

基于变量节点更新的LDPC码加权比特翻转译码算法

陶雄飞 王跃东* 柳盼

(华中科技大学光学与电子信息学院 武汉 430074)

摘要: 该文提出一种改进的低密度奇偶校验(Low Density Parity-Check, LDPC)码的加权比特翻转译码算法。该算法引入了变量节点的更新规则,对翻转函数的计算更加精确,同时能够有效弱化环路振荡引起的误码。仿真结果表明,与已有的基于幅度和的加权比特翻转译码算法(SMWBF)相比,在加性高斯白噪声信道下,该文算法在复杂度增加很小的情况下获得了误码率性能的有效提升。

关键词: 低密度奇偶校验码; 加权比特翻转译码; 环路振荡; 变量节点更新

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)03-0688-06

DOI: 10.11999/JEIT150720

Weighted Bit-flipping Decoding Algorithm for LDPC Codes Based on Updating of Variable Nodes

TAO Xiongfei WANG Yuedong LIU Pan

(School of Optical and Electronic Information, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: An improved weighted bit-flipping decoding algorithm for LDPC codes is presented. The proposed algorithm introduces an updating rule for variable nodes to efficiently improve the reliability of the flipped bits and reduces the error codes caused by the oscillation of the loops. Simulation results show that the proposed algorithm achieves better BER performance than the Sum of Magnitude based Weighted Bit-Flipping (SMWBF) decoding algorithm over the additive white Gaussian noise channel with only a small increase in computational complexity.

Key words: Low-Density Parity-Check (LDPC) codes; Weighted Bit-Flipping (WBF) decoding; Loop oscillation; Updating of variable nodes

1 引言

文献[1]于1962年首次提出的低密度奇偶校验(Low-Density Parity-Check, LDPC)码,在90年代由文献[2]重新发现并证明具有逼近香农限的性能。此后,LDPC码逐渐成为通信领域编译码研究的一个热点。

LDPC译码算法主要分为软判决译码和硬判决译码。软判决译码算法性能优秀但译码复杂度高,主要包括基于消息传递的置信传播(Belief Propagation, BP)算法^[3],最小和算法以及各种改进形式。硬判决译码又称作比特翻转译码。文献[1]提出的比特翻转(Bit-Flipping, BF)算法,每次迭代时

翻转不满足校验方程个数最多的比特,复杂度最小,但是译码性能也最差。在此基础上提出的加权比特翻转(Weighted BF, WBF)译码算法^[4],首次引入可靠度软信息到硬判决译码中。WBF算法将变量节点的最小幅值做为权重,性能相比BF算法有一定的提升。文献[5]提出了改进的WBF算法(Modified WBF, MWBF),在计算翻转函数的时候引入变量节点自身的可靠度信息。基于信息传播理论,文献[6]提出IMWBF(Improved Modified WBF)算法,在计算翻转函数的权重时去除变量节点自身的影响。文献[7]提出LP-WBF算法,引入与校验节点相连的所有变量节点中的最大值和最小值共同作为权重。对有限几何码字进行译码时,性能优异。文献[8,9]中的基于可靠度比率的译码算法(Reliability Ratio based WBF, RRWBF),在对低列重的码字译码时,性能较IMWBF优秀。文献[10]提出基于平均幅度的WBF(AMWBF)算法,以及文献[11]提出的基于幅度和的WBF(SMWBF)算法,性能相比其他算法有进一步提升。另外,文献[12-15]对上述几

收稿日期: 2015-06-15; 改回日期: 2015-11-27; 网络出版: 2016-01-14

*通信作者: 王跃东 dong_forever@hust.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(60902006), 中央高校基本科研业务费专项资金(201406)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (60902006), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (201406)

种算法做了不同方面的修正改进,取得了一定的性能提升。

本文在SMWBF算法的基础上提出一种基于变量节点更新的加权比特翻转译码算法。在每次迭代结束时,扩大翻转比特的可靠度信息。仿真结果表明,对低列重的LDPC码,本文算法较已有算法性能提升明显,同时算法复杂度增加很小。

2 基本定义

考虑码长为 N ,信息位长为 K 的二进制LDPC码,其校验矩阵 $\mathbf{H}$ 定义为 $M \times N$ 的稀疏矩阵,即 M 行 N 列。规则LDPC码具有恒定的行重 d_c 和列重 d_v 。非规则LDPC码的行重和列重不固定。用集合 $\mathbf{N}(m)$ 表示 $\mathbf{H}$ 矩阵的第 m 行中非零元素所在的列。即参与第 m 个校验方程的所有变量节点的集合。用集合 $\mathbf{M}(n)$ 表示 $\mathbf{H}$ 矩阵的第 n 列中非零元素所在的行。即第 n 个变量节点参与的所有校验方程的集合。

假设发送码字为 $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$,在加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道下,经BPSK调制后,接收序列为 $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ 。其中 $y_i = (2c_i - 1) + n_i$, n_i 表示均值为0,方差为 σ^2 的加性高斯白噪声。接收码字的硬判决二元向量序列为 $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$,其中,

$$z_i = \begin{cases} 1, & y_i > 0 \\ 0, & y_i \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

接收码字的伴随式为 $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_{M-1})$,其中 s_m 表示第 m 个校验方程的值。若伴随式为全零向量,则接收码字正确,反之有错。定义对数似然比为

$$L_i = \lg \frac{P(c_i = 1 | y_i)}{P(c_i = 0 | y_i)} = \frac{4y_i}{N_0} \quad (2)$$

由式(2)可知, L_i 与 y_i 成正比例关系。一些WBF算法通常将 $|y_i|$ 作为可靠度软信息,对算法性能分析并无影响^[4]。本文也采用此设定。

3 算法分析与描述

3.1 已有WBF算法

不同WBF算法的权重计算方法及其翻转函数如表1所示。由表1可以看出,WBF算法,MWBF算法和IMWBF算法均将参与校验的变量节点的最小幅值作为权重的计算方法。RRWBF算法和SMWBF算法均考虑了参与校验的所有变量节点的可靠度信息,在计算权重时引入了幅度和。而IMWBF算法和SMWBF均考虑了信息传播理论的影响,在计算权重的时候去除了变量节点自身的影响。对于翻转函数的计算,WBF算法和RRWBF算法相同。MWBF算法,IMWBF算法和SMWBF算法均引入了变量节点自身的可靠度信息,并引入加权因子对翻转函数进行修正。由表1的各种算法思想可以看出,考虑情况越全面,对翻转函数计算越精确,算法性能就会越好。

表1 各种WBF算法的权重和翻转函数计算方法

BF 算法	权重计算方法	翻转函数
WBF	$\omega_m = \min_{n \in \mathbf{N}(m)} \{ y_n \}$	$E_n = \sum_{m \in \mathbf{M}(n)} (2S_m - 1)\omega_m$
MWBF	$\omega_m = \min_{n \in \mathbf{N}(m)} \{ y_n \}$	$E_n = \sum_{m \in \mathbf{M}(n)} (2S_m - 1)\omega_m - \alpha y_n $
IMWBF	$\omega_{mn} = \min_{i \in \mathbf{N}(m) \setminus n} \{ y_i \}$	$E_n = \sum_{m \in \mathbf{M}(n)} (2S_m - 1)\omega_{mn} - \alpha y_n $
RRWBF	$\omega_{mn} = \sum_{i \in \mathbf{N}(m)} y_{mi} / y_{mn} $	$E_n = \sum_{m \in \mathbf{M}(n)} (2S_m - 1)\omega_{mn}$
SMWBF	$\omega_{mn} = \sum_{i \in \mathbf{N}(m) \setminus n} y_i $	$E_n = \sum_{m \in \mathbf{M}(n)} (2S_m - 1)\omega_{mn} - \alpha y_n $

3.2 本文算法

从表1可以看出,SMWBF算法的翻转函数由两部分组成, $\sum_{m \in \mathbf{M}(n)} (2S_m - 1) \cdot \omega_m$ 可以看作来自校验节点的可靠度信息, $\alpha \cdot |y_n|$ 可以看作来自变量节点的可靠度信息。在一次迭代过程中,翻转函数

值最大所对应的最不可靠比特被翻转。此比特对应的伴随式在下次迭代时得到更新,因此,来自校验节点的可靠度信息 $\sum_{m \in \mathbf{M}(n)} (2S_m - 1) \cdot \omega_m$ 得到了更新。然而,变量节点自身的可靠度信息并未改变。考虑基于消息传递的置信传播(Belief Propagation,

BP)算法^[3], 校验节点更新与变量节点更新交替进行, 最终成功译码。文献[16]指出, 各种 WBF 译码算法均是软判决译码算法的不同程度的近似。比特翻转译码算法在根据翻转函数确定最不可靠比特之后, 人为地对此比特进行翻转, 软判决算法则是根据其他比特的信息, 经过多次的迭代来逐渐修正此比特的可靠度信息。比特翻转译码算法虽然翻转了最不可靠比特, 但是此比特的可靠度信息并未被改变。由于最不可靠比特被翻转后变为具有高可靠度的比特, 本文为了体现这种可靠度的增加, 考虑将每次迭代所翻转比特的幅值扩大 β 倍。这样, 在下一迭代计算同一个变量节点的翻转函数时, 来自变量节点的可靠度信息 $\alpha \cdot |y_n|$ 也会更新。由于变量节点和校验节点均经过更新, E_n 的计算将更加精确。由于比特翻转译码也可能将正确比特翻转成错误比特, 在扩大此错误比特幅值之后会造成错误信息的传递。然而, 由仿真可以发现, 随着信噪比的增加, 变量节点被正确翻转的概率也会增加。只要正确翻转的概率远大于错误翻转的概率, 扩大幅值将促进正确信息的传递, 增加译码成功的概率。参数 β 用来表示幅值扩大的幅度。对于给定的 LDPC 码字, 不同信噪比下的最优加权因子 α 以及扩大倍数 β 可以通过仿真得到。为了简化分析, 本文将选择一个不变的最优 α 和 β 。基于以上分析, 得到基于变量节点更新的 SMWBF 算法(VSMWBF 算法)如下:

步骤 1 初始化: 初始化迭代次数 $k=1$, 并设定最大迭代次数 $k_{\max}$ 。对接收码字进行硬判决, 得到硬判决序列 z^k 。计算伴随式 s^k 为

$$s^k = z^k H^T \quad (3)$$

若伴随式 s^k 全为 0, 则停止迭代, 输出码字序列, 否则转到步骤 2。

步骤 2 对于 $m=0,1,\dots,M-1$, 计算每个校验方程的权重为

$$\omega_{mn} = \sum_{i \in N(m) \setminus n} |y_i| \quad (4)$$

步骤 3 对于 $n=0,1,\dots,N-1$, 计算各个信息节点的翻转函数 E_n 为

$$E_n = \sum_{m \in M(n)} (2S_m - 1) \cdot \omega_{mn} - \alpha \cdot |y_n| \quad (5)$$

步骤 4 翻转最大 E_n 所对应的比特, 同时将此比特幅值扩大 β 倍。

$$n^* = \arg \max_n E_n, z_n^{k+1} = \text{mod}(z_n^k + 1, 2) \quad (6)$$

$$|y_{n^*}|' = |y_{n^*}| + \beta \cdot |y_{n^*}| \quad (7)$$

步骤 5 将更新过的硬判决序列代入式(3)计算

伴随式 s^{k+1} , 若伴随式 s^{k+1} 为零或达到最大迭代次数, 则终止迭代, 否则 $k = k+1$, 算法转至步骤 2。

观察上述算法可以发现, 在一次迭代之后, 由于翻转比特的幅值信息被更新, 需要重新计算所有包含翻转比特的校验方程的权重。由于校验方程包含了每一个参与校验的信息比特的可靠度信息, 并且翻转比特自身可靠性很低, 其幅值在校验方程权重中所占的比重很小。因此, 翻转比特幅值的增大对校验方程权重的影响很小。若在计算权重的时候忽略翻转比特幅值的变化, 可以得到一种简化的算法, 仅需将步骤 5 改为步骤 6:

步骤 6 将更新过的硬判决序列代入式(3)计算伴随式 s^{k+1} , 若伴随式 s^{k+1} 为零或达到最大迭代次数, 则终止迭代, 否则 $k = k+1$, 算法转至步骤 3。

比特翻转算法在多次迭代之后, 算法可能陷入无限循环。即第 k 次迭代被翻转比特与第 $k+t$ 次迭代被翻转比特相同。出现无限循环的原因在于权重 ω_m 和变量节点自身幅值 $|y_n|$ 始终不变, 变量节点对应的翻转函数值的大小只与满足校验方程的个数相关。若变量节点被再次翻转, 则算法必将进入无限循环, 即使迭代次数达到最大, 译码性能也不会提升。文献[7,11]给出了一种环路检测和规避算法, 通过在出现循环时选择次大值代替最大值来打破这种无限循环。然而, 此算法实现复杂度比较高并且需要额外的存储空间。本文算法有效地降低了翻转比特被重新翻转的可能性。由于每次迭代后翻转比特的幅值被扩大, 翻转比特对应的翻转函数的值将随之变小, 因此此比特被重新选中并翻转的可能性降低。即使仍进入循环, 由于翻转比特的幅值越来越大, 因此对应的翻转函数的值会越来越小, 在某次循环之后, 翻转函数次大值对应的比特将会被选中并翻转, 循环被跳出。因此, 在本文算法下, 只存在有限次的循环, 不存在无限循环。后文会通过仿真验证此分析。

4 算法复杂度分析

相比 SMWBF 算法, VSMWBF 算法在一次迭代之后, 需要增加一次变量节点的更新。并且包含翻转比特的校验方程的权重也需要更新。由于权重的重新计算只需加入变量节点的增量, 因此只需要 d_v 次加法即可。对于翻转函数, 共需要 $d_v(d_c - 1)$ 次加法运算。简化的 VSMWBF 算法不需要重新计算权重, 因此, 相比 SMWBF 算法, 每次迭代仅增加一次加法, 算法复杂度几乎不变。

5 仿真结果分析

本文采用码率为 $1/2$, 列重为 3 的 (504, 252) PEG-LDPC 码(Code1), 以及码率为 $1/2$, 列重为 3, 行重为 6 的 (1008, 504) Gallager LDPC 规则码(Code2)^[17], 迭代次数分别为 50 和 100。两个码字每个信噪比下均至少采集 2000 个错误比特。

5.1 寻找最优加权因子 α 和最佳扩大倍数 β

图 1 和图 2 分别为不同信噪比(SNR)下 Code1 和 Code2 受 (α, β) 影响时的误比特率性能。文献[11]和文献[18]指出, MWBF 算法, IMWBF 算法和 SMWBF 算法引入加权因子 α 是为了削弱校验节点传递给信息节点的可靠度信息中的过估计现象。本文提出的扩大倍数 β , 是表示信息节点被正确翻转后可靠度的增加幅度。由于加权因子 α 以及扩大倍数 β 均属于翻转函数的一部分并且对译码性能的影响至关重要, 本文对这两个因子进行联合仿真。需要特别指出的是, 不同的比特翻转译码算法是软判决算法的不同程度的近似^[16], 对于 IMWBF 算法, α 已经可以通过理论得到^[6], 因此我们有理由相信 VSMWBF 算法的 α 和 β 也可以通过理论得到, 这点仍然需要深入研究。由图 1 和图 2 可知, (α, β) 对译码性能的影响随着 SNR 的增加而增大。Code1 的最优的 α 和 β 分别为 13 和 0.6。Code2 的最优 α 和 β 分别为 13 和 0.4。

5.2 算法性能分析

图 3 为两种码字在不同译码算法下的误比特率性能比较。两种码字的加权因子 α 以及扩大倍数 β 分别设定为 5.1 节仿真得到的最优 α 与 β 。由图 3 可知在低信噪比时, VSMWBF 算法与 SMWBF 算法性能基本相同。随着信噪比增加, VSMWBF 算法性能优于 SMWBF 算法, 且增益逐渐增大。原因在于随着信噪比的增大, 变量节点被正确翻转的概率

率变大, 并且译码过程陷入循环的概率变小, 因此增大翻转比特的可靠度, 会增加译码算法的准确性。由图 3 可以看出, 在误比特率为 10^{-5} 时, 对于 Code1 和 Code2, VSMWBF 算法比 SMWBF 算法分别获得 0.6 dB 和 0.8 dB 的增益。对比 VSMWBF 算法与简化 VSMWBF 算法可知, 两者性能基本一样。

图 4 为 Code1 在不同译码算法下的平均迭代次数比较。由图 4 可以看出, RRWBF 算法, SMWBF 算法, 以及本文提出的 VSMWBF 算法, 平均迭代次数大致相同, 且均少于 MWBF 算法和 IMWBF 算法。并且, VSMWBF 算法所需平均迭代次数最少。

图 5 为 Code1 在 SMWBF 算法与 VSMWBF 算法下的误帧率与算法陷入循环的概率曲线图。其中 SMWBF 算法陷入循环后不能跳出循环, 为死循环。VSMWBF 算法的 loop1 表示陷入循环到跳出循环需要至少循环一次, loop3 表示至少循环 3 次, loop5 表示至少循环 5 次。由图 5 可知, 随着信噪比的增加, 两种算法陷入循环的概率均变小。SMWBF 算法的误帧率曲线与算法陷入循环的概率曲线几乎重合, 说明 SMWBF 算法陷入死循环后, 算法会一直翻转特定的比特, 其他比特没有机会被更正, 因此算法几乎不可能成功译码, 继续迭代对算法性能没有提升。VSMWBF 算法陷入循环的概率大于误帧率, 并且出现高次循环的概率小于出现低次循环的概率, 说明 VSMWBF 算法虽然仍有可能出现循环, 但是出现低次循环的概率大, 出现高次循环的概率小, 算法在陷入循环后比较容易跳出循环, 因此更多比特可以被译码, 译码成功率增加。而且随着信噪比的增加, VSMWBF 算法的误帧率与陷入循环的概率之间的差值变大, 说明信噪比越高, 算法越容易译码成功。

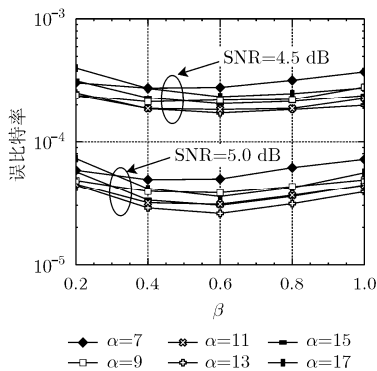


图 1 不同信噪比下 Code1 受 (α, β) 影响时的误比特率性能

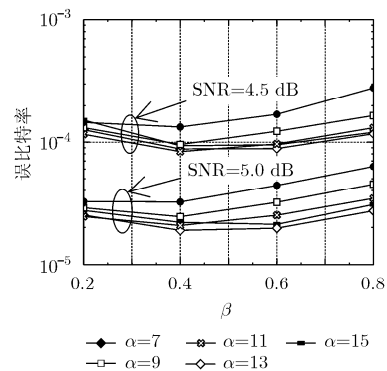


图 2 不同信噪比下 Code2 受 (α, β) 影响时的误比特率性能

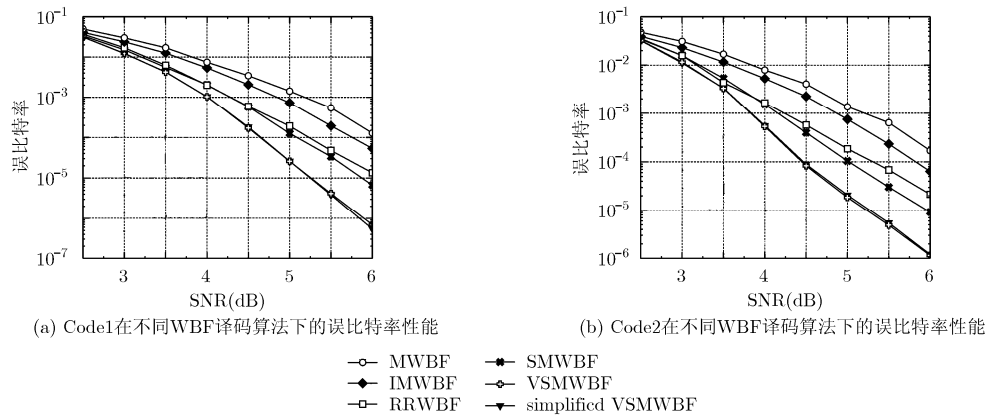


图3 Code1 和 Code2 在不同译码算法下的误比特率性能

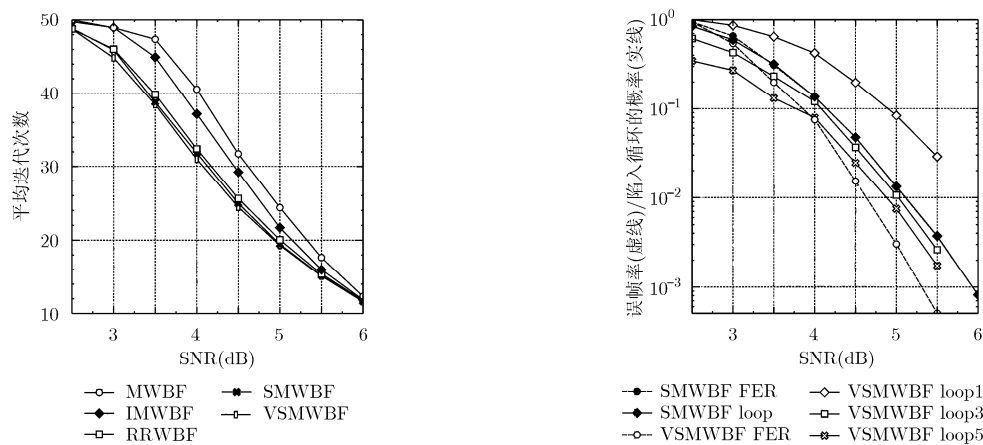


图4 Code1 在不同译码算法下的平均迭代次数比较

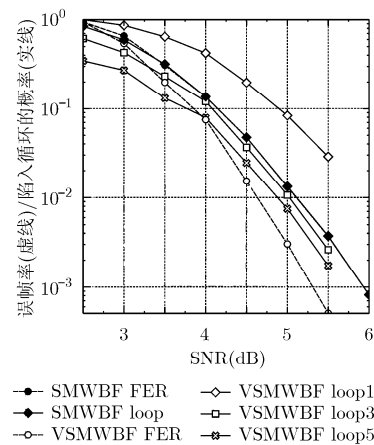


图5 Code1 在 SMWBF 算法与 VSMWBF 算法下的误码率与算法陷入循环的概率比较

6 结束语

本文在基于幅度和 LDPC 加权比特翻转译码算法(SMWBF)中加入了变量节点的更新规则,通过扩大幅值来表征变量节点可靠性的增加,提出了一种基于变量节点更新的 SMWBF 算法及其简化算法。在众多 WBF 算法中,本文算法加入变量节点的更新,对翻转函数的计算更加精确,同时有效减弱了环路振荡的问题。仿真结果表明,本文算法在算法复杂度增加很小的情况下比 SMWBF 算法分别获得了 0.6 dB 和 0.8 dB 的增益。

参考文献

- [1] GALLAGER R. G. Low density parity check codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1962, 8(1): 21-28.
- [2] MACKAY D J C and NEAL R M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes[J]. *Electronics Letters*, 1996, 32(18): 1645-1646.
- [3] FOSSORIER M, MIHALJEVIC M, and IMAI H. Reduced complexity iterative decoding of low density parity check codes based on belief propagation[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1999, 47(5): 673-680.
- [4] KOU Y, LIN S, and FOSSORIER M. Low-density parity-check codes based on finite geometries: a rediscovery and new results[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, 19(4): 271-285.
- [5] ZHANG J and FOSSORIER M. A modified weighted bit-flipping decoding of low-density parity-check codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2004, 8(3): 165-167.
- [6] JIANG M, ZHAO C, SHI Z, et al. An improvement on the modified weighted bit flipping decoding algorithm for LDPC codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2005, 9(9): 814-816.
- [7] LIU Z and PADOS D A. A decoding algorithm for finite-geometry LDPC codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2005, 53(3): 415-421.
- [8] FENG G and Hanzo L. Reliability ratio based weighted bit-flipping decoding for low-density parity-check codes[J]. *Electronics Letters*, 2004, 40(21): 1356-1358.
- [9] Lee C H and Wolf W. Implementation-efficient reliability ratio based weighted bit-flipping decoding for LDPC codes[J].

- Electronics Letters*, 2005, 41(13): 755-757.
- [10] 张高远, 周亮, 苏伟伟, 等. 基于平均幅度的LDPC码加权比特翻转译码算法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(11): 2572-2578.
- ZHANG Gaoyuan, ZHOU Liang, SU Weiwei, *et al.* Average magnitude based weighted bit-flipping decoding algorithm for LDPC codes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(11): 2572-2578.
- [11] 张高远, 周亮, 文红. 基于幅度和LDPC码加权比特翻转译码算法[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(4): 752-757.
- ZHANG Gaoyuan, ZHOU Liang, and WEN Hong. Sum of the magnitude based weighted bit-flipping decoding algorithm for LDPC codes[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(4): 752-757.
- [12] 刘原华, 张美玲. LDPC码的改进迭代比特翻转译码算法[J]. 电讯技术, 2012, 52(4): 488-491.
- LIU Yuanhua and ZHANG Meiling. An improved iterative bit-flipping decoding algorithm for low-density parity-check codes[J]. *Telecommunications Engineering*, 2012, 52(4): 488-491.
- [13] 谢东觉, 张兴敢, 唐岚. 一种改进的LDPC码多比特翻转译码算法[J]. 现代电子技术, 2011, 34(3): 13-16.
- XIE Dongjue, ZHANG Xinggan, and TANG Lan. An improved multi-bit flipping algorithm for LDPC decoding [J]. *Modern Electronics Technique*, 2011, 34(3): 25-28.
- [14] 阮嘉程, 魏东兴, 王伟. LDPC码的联合概率加权比特翻转译码算法[J]. 系统仿真学报, 2014, 26(2): 306-309.
- RUAN Jiacheng, WEI Dongxing, and WANG Wei. Joint probability of weighted bit-flipping decoding algorithm for LDPC codes[J]. *Journal of System Simulation*, 2014, 26(2): 306-309.
- [15] 张高远, 文红, 李腾飞, 等. 简单高效的低密度奇偶校验码比特翻转译码算法[J]. 计算机应用, 2014, 34(10): 2796-2799.
- ZHANG Gaoyuan, WEN Hong, LI Tengfei, *et al.* Simple efficient bit-flipping algorithm for low density parity check code[J]. *Journal of Computer Applications*, 2014, 34(10): 2796-2799.
- [16] 张高远, 周亮, 文红. LDPC码加权比特翻转译码算法研究[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(9): 2093-2097.
- ZHANG Gaoyuan, ZHOU Liang, and WEN Hong. Research on weighted bit-flipping decoding algorithm for LDPC codes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(9): 2093-2097.
- [17] MACKAY D. J. C. Encyclopedia of sparse graph codes[OL]. <http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/codes/data.html>, 2007.
- [18] WU X F, LING C, JING M, *et al.* New insights into weighted bit-flipping decoding[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(8): 2177-2181.
- 陶雄飞: 男, 1975年生, 讲师, 研究方向为信道编译码、通信系统、嵌入式系统。
- 王跃东: 男, 1990年生, 硕士生, 研究方向为信道编译码。
- 柳盼: 女, 1990年生, 硕士生, 研究方向为信道编译码。