

基于空域平滑稀疏重构的 DOA 估计算法

蔡晶晶^{*①} 宗汝^① 蔡辉^②

^①(西安电子科技大学工程学院 西安 710071)

^②(中国人民解放军 95037 部队 武汉 430074)

摘要: 该文提出一种基于空域平滑稀疏重构的 DOA 估计算法, 利用空域平滑理论对方差矩阵进行处理, 然后通过 KR 积变换改变其结构, 并对变换后的矩阵进行稀疏重构获得角度估计。此外, 该文还给出了两种不同的目标函数误差求解方法。从仿真实验可以看出, 该算法与传统的基于压缩感知理论的 DOA 估计算法对比, 明显降低了运算量, 且对于相干和非相干信号的处理性能均有所提高, 在低角度间隔、低信噪比和低采样数条件下优势更为突出。

关键词: 压缩感知; 空域平滑; 稀疏重构; DOA 估计

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)01-0168-06

DOI: 10.11999/JEIT150538

DOA Estimation Via Sparse Representation of the Smoothed Array Covariance Matrix

CAI Jingjing^① ZONG Ru^① CAI Hui^②

^①(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

^②(95037 People's Liberation Army Troops China, Wuhan 430074, China)

Abstract: A novel Direction-Of-Arrival (DOA) estimation algorithm based on spatial smoothing and sparse reconstruction is proposed in this paper. Firstly, the covariance matrix is processed using spatial smoothing theory, and it is converted with the Khatri-Rao transformation, then DOA estimation is achieved by sparse reconstruction of the converted matrix. Furthermore, two different kinds of methods are given to deal with the error of the objective function. Experimental results show that the proposed algorithm can reduce the amount of computation, and exhibit better performance on both coherent and non-coherent signals compared with the other DOA algorithms based on compressed sensing, especially under the conditions of low angle interval, low signal-to-noise ratio and low sampling number.

Key words: Compressed sensing; Spatial smoothing; Sparse reconstruction; DOA estimation

1 引言

随着信息技术的飞速发展, 超宽带信号、实时处理能力、高复杂度的电磁环境都对硬件提出了更高的要求, 而传统的 DOA 估计算法已经不足以满足时代的需要。由此, 压缩感知理论应运而生, 理论指出: 当信号为稀疏或可压缩时, 即使采样频率远低于 Nyquist 定理的要求, 也可以对所采集到的数据进行求解, 并且能够高精度地恢复出原始的信号^[1]。这种理论的运用不但可以降低采样数、传输

量、存储量以及处理的成本, 而且可以提高参数估计的准确性, 从而克服经典算法的不足, 显示出该理论巨大的研究价值和广阔的应用前景。因而, 将稀疏理论引入到 DOA 估计中也是大势所趋^[2-6]。文献[7]通过建立稀疏重构模型, 利用二阶锥规划求解的方法, 创造性地构造了阵列流形冗余字典, 结合 l_1 范数凸优化问题^[8]和 SVD 分解, 提出了 L1_SVD 算法^[9], 成功地解决了基于压缩感知理论基础上的 DOA 估计问题, 但是该算法存在运算量太大, 实时处理较难, 且需要已知信源个数为前提的诸多不足。在此基础上, 文献[10]发明了混合 l_2 范数逼近的 DOA 估计方法, 主要是通过对方定方程的最小范数解进行不断的加权迭代逼近 l_0 范数解, 该方法在快拍数小, 信噪比高时的效果较好, 而随着快拍数增加运算量增加, 且在信噪比低的时候效果很差。近

收稿日期: 2015-05-07; 改回日期: 2015-07-08; 网络出版: 2015-08-28

*通信作者: 蔡晶晶 jjcai@mail.xidian.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61405150, 61271300), 中央高校基本科研业务费专项资金(JB140229)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61405150, 61271300), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (JB140229)

几年，有研究人员发现接收信号的协方差矩阵的误差满足渐近正态分布，从而提出了 L1-SRACV 算法^[1]，但是其计算量相当巨大。

针对以上经典算法中存在的问题，本文提出一种建立在 KR (Khatri-Rao)积变换理论^[2]基础上，将空域平滑理论和压缩感知理论相结合的 DOA 估计算法。该方法利用空域平滑理论，针对相干信号进行空域平滑处理，使协方差矩阵恢复满秩，以达到可以处理相干信号的目的。在此基础上，利用 KR 积变换理论对协方差矩阵进行形式变换，并利用目标在空域的稀疏性，构建冗余字典和稀疏重构目标函数。同时，利用两种不同的方法求解了估计误差，完善了稀疏重构目标函数的表达式。该算法从根本上解决了处理相干信号的问题，而且可以大大减少运算量，增强信号实时处理的能力。最后通过仿真实验证明了该算法与其它基于压缩感知理论的 DOA 估计算法相比，各项处理性能均有较大的提高。

2 阵列信号模型

假设均匀线阵由 M 个各向同性的阵元组成，阵元间隔均为 d ，且该间隔满足 $d = \lambda/2$ ， λ 为接收信号波长。有 K 个远场信号 $\mathbf{s}_1(t), \mathbf{s}_2(t), \dots, \mathbf{s}_K(t)$ ，分别以方位角 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ 入射到阵列，且满足 $-90^\circ < \theta_k \leq 90^\circ, 1 \leq k \leq K$ 。阵列的接收信号可写为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

其中， $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t) \ \mathbf{x}_2(t) \ \dots \ \mathbf{x}_M(t)]^T$ 为阵列输出数据矢量， $\mathbf{N}(t) = [\mathbf{n}_1(t) \ \mathbf{n}_2(t) \ \dots \ \mathbf{n}_M(t)]^T$ 为阵列加性平稳噪声矢量，信号矢量为 $\mathbf{S}(t) = [\mathbf{s}_1(t) \ \mathbf{s}_2(t) \ \dots \ \mathbf{s}_K(t)]^T$ ， $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_K)]$ 为 $M \times K$ 维的阵列流形矩阵，其中 $\mathbf{a}(\theta_k) = [1 \ e^{-j2\pi d \sin \theta_k / \lambda} \ \dots \ e^{-j2\pi(M-1)d \sin \theta_k / \lambda}]^T$ 为入射角 θ_k 的阵列流形矢量。

根据空域平滑算法原理^[13]，将阵列中的 M 个阵元分割成 P 个彼此相互交错的子阵，每个子阵阵元数均为 m ，且满足关系式 $M = P + m - 1$ 。那么，第 p 个子阵的前向空域平滑输出信号 $\mathbf{X}_p^f(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p^f(t) &= [\mathbf{x}_p(t) \ \mathbf{x}_{p+1}(t) \ \dots \ \mathbf{x}_{p+m-1}(t)]^T \\ &= \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta})\mathbf{D}^{p-1}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_m(t) \end{aligned} \quad (2)$$

其中， $\mathbf{D} = \text{diag}(e^{-j2\pi d \sin \theta_1 / \lambda} \ e^{-j2\pi d \sin \theta_2 / \lambda} \ \dots \ e^{-j2\pi d \sin \theta_K / \lambda})$ 为 $K \times K$ 维的旋转矩阵， $\mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}_m(\theta_1) \ \mathbf{a}_m(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}_m(\theta_K)]$ 是 $m \times K$ 维的子阵阵列流形矢量，其中 $\mathbf{a}_m(\theta_k) = [1 \ e^{-j2\pi d \sin \theta_k / \lambda} \ \dots \ e^{-j2\pi(m-1)d \sin \theta_k / \lambda}]^T$ ， $\mathbf{N}_m(t)$ 表示噪声矢量。获得的单个子阵的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_p^f &= E \left\{ \mathbf{X}_p^f(t) \cdot (\mathbf{X}_p^f(t))^H \right\} \\ &= \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta})\mathbf{D}^{p-1}\mathbf{R}_s(\mathbf{D}^{p-1})^H \mathbf{A}_m^H(\boldsymbol{\theta}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_m \end{aligned} \quad (3)$$

其中， \mathbf{R}_s 表示信号自相关矩阵， σ_n^2 表示噪声能量， \mathbf{I}_m 表示 $m \times m$ 维的单位矩阵。

将 P 个子阵的协方差矩阵进行加权平均，得到修正后的前向平滑协方差矩阵：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^f &= 1/P \cdot \sum_{p=1}^P \mathbf{R}_p^f \\ &= \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}) \left[1/P \cdot \sum_{p=1}^P \mathbf{D}^{p-1} \mathbf{R}_s (\mathbf{D}^{p-1})^H \right] \\ &\quad \cdot \mathbf{A}_m^H(\boldsymbol{\theta}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_m = \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_s^f \mathbf{A}_m^H(\boldsymbol{\theta}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_m \end{aligned} \quad (4)$$

由此不难看出， \mathbf{R}^f 的秩与 \mathbf{R}_s^f 的秩相同，当 $m > K$ 且 $P \geq K$ 时，有 $\text{rank}(\mathbf{R}^f) = \text{rank}(\mathbf{R}_s^f) = K$ 。

同理，后向平滑协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^b &= 1/P \cdot \sum_{q=1}^P \mathbf{R}_{p-q+1}^b \\ &= \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}) \left[1/P \cdot \sum_{q=1}^P \mathbf{D}^{-(m+q-2)} \mathbf{R}_s \mathbf{D}^{m+q-2} \right] \\ &\quad \cdot \mathbf{A}_m^H(\boldsymbol{\theta}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_m = \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_s^b \mathbf{A}_m^H(\boldsymbol{\theta}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_m \end{aligned} \quad (5)$$

3 基于空域平滑稀疏重构的DOA估计算法

根据 KR 积变换理论，对式(4)和式(5)进行向量化运算，将其变换形式得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}1 &= \text{vec}(\mathbf{R}^f) = [\mathbf{A}_m^*(\boldsymbol{\theta}) \circ \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta})] \boldsymbol{\sigma}_s + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_m) \\ &= \mathbf{G}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\sigma}_s + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_m) \\ \mathbf{y}2 &= \text{vec}(\mathbf{R}^b) = [\mathbf{A}_m^*(\boldsymbol{\theta}) \circ \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta})] \boldsymbol{\sigma}'_s + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_m) \\ &= \mathbf{G}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\sigma}'_s + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_m) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中， $\text{vec}(\cdot)$ 表示对矩阵向量化， $(\cdot)^*$ 表示共轭运算， $\mathbf{A}_m^*(\boldsymbol{\theta}) \circ \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta})$ 是一个 $m^2 \times K$ 维的矩阵， \circ 表示 Khatri-Rao 积运算， $\boldsymbol{\sigma}_s = [\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \dots \ \sigma_K^2]^T$ 和 $\boldsymbol{\sigma}'_s = [\sigma_K^2 \ \sigma_{K-1}^2 \ \dots \ \sigma_1^2]^T$ 均表示信源的能量向量。可以看出， $\mathbf{G}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ 与流形矩阵 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ 所起的作用是相类似的，且有

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{A}_m^*(\boldsymbol{\theta}) \circ \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}^*(\theta_1) \otimes \mathbf{a}(\theta_1) \\ &\quad \mathbf{a}^*(\theta_2) \otimes \mathbf{a}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}^*(\theta_K) \otimes \mathbf{a}(\theta_K)] \end{aligned} \quad (7)$$

其中， \otimes 表示 Kronecker 积运算， \mathbf{G} 为 $m^2 \times (2m-1)$ 维矩阵，其表示形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [\text{vec}(\mathbf{U}_{m-1}) \ \dots \ \text{vec}(\mathbf{U}_1) \ \text{vec}(\mathbf{U}_0) \\ &\quad \text{vec}(\mathbf{U}_1^T) \ \dots \ \text{vec}(\mathbf{U}_{m-1}^T)] \end{aligned} \quad (8)$$

且 $\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-i,i} & \mathbf{I}_{m-i} \\ \mathbf{0}_{i,i} & \mathbf{0}_{i,m-i} \end{bmatrix}$ ， $i = 0, 1, \dots, m-1$ ，并且

有 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{b}(\theta_1) \ \mathbf{b}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{b}(\theta_K)]$ ，其中 $\mathbf{b}(\theta_k)$ 为 $(2m-1) \times 1$ 维的导向矢量，其表示式为

$$\mathbf{b}(\theta_k) = \begin{bmatrix} e^{(m-1)j2\pi d \sin(\theta_k)/\lambda} & \dots & e^{j2\pi d \sin(\theta_k)/\lambda} & 1 \\ e^{-j2\pi d \sin(\theta_k)/\lambda} & \dots & e^{-(m-1)j2\pi d \sin(\theta_k)/\lambda} & \end{bmatrix}^T, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

根据稀疏重构的理论, 构造一个冗余字典 $\mathbf{GB}(\tilde{\theta}) \in R^{m^2 \times N}$, 其中 $\tilde{\theta} = \{\theta_n\}_{n=1}^N$ ($N \gg K$) 表示空域内所有可能的来波方向。以式(6)中的 \mathbf{y}_1 和 \mathbf{y}_2 为观测向量, 对其进行稀疏表示得

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \mathbf{GB}(\tilde{\theta})\mathbf{u}_1 + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_m) \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{GB}(\tilde{\theta})\mathbf{u}_2 + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_m) \end{cases} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 为 $N \times 1$ 维的稀疏表示向量, 其非零值(较大值)为信号的能量值, 且其角度值对应着 $\mathbf{B}(\tilde{\theta})$ 中的来波方向。从表达式的数学模型可以看出, 观测向量 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ 与稀疏向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 之间存在一一对应的关系, 即式(10)中的两式表示的是同一个空域稀疏信号在同一稀疏字典和不同观测向量下的稀疏表示。利用前向和后向空域平滑协方差矩阵, 可构造出前后向空域平滑稀疏重构观测向量:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2} = \text{vec}\left(\frac{\mathbf{R}^f + \mathbf{R}^b}{2}\right) \\ &= \mathbf{GB}(\tilde{\theta})\mathbf{u} + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_m) \end{aligned} \quad (11)$$

其中, 稀疏向量 $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)/2$ 。基于该观测向量的 DOA 估计算法可用式(12)所示的凸优化方程式描述为

$$\begin{cases} \min_{\hat{\mathbf{u}}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{GB}(\tilde{\theta})\hat{\mathbf{u}} - \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_m)\|_2 \leq \beta \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别表示 l_1 和 l_2 范数, $\hat{\mathbf{y}}$ 表示向量 \mathbf{y} 的估计值, $\hat{\mathbf{u}}$ 表示稀疏向量 \mathbf{u} 的估计值, β 表示误差门限, 该值的选取对算法的性能有重要影响。

4 误差门限的求解

误差门限 β 的选取可以利用信号特性进行计算, 本节用了两种不同方法来求解该误差门限。其中, 第 1 种方法利用了协方差估计误差服从渐近正态分布的性质, 第 2 种方法则利用了协方差矩阵误差方差的估计结果式。

4.1 利用渐近正态分布性质

文献[14]提出, 当入射信号为圆对称高斯信号时, 接收信号的协方差矩阵的误差服从渐近正态分布。因此, 对于前向和后向空域平滑的每个子阵的协方差估计误差 $\text{vec}(\Delta \mathbf{R}_p^f) = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_p^f) - \text{vec}(\mathbf{R}_p^f)$ 和 $\text{vec}(\Delta \mathbf{R}_q^b) = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_q^b) - \text{vec}(\mathbf{R}_q^b)$ 应服从渐近正态分布, 即

$$\begin{cases} \text{vec}(\Delta \mathbf{R}_p^f) \sim \text{ASN}(\mathbf{0}_{m^2,1}, \mathbf{W}_p) \\ \text{vec}(\Delta \mathbf{R}_q^b) \sim \text{ASN}(\mathbf{0}_{m^2,1}, \mathbf{W}_q) \end{cases}, p, q = 1, 2, \dots, P \quad (13)$$

其中, $\hat{\mathbf{R}}_p^f$ 表示前向平滑协方差矩阵估计值, $\hat{\mathbf{R}}_q^b$ 表示后向平滑协方差矩阵估计值, $\mathbf{W}_p = (1/L)\mathbf{R}_p^{fT} \otimes \mathbf{R}_p^f$, $\mathbf{W}_q = (1/L)\mathbf{R}_q^{bT} \otimes \mathbf{R}_q^b$, L 表示快拍数。由于各子阵的协方差矩阵误差相互独立, 因此这些子阵做空域平滑后的协方差矩阵的估计误差也服从渐近正态分布。

定义目标函数 \mathbf{R}^{fb} 为

$$\mathbf{R}^{fb} = \frac{1}{2P} \left(\sum_{p=1}^P \mathbf{R}_p^f + \sum_{q=1}^P \mathbf{R}_q^b \right) \quad (14)$$

令 $\hat{\mathbf{R}}^{fb}$ 表示 \mathbf{R}^{fb} 的估计值, 定义估计误差为 $\text{vec}(\Delta \mathbf{R}^{fb}) = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}^{fb}) - \text{vec}(\mathbf{R}^{fb})$, 该值应当服从渐近正态分布, 则有

$$\text{vec}(\Delta \mathbf{R}^{fb}) \sim \text{ASN}(\mathbf{0}_{m^2,1}, \mathbf{W}) \quad (15)$$

其中, $\mathbf{W} = (1/L)\mathbf{R}^{fbT} \otimes \mathbf{R}^{fb}$ 。进而可得

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{-1/2} \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}^{fb} - \mathbf{GB}(\tilde{\theta})\hat{\mathbf{u}} - \sigma_n^2 \mathbf{I}_m) \\ \sim \text{ASN}(\mathbf{0}_{m^2,1}, \mathbf{I}_{m^2}) \end{aligned} \quad (16)$$

最终, 可将 DOA 估计的凸优化求解式表述为

$$\begin{cases} \min_{\hat{\mathbf{u}}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad \left\| \mathbf{W}^{-1/2} \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}^{fb} - \mathbf{GB}(\tilde{\theta})\hat{\mathbf{u}} - \sigma_n^2 \mathbf{I}_m) \right\|_2 \leq \beta_1 \end{cases} \quad (17)$$

其中, $\beta_1 = \sqrt{As\chi^2(m^2)}$, 是一个决定噪声容差的参数(在 matlab 软件中可利用函数 $\text{chi2inv}(1 - \rho, m^2)$ 计算)。 β_1 与置信系数 ρ 相关联, 为了获得高的概率 $1 - \rho$, ρ 的值一般取的很小, 例如, 可将其设置为 0.001。求解式(17)可以利用凸优化工具包 CVX^[15] 进行求解, 然后将求得的 $\hat{\mathbf{u}}$ 绘制成幅度谱图, 峰值所对应的值即为角度 θ_k 的估计值。

4.2 利用误差方差的估计结果式

定义协方差矩阵为 $\mathbf{R} = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\}$, 协方差矩阵的估计值为 $\hat{\mathbf{R}} = (1/L)\sum_{t=1}^L \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)$ 。文献[16]对协方差矩阵误差元素 $\Delta \mathbf{R}(i, j) = \hat{\mathbf{R}}(i, j) - \mathbf{R}(i, j)$ 求方差的估计结果为

$$\begin{aligned} \text{var}[\Delta \mathbf{R}(i, j)] &= \frac{1}{L} \left[\left| \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{R}(m, m) \right|^2 - \frac{\|\mathbf{R}\|_2^2}{\|\mathbf{R}\|_0} \right], \\ & i, j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\text{var}(\cdot)$ 表示求方差。对于前后向空间平滑算法而言, 其协方差矩阵误差 $\Delta \mathbf{R}^{fb}$ 中除对角线以外的元素可定义为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}^{fb}(i, j) &= \frac{1}{2P} \sum_{p=1}^P [\Delta \mathbf{R}_p^f(i, j) + \Delta \mathbf{R}_q^b(i, j)], \\ & i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $\Delta \mathbf{R}_p^f(i, j)$ 和 $\Delta \mathbf{R}_q^b(i, j)$ 分别为前向、后向空域平滑子阵的协方差矩阵元素的误差。由式(18)的结

论可知，对式(19)求方差可得

$$\begin{aligned}
 & \text{var}[\Delta \mathbf{R}^{fb}(i, j)] \\
 &= E \left\{ \left[\frac{1}{2P} \sum_{p=1}^P (\Delta \mathbf{R}_p^f(i, j) + \Delta \mathbf{R}_p^b(i, j)) \right] \right. \\
 & \quad \left. \times \left[\frac{1}{2P} \sum_{p=1}^P (\Delta \mathbf{R}_p^f(i, j) + \Delta \mathbf{R}_p^b(i, j)) \right]^* \right\} \\
 &= \frac{1}{2P^2} \text{var} \left[\sum_{p=1}^P \Delta \mathbf{R}_p^f(i, j) \right] \\
 &= \frac{1}{2P^2} \text{var} \left[\sum_{p=1}^P \Delta \mathbf{R}(i+p-1, j+p-1) \right] \\
 &\approx \frac{1}{2P} \text{var}[\Delta \mathbf{R}(i, j)] \quad (20)
 \end{aligned}$$

假设协方差矩阵对角元素的误差均为 σ_n^2 ，则其方差为 σ_n^4 。将所有非对角线元素的方差和对角元素的方差全部相加，得到前后向空域平滑协方差矩阵元素的误差方差的公式为

$$\beta_2 = (m^2 - m) \text{var}[\Delta \mathbf{R}^{fb}(i, j)] + m\sigma_n^4 \quad (21)$$

根据式(21)，可将 DOA 估计的凸优化求解式表述为

$$\left. \begin{aligned}
 & \min_{\hat{\mathbf{u}}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_1 \\
 & \text{s. t. } \left\| \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}^{fb} - \mathbf{G}\mathbf{B}(\hat{\theta})\hat{\mathbf{u}}) \right\|_2^2 \leq \beta_2
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

5 算法性能分析

从上述推导过程不难看出，本文算法利用了空域平滑和 KR 积变换理论，该算法的复杂度只有 $O(N^3)$ 量级，与经典的 L1_SRACV 算法的复杂度 $O(M^3N^3)$ 和 L1_SVD 算法的复杂度 $O(K^3N^3)$ 相比，所提算法运算量得到很大提升，有利于信号的实时处理。

所提算法通过空域平滑理论将接收信号的协方差矩阵恢复到满秩，进而使算法获得了相干信号处理能力。需要注意的是，当入射信号为相干信号时，虽然空域平滑后协方差矩阵恢复满秩，但是使用式(17)求解方差过程中，忽略了相干性引起的各子阵之间的估计误差的协方差，可能会造成某些方差估计值的偏差；使用式(22)求解误差方差的过程中，将误差值做了近似估计，而对于整个空域平滑后的协方差矩阵的误差方差的估计则是将所有误差值相加，此为可能会造成误差的因素。

6 仿真实验

本节通过仿真实验，从几个不同方面分析了本文算法与传统算法 L1_SRACV 和 L1_SVD 间的性能对比情况。

仿真实验 1 假设两个非相干远场窄带信号入射到一个均匀线阵上，阵元间隔 d 为入射信号波长的一半，信噪比为 10 dB，快拍数设为 300，将搜索空域 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 按等角度间隔 1° 进行划分，阵元数从 6 变化到 12，对算法运算时间进行统计，结果如图 1 所示。

从图 1 可以看出，随着阵元的增多，L1_SRACV 算法的运算复杂度增长较快，受阵元数量影响较大，而 L1_SVD 算法和本文算法受阵元数量影响较小，且本文算法的运算复杂度总是低于 L1-SVD 算法。

仿真实验 2 假设两个非相干远场窄带信号入射到阵元数为 10 的均匀线阵上，阵元间隔 d 为入射信号波长的一半，信噪比为 10 dB，快拍数设为 300，入射角度间隔从 $1^\circ \sim 10^\circ$ 变化。将搜索空域 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 按等角度间隔 1° 进行划分，蒙特卡罗实验次数为 200，定义角度估计在误差为 $\pm 1^\circ$ 范围内为估计成功，统计其发现概率，所得结果如图 2 所示。

其它条件不变，将入射角定为 16° 和 46° ，令信噪比由 $-10 \sim 10$ dB 进行变化，所得角度估计结果如图 3 所示。

其它条件不变，令快拍数由 $30 \sim 300$ 进行变化，所得角度估计结果如图 4 所示。

通过以上仿真结果可以看出，在处理非相干信号时，L1_SRACV 算法在各实验中性能都较差；L1_SVD 算法只在低采样数条件下表现出较好的性能，但是在其它几个实验中的性能都较差；本文算法在所有实验中的性能均较好。综合以上实验结果可得，本文算法在处理非相干信号时的角度分辨力较好，在低信噪比和低快拍数条件下具有较好性能，较之其它算法都具有较大的改进和提高。

仿真实验 3 假设两个相干的远场窄带信号入射到阵元数为 8 的均匀线阵上，阵元间隔 d 为入射信号波长的一半，信噪比为 10 dB，快拍数设为 300，入射角度间隔从 $1^\circ \sim 10^\circ$ 变化。将搜索空域 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 按等角度间隔 1° 进行划分，蒙特卡罗实验次数为 200，统计求其发现概率，所得结果如图 5 所示。

其它条件不变，将入射角定为 16° 和 46° ，令信噪比由 $-10 \sim 10$ dB 进行变化，所得角度估计结果如图 6 所示。

其它条件不变，令快拍数由 $30 \sim 300$ 进行变化，所得角度估计结果如图 7 所示。

通过以上仿真结果可以看出，在处理相干信号时，L1_SRACV 算法在各实验中性能都较差；L1_SVD 算法只在低采样数条件下表现出较好的性能，与本文算法基本相当，但是在其它几个实验中的性能都较差；本文算法在所有实验中的性能均较

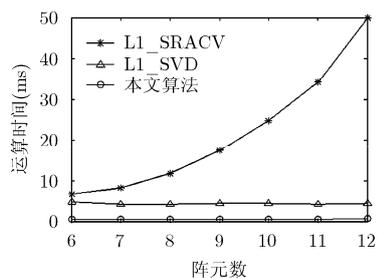


图 1 不同阵元条件下各算法的运算速度

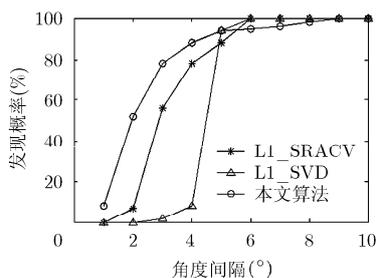


图 2 非相干信号不同角度间隔条件下的发现概率

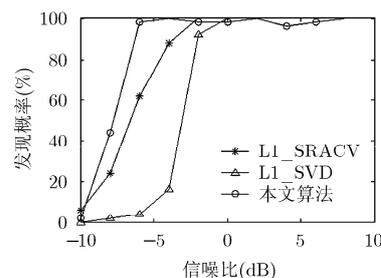


图 3 非相干信号不同信噪比条件下的发现概率

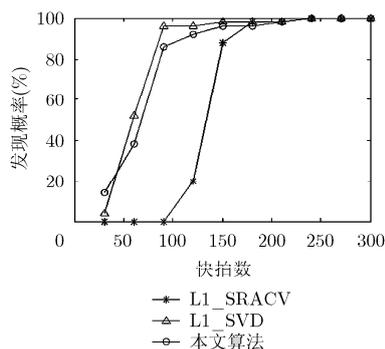


图 4 非相干信号不同快拍数条件下的发现概率

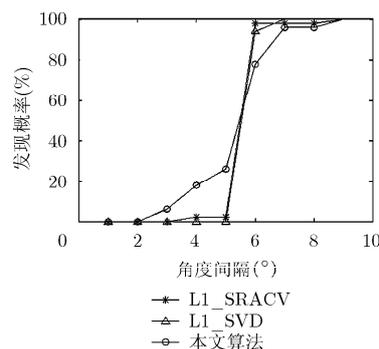


图 5 相干信号不同角度间隔条件下的发现概率

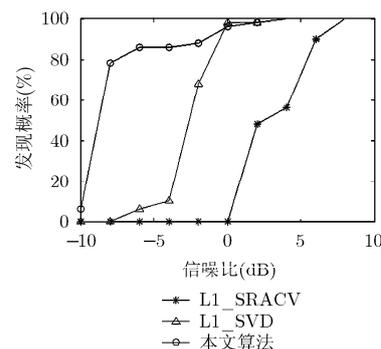


图 6 相干信号不同信噪比条件下的发现概率

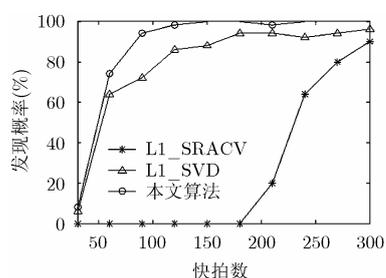


图 7 相干信号不同快拍数条件下的发现概率

好, 尤其是在低信噪比和低角度间隔情况下具有较为突出的性能。综合以上实验结果可得, 本文算法在处理相干信号时的角度分辨力较好, 在低信噪比和低快拍数条件下具有较好性能, 较之其它算法都具有较大的改进和提高。

7 结论

将压缩感知理论运用到 DOA 估计中, 不但可以降低数据采样率、传输量和存储量, 并且可以提高参数估计的准确性, 从而克服传统 DOA 估计算法的不足。但是已有的基于压缩感知的 DOA 估计算法, 大多存在处理相干信号能力弱和运算量大的问题。本文提出一种基于 KR 积变换和空域平滑理论的 DOA 估计算法, 不但具有良好的相干信号处理能力, 并且可以大大减少运算量。文中最后用仿

真实验证明了该算法较之经典算法具有更优的性能, 尤其在低信噪比、低角度间隔和低快拍数情况下估计性能良好。

参考文献

- [1] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 等. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 39(7): 1651-1662.
JIAO Licheng, YANG Shuyuan, LIU Fang, *et al.* Development and prospect of compressive sensing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(7): 1651-1662.
- [2] 沈志博, 董春曦, 黄龙, 等. 基于压缩感知的宽频段二维 DOA 估计算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(12): 2935-2941. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01931.
SHEN Zhibo, DONG Chunxi, HUANG Long, *et al.* Broadband 2-D DOA estimation based on compressed sensing[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(12): 2935-2941. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01931.
- [3] 林波, 张增辉, 朱炬波. 基于压缩感知的 DOA 估计稀疏化模型与性能分析[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(3): 589-594. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00149.
LIN Bo, ZHANG Zenghui, and ZHU Jubo. Sparsity model and performance analysis of DOA estimation with compressive sensing[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(3): 589-594. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00149.
- [4] MARCO ROSSI, ALEXANDER M H, and YONINA C E.

- Spatial compressive sensing for MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(2): 419–430.
- [5] LIU Zhangmeng. Direction-of-arrival estimation with time-varying arrays via Bayesian multitask learning[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2014, 63(8): 3762–3773.
- [6] GU Jianfeng, ZHU Weiping, and SWAMY M N S. Joint 2-D DOA estimation via sparse L-shaped array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(5): 1171–1182.
- [7] MALIOUTOV D M, CETIN M, and WILLSKY A S. Optimal sparse representations in general overcomplete bases [C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Canada, 2004: 793–796.
- [8] TIBSHIRANI R. Regression shrinkage and selection via the LASSO[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 1996, 58(1): 267–288.
- [9] MALIOUTOV D, MUJDAT C, and WILLSKY A. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022.
- [10] Hyder M and Mahata K. Direction of arrival estimation using a mixed $l_{2,0}$ -norm approximation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(9): 4646–4655.
- [11] YIN J and CHEN T. Direction of arrival estimation using a sparse representation of array covariance vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4489–4493.
- [12] MA W K, HSIEH T H, and CHI C Y. DOA estimation of quasi-stationary signals with less sensors than sources and unknown spatial noise covariance: A Khatri-Rao subspace approach[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(4): 2168–2180.
- [13] EVANS J E, SUN D F, and JOHNSON J R. Application of advanced signal processing techniques to angle of arrival estimation in ATC navigation and surveillance systems[R]. Massachusetts Inst of Tech Lexington Lincoln Lab, 1982.
- [14] ORERSTEN B, STOICA P, and ROY R. Covariance matching estimation techniques for array signal processing applications[J]. *Digital Signal Processing*, 1998, 8(3): 185–210.
- [15] GRANT M and BOYD S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming[OL]. <http://cvxr.com/cvx>, 2012.
- [16] LIU Zhangmeng, HUANG Zhitao, and ZHOU Yiyu. Array signal processing via sparsity-inducing representation of the array covariance matrix[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, 49(3): 1710–1724.
- 蔡晶晶：女，1981年生，博士，讲师，研究方向为阵列信号处理、电子侦察、无源定位等。
- 宗汝：男，1981年生，博士生，研究方向为通信信号处理、MIMO雷达等。
- 蔡辉：男，1983年生，硕士生，研究方向为雷达信号处理、阵列信号处理等。