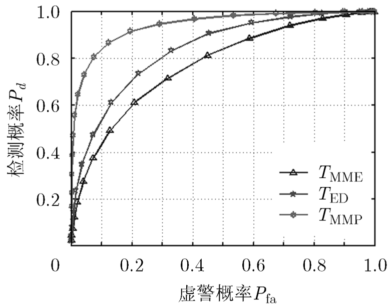

图 5 接收机工作特性曲线 ROC

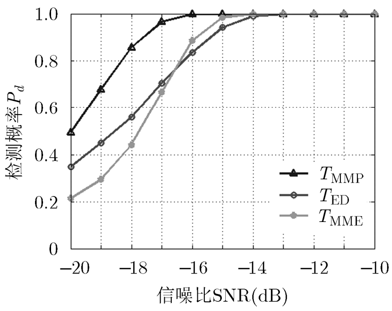

图 6 频谱感知算法性能比较

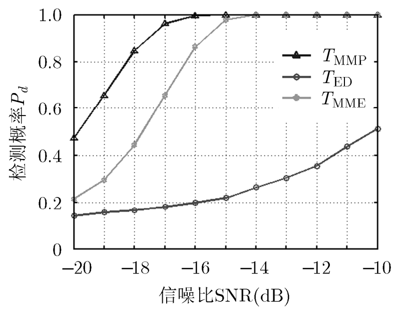

图 7 抗噪声不确定度性能比较

的一致性。该算法充分利用空间谱的信息，性能表现优于基于特征值的MME算法，对于8阵元的ULA，在采样点数为1000、检测概率为0.9时，比MME算法有约1.7 dB的性能优势，并且能有效抵抗噪声不确定度的影响。

参 考 文 献

[1] MITOLA J and MAGUIRE G Q. Cognitive radio: making software radios more personal[J]. *IEEE Personal Communications*, 1999, 6(4): 13–18. doi: 10.1109/98.788210.

[2] HATTAB G and IBNKAHALA M. Multiband spectrum access: great promises for future cognitive radio networks[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2014, 102(3): 282–306. doi: 10.1109/JPROC.2014.2303977.

[3] HONG Xuemin, WANG Jing, WANG Chengxiang, *et al.* Cognitive radio in 5G: a perspective on energy-spectral efficiency trade-off[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2014, 52(7): 46–53. doi: 10.1109/MCOM.2014.6852082.

[4] LÓPEZ-BENÍTEZ M. Sensing-based spectrum awareness in cognitive radio: challenges and open research problems[C]. International Symposium on Communication Systems, Networks & Digital Signal Processing, Manchester, 2014: 459–464. doi: 10.1109/CSNDSP.2014.6923873.

[5] ZHANG Rui, TENG Joonlim, LIANG Yingchang, *et al.* Multi-antenna based spectrum sensing for cognitive radios: a GLRT approach[J]. *IEEE Transactions on Communications,* 2010, 58(1): 84–88. doi: 10.1109/TCOMM.2010.01.080158.

[6] TANDRA R and SAHAI A. SNR walls for signal detection[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2008, 2(1): 4–17. doi: 10.1109/JSTSP.2007.914879.

[7] 赵晓晖，李晓燕. 认知无线电中基于阵列天线和协方差矩阵的频谱感知算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(7): 1693–1698. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01057.
ZHAO Xiaohui and LI Xiaoyan. Spectrum sensing algorithm in cognitive radio based on array antenna and covariance matrix[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(7): 1693–1698. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01057.

[8] CHOPRA R, GHOSH D, and MEHRA D K. Spectrum sensing for cognitive radios based on space-time FRESH filtering[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2014, 13(7): 3903–3913. doi: 10.1109/TWC.2014.2314125.

[9] ZENG Yonghong and LIANG Yingchang. Eigenvalue-based spectrum sensing algorithms for cognitive radio[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(6): 1784–1793. doi: 10.1109/TCOMM.2009.06.070402.

[10] LIU Chang and JIN Minglu. Maximum-minimum spatial spectrum detection for cognitive radio using parasitic antenna arrays[C]. IEEE/CIC International Conference on Communications, Shanghai, 2014: 365–369. doi: 10.1109/ICCChina.2014.7008303.

[11] LU W and TIRKKONEN O. Spectrum sensing with Gaussian approximated eigenvalue ratio based detection[C]. International Symposium on Wireless Communication Systems, York, 2010: 961–965. doi: 10.1109/ISWCS.2010.5624271.

[12] PILLAI S U and BURRUS C S. Array Signal Processing[M].

New York: Springer, 1989: 8–45.
[13] KAY S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume II: Detection Theory[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1998: 33–41.
[14] CHAN R H and NG M K. Conjugate gradient methods for Toeplitz systems[J]. *SIAM Review*, 1996, 38(3): 427–482.
[15] LI Tong and TANG Yinhui. Frequency estimation based on modulation FFT and MUSIC algorithm[C]. Pervasive Computing Signal Processing and Applications, Harbin, 2010: 525–528. doi: 10.1109/PCSPA.2010.132.
[16] MADANAYAKE A, WIJENAYAKE C, BELOSTOTSKI L, *et al*. An overview of multi-dimensional RF signal processing for array receivers[C]. Moratuwa Engineering Research Conference, Moratuwa, 2015: 255–259. doi: 10.1109/MERCon.2015.7112355.
[17] ARNOLD B C, BALAKRISHNAN N, and NAGARAJA H N. A First Course in Order Statistics[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008: 16–21.
[18] GÜNGÖR M, BULUT Y, and ÇALIK S. Distributions of order statistics[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2009, 3(16): 795–802.
[19] GÜNGÖR M. On joint distributions of order statistics from innid variables[J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2012, 35(1): 215–225.

党小宇：　男，1973 年生，副教授，　研究方向为频谱感知、卫星导航、信道编码理论、深空通信.
李阿明：　男，1990 年生，硕士生，　研究方向为频谱感知、深空通信.
虞湘宾：　男，1970 年生，教授，研究方向为通信理论优化.

“在线社交网络的挖掘与分析”专题征文通知

在线社交网络正成为社会关系维系和信息传播的重要渠道和载体，虚拟的社交网络和真实社会的交融互动对社会的直接影响越来越大，直接影响国家安全与社会稳定。为了满足其在个人生活、社会管理创新和国家战略安全等层面的广泛需求，《电子与信息学报》拟推出“在线社交网络的挖掘与分析”专题报道，现发布专题征文通知。本专题将围绕社交网络的“结构特性”、“群体行为与互动规律”、“信息传播”3个核心问题组稿，旨在推进社交网络分析与网络信息传播的基础理论和关键技术的研究。

1 专题主编

方滨兴院士(北京邮电大学)、许进教授(北京大学)、贾焰教授(国防科技大学)。

2 征文范围

“在线社交网络的挖掘与分析”专栏重点从以下几方面，征集高质量的研究论文：(1)在线社交网络结构特征分析及建模；(2)虚拟社区发现与演化分析；(3)在线社交网络用户行为分析；(4)在线社交网络情感分析；(5)个体影响力及群体影响机制理论；(6)个性化推荐和链路预测方法；(7)社交网络的内容表示和管理；(8)面向社交网络的信息检索；(9)在线社交网络信息传播建模与预测；(10)影响最大化计算方法；(11)在线社交网络的话题发现与演化。

所征集的论文内容不限于以上方面，所有与在线社交网络分析与信息传播相关的高水平论文均接受投稿。为保证“在线社交网络的挖掘与分析”专栏文章的质量，最终录取文章数量由征集到的稿件的质量和审稿情况决定。

3 投稿要求

稿件类型要求：前瞻性的研究论文，高质量的综述论文。稿件尚未公开发表，并非一稿多投；无抄袭、剽窃、侵权等不良行为。

投稿方式：登录《电子与信息学报》网站(http://jeit.ie.ac.cn/)注册投稿。投稿时请在作者留言一栏中注明“社交网络专题”。

稿件格式：参照《电子与信息学报》论文模板。

截稿时间：2016 年 12 月。