第 38 卷第 1 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.38No.1
2016 年 1 月 Journal of Electronics & Information Technology Jan. 2016

基于 ESPRIT 算法的十字型阵列 MIMO 雷达降维 DOA 估计

梁 浩* 崔 琛 余 剑
(合肥电子工程学院 401 室 合肥 230037)

摘 要：该文针对十字型阵列配置下的单基地 MIMO 雷达 2 维空间角度估计问题，提出一种基于 ESPRIT 算法的降维 DOA 估计算法。算法通过降维矩阵的设计及回波数据的降维变换，将高维回波数据转换至低维信号空间，最大程度地去除了所有的冗余数据；利用矩阵的酉变换进行实数域信号子空间的估计，并基于 ESPRIT 算法实现 2 维空间角度的联合估计及参数的自动配对。算法不牺牲阵列孔径，在获取信噪比增益和快拍增益的同时，有效降低了回波数据的维数，具有更低的运算复杂度。仿真结果验证了理论分析的正确性和算法的有效性。

关键词：MIMO 雷达；十字型阵列；降维 ESPRIT；酉变换
中图分类号：TN958 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2016)01-0080-10
DOI: 10.11999/JEIT150402

Reduced-dimensional DOA Estimation Based on ESPRIT Algorithm in Monostatic MIMO Radar with Cross Array

LIANG Hao CUI Chen YU Jian
(401 *Laboratory, Electronic Engineering Institute*, *Hefei* 230037, *China*)

Abstract: To solve the problem of two dimensional angles estimation for MIMO radar with cross array, a new reduced-dimensional Direction Of Arrival (DOA) estimation method based on ESPRIT algorithm is proposed. Through the reduced-dimensional matrix design and reduced-dimensional transformation, the high dimensional received data can be transformed into a low dimensional signal space, and the corresponding data redundancy can be removed at the greatest degree. The signal space in a real-value field can be estimated through the unitary transformation of matrix, and parameters can be jointly estimated using ESPRIT algorithm with automatic pairing. The proposed algorithm, obtaining signal to noise ratio gain and snapshots gain, can reduce effectively the dimension of received data and the computational complexity of parameters estimation without costing the aperture of array. Lastly, simulation results verify the correctness of theoretical analysis and the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: MIMO radar; Cross array; Reduced-dimensional ESPRIT; Unitary transformation

1 引言

多输入多输出(Multiple Input and Multiple Output, MIMO)技术为雷达理论的发展提供了广阔的思路，以此为基础体制的 MIMO 雷达在目标检测、参数估计、杂波抑制等方面具有诸多优势[1,2]，已成为现代雷达发展趋势的综合体现。根据信号处理方式的不同，MIMO 雷达可以分为分布式 MIMO 雷达和相干式 MIMO 雷达；本文以相干式 MIMO 雷达为研究对象，重点研究单基地配置下的多目标参数估计问题。

收稿日期：2015-04-08；改回日期：2015-07-03；网络出版：2015-08-27
*通信作者：梁浩 lhmailhappy@163.com
基金项目：国家自然科学基金(60702015)，电子工程学院院控科研基金(KY13A206)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (60702015), Research Fund of Electronic Engineering Institute (KY13A206)

单基地 MIMO 雷达因其虚拟扩展能力，能够获取比传统相控阵雷达更大的虚拟孔径，在参数估计性能方面优势明显。鉴于虚拟扩展后与 1 维线性阵列的等效相似性，目前的研究大多是将传统基于相控阵雷达的高分辨算法直接推广应用，文献[3]的最大似然算法可以直接用来求解 1 维角度，且估计性能能够逼近理论下界，同时对单基地 MIMO 雷达阵列流型没有要求，但需要高维的参数搜索，运算量较大；文献[4]通过设计相应的降维矩阵，将原始单基地 MIMO 雷达高维回波数据转换到了低维信号空间，去除了虚拟扩展中所有的冗余数据，因此降低了后续处理的数据维数，但其参数求解涉及 1 维 Capon 谱搜索；文献[5]在进行降维变换之后，直接利用 ESPRIT 算法进一步降低了算法整体的运算复杂度；文献[6]在文献[5]的基础上进一步通过酉变换，充分利用复观测数据及其共轭数据来提高 ESPRIT 算法的参数估计精度；文献[7,8]针对传统 MIMO 雷

达发射功率分散的问题，从波束域空间的角度优化发射波束加权矩阵，将发射功率聚集范围于期望发射方向，以此进一步提高参数估计性能及精度。但以上研究局限于 1 维线阵模型，无法进行目标方向的定位。

事实上，当收、发阵列均采用 2 维(或更高维)阵列配置时，目标参数维度的扩展意味着目标特征描述得更加准确，同时收、发阵列经过 MIMO 雷达虚拟扩展后整体天线流型也就更为复杂，因此深入研究 2 维天线配置下单基地 MIMO 雷达的虚拟扩展性能以及参数估计问题对目标的定位具有重要意义。文献[9,10]基于单基地 MIMO 雷达 3 维阵列配置模型，对比分析了不同平面流型配置下基于最大似然估计(MLE)算法的 MIMO 雷达天线位置敏感性和模糊限，比较了不同阵列配置下 MIMO 雷达总的敏感性测度。文献[11]进一步通过 MIMO 虚拟阵列流形的微分几何性质，研究了 MIMO 雷达估计精度、检测及分辨的性能极限，为 MIMO 雷达系统的天线设计提供了依据。文献[12]研究了 L 型阵列配置下单基地 MIMO 雷达的 2 维参数估计问题，算法通过构造降维矩阵对回波数据进行降维预处理后，利用二次优化方法将 2 维 DOA 估计分解为两个 1 维 DOA 估计，一定程度上降低了运算复杂度，但降维矩阵的设计并没有最大程度地降低回波数据的维数，回波数据中仍存在冗余；在利用二次优化进行降维求解过程中，对方向向量中各元素的约束较弱[13]，造成估计精度较差，同时协方差矩阵的构建和特征分解以及两次 1 维谱搜索仍存在较高的运算量；此外 L 型阵列结构特点决定其只对某个特定方向的角度敏感，而无法满足全空域范围的参数估计。文献[14]研究了平面阵配置下的单基地 MIMO 雷达的 2 维参数估计问题，进行了降维矩阵的设计及降维处理，并利用文献[15]中的酉变换思想进行实数域信号子空间估计和 2 维参数求解，但其降维过程本质上为文献[4～6]中 1 维降维变换在 2 维上的扩展应用，同时由于采用面阵配置，面临着巨大硬件成本和复杂代价。

交叉阵列因其构造简单、复杂度低，且具有比拟面阵的孔径性能，而被广泛应用阵列信号处理中。本文针对十字型阵列配置下的单基地 MIMO 雷达 2 维空间角度估计问题，基于酉变换提出一种降维 DOA 估计算法。算法首先根据十字型阵列 MIMO 雷达流型矢量的特点，通过设计降维矩阵以及相应的降维处理，将高维回波数据转换至低维信号空间；然后通过酉变换进行实数域信号子空间的估计，利用 ESPRIT 算法实现目标 2 维空间角度的联合估计及参数的自动配对；与文献算法相比，本文算法通过降维处理及实数域信号子空间估计，在获取信噪比增益和快拍增益的同时，不损失阵列孔径，具有更低的运算复杂度，在低信噪比、低快拍数据长度下参数估计性能更优。

2　问题建模

考虑收、发共置的窄带单基地 MIMO 雷达系统，收、发阵列均为如图 1 所示的十字型阵列配置，其中十字型阵列由 xoy 平面上以参考点 O 为交叉点的两个垂直子阵构成；x 轴与 y 轴均为等间距线阵且满足 $d_x = d_y$，并分别以参考点 O (O 点为 x 轴与 y 轴共用)对称分布着 $2M_x - 1$ 和 $2M_y - 1$ 个阵元，即 x 轴与 y 轴的各个半轴(含参考点 O)的阵元数分别为 M_x 和 M_y；发射阵列 $2M_x + 2M_y - 3$ 个发射阵元同时发射相同载频及带宽的一组正交信号，即 $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \cdots, \boldsymbol{s}_{2M_x+2M_y-3}]^{\mathrm{T}}$，其中第 m 个发射阵元的发射信号 $\boldsymbol{s}_m = [s_m(1), s_m(2), \cdots, s_m(L)]$，其中 $m = 1, 2, \cdots, 2M_x + 2M_y - 3$，$L$ 为一个脉冲周期内的子脉冲数。假设远场空域存在 K 个目标，其中第 $k(k = 1, 2, \cdots, K)$ 个目标的空间角度位置信息为 (ϑ_k, ϕ_k)，并满足 $\cos\vartheta = \cos\theta\cos\varphi$，$\cos\phi = \cos\theta\sin\varphi$；其中 (θ, φ) 对应目标的俯仰角与方位角，(ϑ, ϕ) 对应目标分别与 x，y 轴的夹角。则第 $q\{q = 1, 2, \cdots, Q\}$ 次脉冲下 $2M_x + 2M_y - 3$ 个正交发射波形经过目标反射后在接收端的输出信号为

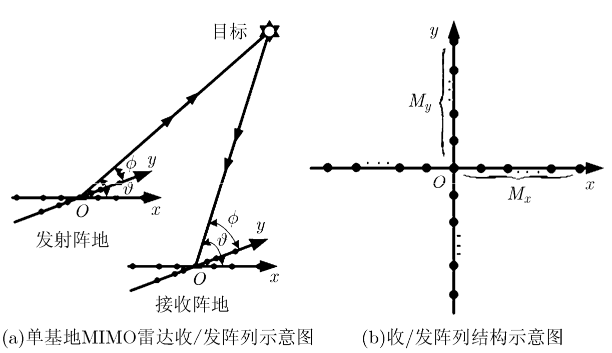
$$\boldsymbol{x}_q(n) = \boldsymbol{A}(\vartheta, \phi)\,\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\beta}_q\right)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\vartheta, \phi)\,\boldsymbol{S}(n) + \boldsymbol{w}_q(n) \quad (1)$$

符号 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{e})$ 表示以向量 $\boldsymbol{e}$ 为元素的对角矩阵；$\boldsymbol{\beta}_q = \left[\beta_1^q \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_1 n}, \beta_2^q \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_2 n}, \cdots, \beta_K^q \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_K n}\right]^{\mathrm{T}}$，$\beta_1^q, \beta_2^q, \cdots, \beta_K^q$ 为第 q 次脉冲下各个目标的散射系数，由目标的 RCS 决定，f_k 为第 k 个目标的多普勒频率；$\boldsymbol{w}_q(n)$ 为加性高斯噪声矢量；

$$\boldsymbol{A}(\vartheta, \phi) = \left[\boldsymbol{a}(\vartheta_1, \phi_1), \boldsymbol{a}(\vartheta_2, \phi_2), \cdots, \boldsymbol{a}(\vartheta_K, \phi_K)\right]$$

为对应的导向矢量，并满足

$$\boldsymbol{a}(\vartheta, \phi) = \left[\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+\mathrm{T}}(\phi), \boldsymbol{a}_x^{\mathrm{T}}(\vartheta), \underline{\boldsymbol{a}}_y^{-\mathrm{T}}(\phi)\right]^{\mathrm{T}}$$



(a)单基地MIMO雷达收/发阵列示意图　　(b)收/发阵列结构示意图

图 1　十字阵列 MIMO 雷达收发阵列配置

$$\boldsymbol{a}_x(\vartheta)=\left[\boldsymbol{a}_x^{+\mathrm{T}}(\vartheta),\underline{\boldsymbol{a}}_x^{-\mathrm{T}}(\vartheta)\right]^{\mathrm{T}}=\left[\overline{\boldsymbol{a}}_x^{+\mathrm{T}}(\vartheta),\boldsymbol{a}_x^{-\mathrm{T}}(\vartheta)\right]^{\mathrm{T}}$$

其中$\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)$为$\boldsymbol{a}_y^{+}(\phi)$的前$M_y-1$项，$\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)$为$\boldsymbol{a}_y^{-}(\phi)$的后$M_y-1$项，$\boldsymbol{a}_y^{+}(\phi)$和$\boldsymbol{a}_y^{-}(\phi)$分别对应发射阵列$y$轴正、负半轴(含参考点$O$)的流型矢量；相应的$\overline{\boldsymbol{a}}_x^{+}(\vartheta)$为$\boldsymbol{a}_x^{+}(\vartheta)$的前$M_x-1$项，$\underline{\boldsymbol{a}}_x^{-}(\vartheta)$为$\boldsymbol{a}_x^{-}(\vartheta)$的后$M_x-1$项，$\boldsymbol{a}_x^{+}(\vartheta)$和$\boldsymbol{a}_x^{-}(\vartheta)$分别对应发射阵列$x$轴正、负半轴(含参考点$O$)的流型矢量，即

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_y^{+}(\phi)&=\left[\exp\left(\kappa_{M_y-1}^{y}\right),\exp\left(\kappa_{M_y-2}^{y}\right),\cdots,\exp\left(\kappa_0^{y}\right)\right]^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{a}_y^{-}(\phi)&=\left[\exp\left(\kappa_0^{y}\right),\exp\left(\kappa_{-1}^{y}\right),\cdots,\exp\left(\kappa_{-(M_y-1)}^{y}\right)\right]^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{a}_x^{+}(\vartheta)&=\left[\exp\left(\kappa_{M_x-1}^{x}\right),\exp\left(\kappa_{M_x-2}^{x}\right),\cdots,\exp\left(\kappa_0^{x}\right)\right]^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{a}_x^{-}(\vartheta)&=\left[\exp\left(\kappa_0^{x}\right),\exp\left(\kappa_{-1}^{x}\right),\cdots,\exp\left(\kappa_{-(M_x-1)}^{x}\right)\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\kappa_{m_y}^{y}&=-\mathrm{j}2\pi m_y d_y\cos\phi/\lambda;\\
m_y&=-\left(M_y-1\right),\cdots,0,\cdots,M_y-1\\
\kappa_{m_x}^{x}&=-\mathrm{j}2\pi m_x d_x\cos\vartheta/\lambda;\\
m_x&=-\left(M_x-1\right),\cdots,0,\cdots,M_x-1
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

忽略多普勒频移的影响，由于发射正交波形，即满足$\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{L}\boldsymbol{S}(n)\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}(n)=\boldsymbol{I}_{2M_x+2M_y-3}$，则接收的回波信号经过匹配滤波以及矢量化操作后，可得第q次快拍的接收数据为

$$\boldsymbol{y}_q=\boldsymbol{G}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{\beta}_q+\boldsymbol{n}_q\tag{4}$$

对$\boldsymbol{y}_q$进行列堆栈，即可得到Q次脉冲下十字型阵列MIMO雷达的回波接收数据$\boldsymbol{Y}\in\mathbb{C}^{(2M_x+2M_y-3)^2\times Q}$：

$$\boldsymbol{Y}=\left[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_Q\right]=\boldsymbol{G}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{N}\tag{5}$$

式中$\boldsymbol{\eta}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_Q]$为散射系数；$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\cdots,\boldsymbol{n}_Q]$为加性高斯白噪声，服从$\boldsymbol{N}\sim N^c\left(0,\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{(2M_x+2M_y-3)^2}\right)$；$\boldsymbol{G}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{A}(\vartheta,\phi)\circ\boldsymbol{A}(\vartheta,\phi)=[\boldsymbol{g}(\vartheta_1,\phi_1),\boldsymbol{g}(\vartheta_2,\phi_2),\cdots,\boldsymbol{g}(\vartheta_K,\phi_K)]$对应联合导向矢量，$\boldsymbol{g}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)\otimes\boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)$，式中$\circ$和$\otimes$分别为 Khatri-Rao 积和 Kronecker 积。

3 算法分析

3.1 接收数据降维预处理

由联合导向矢量$\boldsymbol{g}(\vartheta,\phi)$可得

$$\boldsymbol{g}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{\Pi}_1\widehat{\boldsymbol{g}}(\vartheta,\phi)\tag{6}$$

式中

$$\widehat{\boldsymbol{g}}(\vartheta,\phi)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)\otimes\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)\\ \boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\\ \boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_1=\mathrm{blkdiag}\left\{\boldsymbol{\Pi}_y,\boldsymbol{\Pi}_x,\boldsymbol{\Pi}_y\right\}$$

式中$\mathrm{blkdiag}\left\{\boldsymbol{\Pi}_y,\boldsymbol{\Pi}_x,\boldsymbol{\Pi}_y\right\}$为以矩阵$\boldsymbol{\Pi}_y,\boldsymbol{\Pi}_x,\boldsymbol{\Pi}_y$构成的块对角矩阵，以下表示类似；同时置换矩阵$\boldsymbol{\Pi}_x$，$\boldsymbol{\Pi}_y$构造方式与文献[12]类似；进一步展开$\widehat{\boldsymbol{g}}(\vartheta,\phi)$得

$$\widehat{\boldsymbol{g}}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{\Pi}_2\breve{\boldsymbol{g}}(\vartheta,\phi)\tag{7}$$

其中

$$\breve{\boldsymbol{g}}(\vartheta,\phi)=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)\otimes\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)\\ \underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)\otimes\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)\\ \overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\\ \boldsymbol{a}_x(\vartheta)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\\ \underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\\ \overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)\\ \underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_2=\mathrm{blkdiag}\left\{\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}_{xy}^{+},\boldsymbol{I}_{(2M_x-1)^2},\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}_{xy}^{-}\right\}$$

且满足

$$\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}_{xy}^{+}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)^2\times(M_y-1)(2M_x-1)}\\ \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{\Pi}_{xy}^{+}\\ \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{I}_{(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)^2\times(M_y-1)(2M_x-1)}\\ \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{I}_{(M_y-1)(2M_x-1)}\end{bmatrix}\tag{8}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}_{xy}^{-}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{(M_y-1)(2M_x-1)} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(2M_y-1)^2}\\ \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)^2\times(M_y-1)(2M_x-1)} & \boldsymbol{I}_{(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)^2}\\ \boldsymbol{\Pi}_{xy}^{+} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(2M_y-1)^2}\\ \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)^2\times(M_y-1)(2M_x-1)} & \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)^2} & \boldsymbol{I}_{(2M_y-1)^2}\end{bmatrix}\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}_{xy}^{+}$ 的构造与 $\boldsymbol{\Pi}_x$, $\boldsymbol{\Pi}_y$ 类似；令 $\boldsymbol{h}_{xy}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\otimes\boldsymbol{a}_y(\phi)$， $\boldsymbol{a}_y(\phi)=\left[\boldsymbol{a}_y^{+\mathrm{T}}(\phi),\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-\mathrm{T}}(\phi)\right]^{\mathrm{T}}=\left[\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+\mathrm{T}}(\phi),\boldsymbol{a}_y^{-\mathrm{T}}(\phi)\right]^{\mathrm{T}}$； $\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)=\left[\boldsymbol{h}_y^{+\mathrm{T}}(\phi),\boldsymbol{h}_x^{+\mathrm{T}}(\vartheta),\boldsymbol{h}_{xy}^{\mathrm{T}}(\vartheta,\phi),\ \boldsymbol{h}_x^{-\mathrm{T}}(\vartheta),\boldsymbol{h}_y^{-\mathrm{T}}(\phi)\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{M_e\times 1}$ ； $\boldsymbol{h}_y^{+}(\phi)=\left[\exp\left(\kappa_{2M_y-2}^{y}\right),\ \exp\left(\kappa_{2M_y-3}^{y}\right),\cdots,\exp\left(\kappa_{M_y}^{y}\right)\right]^{\mathrm{T}}$ ； $\boldsymbol{h}_y^{-}(\phi)=\left[\exp\left(\kappa_{-M_y}^{y}\right),\ \exp\left(\kappa_{-M_y-1}^{y}\right),\cdots,\exp\left(\kappa_{-(2M_y-2)}^{y}\right)\right]^{\mathrm{T}}$ ； $\boldsymbol{h}_x^{+}(\vartheta)=\left[\exp\left(\kappa_{2M_x-2}^{x}\right),\ \exp\left(\kappa_{2M_x-3}^{x}\right),\cdots,\exp\left(\kappa_{M_x}^{x}\right)\right]^{\mathrm{T}}$； $\boldsymbol{h}_x^{-}(\vartheta)=\left[\exp\left(\kappa_{-M_x}^{x}\right),\ \exp\left(\kappa_{-M_x-1}^{x}\right),\cdots,\exp\left(\kappa_{-(2M_x-2)}^{x}\right)\right]^{\mathrm{T}}$；进一步降维变换可得 $\breve{\boldsymbol{g}}(\vartheta,\phi)$ 与 $\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)$ 满足如下线性关系：

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)\otimes\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)&=\boldsymbol{T}_{yy}^{++}\boldsymbol{J}_y\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\\
\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)\otimes\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)&=\boldsymbol{T}_{yy}^{-+}\boldsymbol{J}_y\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\\
\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)&=\boldsymbol{T}_{yx}^{+}\boldsymbol{J}_{xy}\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\\
\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)&=\boldsymbol{T}_x\boldsymbol{J}_x\boldsymbol{J}_{xy}\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\\
\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)&=\boldsymbol{T}_{yx}^{-}\boldsymbol{J}_{xy}\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\\
\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+}(\phi)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)&=\boldsymbol{T}_{yy}^{-+}\boldsymbol{J}_y\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\\
\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-}(\phi)&=\boldsymbol{T}_{yy}^{--}\boldsymbol{J}_y\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{T}_{yy}^{++}=\left[\boldsymbol{T}_y\quad \boldsymbol{0}_{(M_y-1)^2\times 2M_y}\right]$； $\boldsymbol{T}_{yy}^{-+}=\left[\boldsymbol{0}_{(M_y-1)^2\times M_y}\quad \boldsymbol{T}_y\quad \boldsymbol{0}_{(M_y-1)^2\times M_y}\right]$； $\boldsymbol{T}_{yy}^{--}=\left[\boldsymbol{0}_{(M_y-1)^2\times 2M_y}\quad \boldsymbol{T}_y\right]$。

$$\boldsymbol{T}_y=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{M_y-1} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times(M_y-2)} & \\ \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times 1} & \boldsymbol{I}_{M_y-1} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times(M_y-3)}\\ & \ddots & \\ & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times(M_y-2)} & \boldsymbol{I}_{M_y-1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}_x=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{2M_x-1} & \boldsymbol{0}_{(2M_x-1)\times(2M_x-2)} & \\ \boldsymbol{0}_{(2M_x-1)\times 1} & \boldsymbol{I}_{2M_x-1} & \boldsymbol{0}_{(2M_x-1)\times(2M_x-3)}\\ & \ddots & \\ & \boldsymbol{0}_{(2M_x-1)\times(2M_x-2)} & \boldsymbol{I}_{2M_x-1}\end{bmatrix}\tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_{yx}^{+}&=\left[\boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(M_x+M_y-2)}\quad \boldsymbol{I}_{(M_y-1)(2M_x-1)}\quad \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times((M_y-1)(2M_x-1)+2M_x+M_x+M_y-3)}\right]\\
\boldsymbol{T}_{yx}^{-}&=\left[\boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times((M_y-1)(2M_x-1)+2M_x+M_x+M_y-3)}\quad \boldsymbol{I}_{(M_y-1)(2M_x-1)}\quad \boldsymbol{0}_{(M_y-1)(2M_x-1)\times(M_x+M_y-2)}\right]
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

$$\boldsymbol{J}_y=\begin{bmatrix} & \boldsymbol{I}_{M_y-1} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times(M_e-(M_y-1))} & \\ \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)\times(M_y-1+M_x-1+(2M_x-1)(M_y-1))} & & \boldsymbol{I}_{2M_y-1} & \boldsymbol{0}_{(2M_y-1)\times(M_y-1+M_x-1+(2M_x-1)(M_y-1))}\\ & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times(M_e-(M_y-1))} & \boldsymbol{I}_{M_y-1} & \end{bmatrix}\tag{13a}$$

$$\boldsymbol{J}_x=\begin{bmatrix} & \boldsymbol{0}_{(M_x-1)\times(M_y-1)} & \boldsymbol{I}_{M_x-1} & \boldsymbol{0}_{(M_x-1)\times(M_e-(M_y+M_x-2))} \\ \boldsymbol{0}_{(2M_x-1)\times(M_y-1+M_x-1+(2M_x-1)(M_y-1))} & & \boldsymbol{I}_{2M_x-1} & \boldsymbol{0}_{(2M_x-1)\times(M_y-1+M_x-1+(2M_x-1)(M_y-1))}\\ & \boldsymbol{0}_{(M_x-1)\times(M_e-(M_y+M_x-2))} & \boldsymbol{I}_{M_x-1} & \boldsymbol{0}_{(M_x-1)\times(M_y-1)}\end{bmatrix}\tag{13b}$$

$\boldsymbol{J}_{xy}=\mathrm{blkdiag}\left\{\boldsymbol{I}_{M_y-1},\boldsymbol{I}_{M_x-1},\boldsymbol{\Pi}_{xy},\boldsymbol{I}_{M_x-1},\boldsymbol{I}_{M_y-1}\right\}$； $\boldsymbol{\Pi}_{xy}$ 与 $\boldsymbol{\Pi}_x$， $\boldsymbol{\Pi}_y$ 类似；则

$$\breve{\boldsymbol{g}}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{\Pi}_3\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{\Pi}_3=\left[\left(\boldsymbol{T}_{yy}^{++}\boldsymbol{J}_y\right)^{\mathrm{T}},\left(\boldsymbol{T}_{yy}^{-+}\boldsymbol{J}_y\right)^{\mathrm{T}},\left(\boldsymbol{T}_{yx}^{+}\boldsymbol{J}_{xy}\right)^{\mathrm{T}},\left(\boldsymbol{T}_x\boldsymbol{J}_x\boldsymbol{J}_{xy}\right)^{\mathrm{T}},\ \left(\boldsymbol{T}_{yx}^{-}\boldsymbol{J}_{xy}\right)^{\mathrm{T}},\left(\boldsymbol{T}_{yy}^{-+}\boldsymbol{J}_y\right)^{\mathrm{T}},\left(\boldsymbol{T}_{yy}^{--}\boldsymbol{J}_y\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$，则由式(6)，式(7)和式(14)可得，存在线性变换矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 满足：

$$\boldsymbol{g}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{\Pi}_1\boldsymbol{\Pi}_2\boldsymbol{\Pi}_3\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\tag{15}$$

则式(5)中的高维回波数据可以表示为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{N}\tag{16}$$

式中 $\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)=\left[\boldsymbol{h}(\vartheta_1,\phi_1),\boldsymbol{h}(\vartheta_2,\phi_2),\cdots,\boldsymbol{h}(\vartheta_K,\phi_K)\right]$；这就意味着原始高维回波数据中目标信息同样存在于 $\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)$ 张成的低维信号子空间中，因此可以通过降维处理将高维回波信号变换到该低维子空间中，定义降维

变换矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Gamma}\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma}\right)^{-1/2}\in\mathbb{C}^{\left(2M_x+2M_y-3\right)^2\times M_e}$，并对回波信号进行降维预处理：

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{N} \tag{17}$$

显然易得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_{M_e}$，其中，$M_e=(2M_x-1)(2M_y-1)+2M_x+2M_y-4$，这就保证了降维变换过程并不改变噪声的功率，即降维预处理后 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{N}$ 仍服从 $\boldsymbol{N}^c(0,\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{M_e})$；式中 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma}$，满足：

$$\boldsymbol{W}=\mathrm{blkdiag}\left\{\boldsymbol{W}_y^+,\boldsymbol{W}_x^+,\boldsymbol{W}_{xy}^+,\boldsymbol{W}_y,\boldsymbol{W}_{xy}^-,\boldsymbol{W}_x^-,\boldsymbol{W}_y^-\right\} \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{W}_y^+=\mathrm{diag}\left\{\underbrace{1,\cdots,M_y-1}_{M_y-1}\right\}$；$\boldsymbol{W}_y^-=\mathrm{diag}\left\{\underbrace{M_y-1,\cdots,1}_{M_y-1}\right\}$；$\boldsymbol{W}_x^+=\mathrm{diag}\left\{\underbrace{1,\cdots,M_x-1}_{M_x-1}\right\}$；$\boldsymbol{W}_x^-=\mathrm{diag}\left\{\underbrace{M_x-1,\cdots,1}_{M_x-1}\right\}$；

$\boldsymbol{W}_{xy}^+=\mathrm{diag}\left\{\overbrace{\underbrace{2,\cdots,2,M_x,2,\cdots,2}_{(2M_y-1)},\cdots,\underbrace{2,\cdots,2,2M_x-2,2,\cdots,2}_{(2M_y-1)}}^{(M_x-1)(2M_y-1)}\right\}$；$\boldsymbol{W}_{xy}^-=\mathrm{diag}\left\{\overbrace{\underbrace{2,\cdots,2,2M_x-2,2,\cdots,2}_{(2M_y-1)}\cdots,\underbrace{2,\cdots,2,M_x,2,\cdots,2}_{(2M_y-1)}}^{(M_x-1)(2M_y-1)}\right\}$；

$\boldsymbol{W}_y=\mathrm{diag}\left\{\overbrace{\underbrace{M_y,M_y+1,\cdots,2M_y-3,2M_y-2}_{M_y-1},\underbrace{2M_x+2M_y-3}_{1},\underbrace{2M_y-2,2M_y-3,\cdots,M_y+1,M_y}_{M_y-1}}^{2M_y-1}\right\}$，详细推导略。

从式(16)和式(17)可得，降维后的回波数据 $\boldsymbol{Z}$ 可以等效为长度为 M_e 的加权平面阵的回波信号，权值为对角阵 $\boldsymbol{W}^{1/2}$ 的对角元素。同时由 $\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)$ 可知，本文降维处理最大程度地降低了回波数据的维数，去除了原始回波数据中所有重复量，达到了降维的目的。在得到降维后的回波数据 $\boldsymbol{Z}$ 后，即可利用协方差矩阵的特征分解或者传播算法进行信号子空间的估计，考虑到特征分解的运算复杂度以及传播算法在低信噪比下估计精度较差，为进一步降低运算复杂度，提高参数估计精度，下面通过构建 Centro-Hermite 矩阵，利用酉变换进行实数域信号子空间的估计与参数求解。

3.2 基于酉变换的信号子空间估计

在进行实数域变换之前，需要构建相应的 Centro-Hermite 矩阵，令 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}=\left[\boldsymbol{Z}\quad \boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{Z}^*\right]$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\tilde{z}}&=E\left\{\widetilde{\boldsymbol{Z}}\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{H}}\right\}=\boldsymbol{R}_z+\boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{R}_z^*\boldsymbol{\Xi}_{M_e}\\&=\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{R}_\eta+\boldsymbol{R}_\eta^*\right)\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{1/2}+2\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{M_e}\end{aligned} \tag{19}$$

式中 $\boldsymbol{\Xi}_{M_e}$ 为 M_e 维的反对角矩阵；$\boldsymbol{R}_\eta=E\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\}$；上面推导用到了 $\boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}^*=\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}$；显然 $\boldsymbol{R}_{\tilde{z}}$ 具有 Centro-Hermite 性，即满足

$$\boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{R}_{\tilde{z}}^*\boldsymbol{\Xi}_{M_e}=\boldsymbol{R}_{\tilde{z}} \tag{20}$$

在得到 Centro-Hermite 矩阵 $\boldsymbol{R}_{\tilde{z}}$ 后，即可利用酉矩阵进行实数域变换：

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\tilde{z}}&=\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\tilde{z}}\boldsymbol{Q}_{M_e}=\left(\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_z\boldsymbol{Q}_{M_e}+\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{R}_z^*\boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{Q}_{M_e}\right)\\&=\left(\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_z\boldsymbol{Q}_{M_e}+\boldsymbol{Q}_{M_e}^{*\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_z^*\boldsymbol{Q}_{M_e}^*\right)=\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_z\boldsymbol{Q}_{M_e}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

式中 $\boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{Q}_{M_e}=\boldsymbol{Q}_{M_e}^*$，酉变换矩阵 $\boldsymbol{Q}_{M_e}$ 满足：

$$\boldsymbol{Q}_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & j\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{\Xi}_n & -j\boldsymbol{\Xi}_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}_{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} & j\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \sqrt{2} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Xi}_n & \boldsymbol{0} & -j\boldsymbol{\Xi}_n\end{bmatrix} \tag{22}$$

通过对 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\tilde{z}}$ 进行奇异值分解，即可得到实信号子空间的估计值 $\boldsymbol{U}_{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}$。进一步从另外一种思路进行 Centro-Hermite 矩阵的构造，令 $\overline{\boldsymbol{Z}}=[\boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{Z}^*\boldsymbol{\Xi}_Q]$，则易得 $\overline{\boldsymbol{Z}}$ 同样具有 Centro-Hermite 性，即满足：

$$\boldsymbol{\Xi}_{M_e}\overline{\boldsymbol{Z}}^*\boldsymbol{\Xi}_{2Q}=\overline{\boldsymbol{Z}} \tag{23}$$

相应地利用酉矩阵进行实数域变换可得 $\widehat{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\overline{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q}_{2Q}$，此时通过奇异值分解，其左奇异向量矩阵中 K 个奇异值对应的奇异向量，即为实信号子空间的估计值 $\boldsymbol{U}_{\widehat{\boldsymbol{Z}}}$。

由奇异值分解定理(Autonee-Eckart-Young 定理)可得，对于 Centro-Hermite 矩阵 $\widehat{\boldsymbol{Z}}\in R^{M_e\times 2Q}$，存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}\in R^{M_e\times M_e}$ 和 $\boldsymbol{V}\in R^{2Q\times 2Q}$ 使得 $\widehat{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$；其中 $\boldsymbol{U}\in R^{M_e\times M_e}$ 和 $\boldsymbol{V}\in R^{2Q\times 2Q}$ 分别为矩阵 $\widehat{\boldsymbol{Z}}\in R^{M_e\times 2Q}$ 的左、右奇异值向量矩阵，$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{blkdiag}\left\{\boldsymbol{\Sigma}_K,\boldsymbol{0}_{(M_e-K)(2Q-K)}\right\}$，$\boldsymbol{\Sigma}_K=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\cdots,\sigma_K\}$ 对应其非零奇异值。则有

$$\widehat{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\overline{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q}_{2Q}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}_{\widehat{\boldsymbol{Z}}}\boldsymbol{\Sigma}_K\boldsymbol{V}_{\widehat{\boldsymbol{Z}}}^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

进一步 $\overline{\boldsymbol{Z}}=\left[\boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{Z}^*\boldsymbol{\Xi}_Q\right]=\left[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Xi}_{M_e}\boldsymbol{Z}^*\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_Q & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Xi}_Q\end{bmatrix}=\widetilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P}$，

且 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$；则对于 Centro-Hermite 矩阵

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\tilde{z}}&=\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_{\tilde{z}}\boldsymbol{Q}_{M_e}=\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}E\left\{\widetilde{\boldsymbol{Z}}\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{H}}\right\}\boldsymbol{Q}_{M_e}\\&=\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}E\left\{\widetilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{H}}\right\}\boldsymbol{Q}_{M_e}=\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}E\left\{\overline{\boldsymbol{Z}}\overline{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{H}}\right\}\boldsymbol{Q}_{M_e}\\&=E\left\{\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\overline{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q}_{2Q}\boldsymbol{Q}_{2Q}^{\mathrm{H}}\overline{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_{M_e}\right\}=E\left\{\widehat{\boldsymbol{Z}}\widehat{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{H}}\right\}\\&=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{U}_{\widehat{\boldsymbol{Z}}}\boldsymbol{\Sigma}_K\boldsymbol{\Sigma}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\widehat{\boldsymbol{Z}}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}_{\widehat{\boldsymbol{Z}}}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_K\boldsymbol{U}_{\widehat{\boldsymbol{Z}}}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{25}$$

显然两种矩阵 Centro-Hermite 化思路，在进行实信号子空间的估计上是等价的；不同之处在于前者(Unitary transformation of Covariance Matrix, UCM)是将复数域的回波数据(利用了回波数据的共轭信息进行数据扩展后)协方差矩阵直接进行酉变换，通过实数域的奇异值分解来获得对信号子空间的估计，而后者(Unitary transformation of Received Data, URD)是将复数域的回波数据通过数据扩展后进行酉变换，基于转换后实数域快拍回波数据的奇异值分解进行信号子空间的估计；对比来讲，前者基于协方差矩阵的奇异值分解能够进一步减弱噪声的影响，具有更好的稳健性。

3.3　2 维空间角参量的联合估计　在进行奇异值分解获得对应的信号子空间 $\boldsymbol{U}_s$ (即基于 UCM 可得信号子空间的估计值 $\boldsymbol{U}_{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}$，基于 URD 可得信号子空间的估计值 $\boldsymbol{U}_{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}$，这里用 $\boldsymbol{U}_s$ 统一来表示)，由 Centro-Hermite 性质可得，无噪条件下估计的信号子空间 $\boldsymbol{U}_s$ 与 $\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}$ 张成相同的空间，即存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$ 满足：

$$\boldsymbol{U}_s=\boldsymbol{Q}_{M_e}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T} \tag{26}$$

由于 $\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)$ 满足：

$$\left.\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{h}}_x(\vartheta,\phi)&=\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\\ \widehat{\boldsymbol{h}}_y(\vartheta,\phi)&=\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

式中 $\widehat{\boldsymbol{h}}_x(\vartheta,\phi)=\left[\boldsymbol{h}_x^{+\mathrm{T}}(\vartheta),\ \boldsymbol{a}_x^{\mathrm{T}}(\vartheta),\ \boldsymbol{h}_x^{-\mathrm{T}}(\vartheta),\ \boldsymbol{a}_x^{\mathrm{T}}(\vartheta)\otimes\tilde{\boldsymbol{a}}_y^{\mathrm{T}}(\phi)\right]^{\mathrm{T}}$，$\widehat{\boldsymbol{h}}_y(\vartheta,\phi)=\left[\boldsymbol{h}_y^{+\mathrm{T}}(\phi),\boldsymbol{a}_y^{\mathrm{T}}(\phi),\boldsymbol{h}_y^{-\mathrm{T}}(\phi),\boldsymbol{a}_y^{\mathrm{T}}(\phi)\otimes\tilde{\boldsymbol{a}}_x^{\mathrm{T}}(\vartheta)\right]^{\mathrm{T}}$；$\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{J}_{\tilde{x}y}\boldsymbol{J}_{\tilde{x}}\boldsymbol{J}_{xy}$，$\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{J}_{\tilde{y}x}\boldsymbol{J}_{\tilde{y}}$；$\boldsymbol{J}_{\tilde{x}y}=\mathrm{blkdiag}\left\{\boldsymbol{I}_{4M_x-3},\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{x}y}\right\}$，$\boldsymbol{J}_{\tilde{y}x}=\mathrm{blkdiag}\left\{\boldsymbol{I}_{4M_y-3},\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}x}\right\}$；$\boldsymbol{J}_{\tilde{x}}=\left[\boldsymbol{J}_x^{\mathrm{T}},\boldsymbol{T}_{yx}^{+\mathrm{T}},\boldsymbol{T}_{yx}^{-\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{J}_{\tilde{y}}=\left[\boldsymbol{J}_y^{\mathrm{T}},\boldsymbol{T}_{xy}^{+\mathrm{T}},\boldsymbol{T}_{xy}^{-\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\otimes\tilde{\boldsymbol{a}}_y(\phi)=\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{x}y}\left[\tilde{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\right]$，$\boldsymbol{a}_y(\phi)\otimes\tilde{\boldsymbol{a}}_x(\vartheta)=\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}x}\cdot\left[\tilde{\boldsymbol{a}}_x(\vartheta)\otimes\boldsymbol{a}_y(\phi)\right]$；$\tilde{\boldsymbol{a}}_y(\phi)=\left[\overline{\boldsymbol{a}}_y^{+\mathrm{T}}(\phi),\underline{\boldsymbol{a}}_y^{-\mathrm{T}}(\phi)\right]^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{a}}_x(\vartheta)=\left[\overline{\boldsymbol{a}}_x^{+\mathrm{T}}(\vartheta),\underline{\boldsymbol{a}}_x^{-\mathrm{T}}(\vartheta)\right]^{\mathrm{T}}$，$\widehat{\boldsymbol{H}}_x=\left[\widehat{\boldsymbol{h}}_x(\vartheta_1,\phi_1),\cdots,\widehat{\boldsymbol{h}}_x(\vartheta_K,\phi_K)\right]$，$\widehat{\boldsymbol{H}}_y=\left[\widehat{\boldsymbol{h}}_y(\vartheta_1,\phi_1),\widehat{\boldsymbol{h}}_y(\vartheta_2,\phi_2),\cdots,\widehat{\boldsymbol{h}}_y(\vartheta_K,\phi_K)\right]$；其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{xy}^{+}&=\left[\boldsymbol{0}_{(M_x-1)(2M_y-1)\times(M_x+M_y-2)}\quad \boldsymbol{I}_{(M_x-1)(2M_y-1)}\quad \boldsymbol{0}_{(M_x-1)(2M_y-1)\times((M_x-1)(2M_y-1)+2M_y+M_x+M_y-3)}\right]\\ \boldsymbol{T}_{xy}^{-}&=\left[\boldsymbol{0}_{(M_x-1)(2M_y-1)\times((M_x-1)(2M_y-1)+2M_y+M_x+M_y-3)}\quad \boldsymbol{I}_{(M_x-1)(2M_y-1)}\quad \boldsymbol{0}_{(M_x-1)(2M_y-1)\times(M_x+M_y-2)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

则由式(26)～式(28)可得

$$\boldsymbol{J}_{x1}\widehat{\boldsymbol{H}}_x\boldsymbol{\Phi}_x=\boldsymbol{J}_{x2}\widehat{\boldsymbol{H}}_x,\ \ \boldsymbol{J}_{y1}\widehat{\boldsymbol{H}}_y\boldsymbol{\Phi}_y=\boldsymbol{J}_{y2}\widehat{\boldsymbol{H}}_y \tag{29}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_{x1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{4M_x-4},\boldsymbol{0}_{(4M_x-4)\times[(2M_x-1)(2M_y-2)+1]}\\ \boldsymbol{0}_{(2M_x-2)(2M_y-2)\times(4M_x-3)},\boldsymbol{I}_{(2M_x-2)(2M_y-2)},\boldsymbol{0}_{(2M_x-2)(2M_y-2)\times(2M_y-2)}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{J}_{x2}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{(4M_x-4)\times1},\boldsymbol{I}_{4M_x-4},\boldsymbol{0}_{(4M_x-4)\times(2M_x-1)(2M_y-2)}\\ \boldsymbol{0}_{(2M_x-2)(2M_y-2)\times(4M_x+2M_y-5)},\boldsymbol{I}_{(2M_x-2)(2M_y-2)}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{y1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{4M_y-4},\boldsymbol{0}_{(4M_y-4)\times[(2M_y-1)(2M_x-2)+1]}\\ \boldsymbol{0}_{(2M_y-2)(2M_x-2)\times(4M_y-3)},\boldsymbol{I}_{(2M_y-2)(2M_x-2)},\boldsymbol{0}_{(2M_y-2)(2M_x-2)\times(2M_x-2)}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{J}_{y2}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{(4M_y-4)\times1},\boldsymbol{I}_{4M_y-4},\boldsymbol{0}_{(4M_y-4)\times(2M_y-1)(2M_x-2)}\\ \boldsymbol{0}_{(2M_y-2)(2M_x-2)\times(4M_y+2M_x-5)},\boldsymbol{I}_{(2M_y-2)(2M_x-2)}\end{bmatrix}$$

进一步由 $\boldsymbol{Q}_{Me}\boldsymbol{Q}_{Me}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{Q}_{Me}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_{Me}=\boldsymbol{I}_{Me}$ 可得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{J}_{x1}\overline{\boldsymbol{J}}_x\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{Q}_{Me}\boldsymbol{Q}_{Me}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Phi}_x\\ &\quad=\boldsymbol{J}_{x2}\overline{\boldsymbol{J}}_x\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{Q}_{Me}\boldsymbol{Q}_{Me}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}\\ &\boldsymbol{J}_{y1}\overline{\boldsymbol{J}}_y\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{Q}_{Me}\boldsymbol{Q}_{Me}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Phi}_y\\ &\quad=\boldsymbol{J}_{y2}\overline{\boldsymbol{J}}_y\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{Q}_{Me}\boldsymbol{Q}_{Me}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}_x=\mathrm{diag}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_x\cos\vartheta_1/\lambda},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_x\cos\vartheta_K/\lambda}\right\}$，$\boldsymbol{\Phi}_y=\mathrm{diag}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_y\cos\phi_1/\lambda},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_y\cos\phi_K/\lambda}\right\}$；由式(26)和式(30)得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{x1}\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{\Psi}_x&=\boldsymbol{K}_{x2}\boldsymbol{U}_s\\ \boldsymbol{K}_{y1}\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{\Psi}_y&=\boldsymbol{K}_{y2}\boldsymbol{U}_s\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

其中 $\boldsymbol{K}_{x1}=\boldsymbol{J}_{x1}\overline{\boldsymbol{J}}_x\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{Q}_{Me}$，$\boldsymbol{K}_{x2}=\boldsymbol{J}_{x2}\overline{\boldsymbol{J}}_x\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{Q}_{Me}$；$\boldsymbol{K}_{y1}=\boldsymbol{J}_{y1}\overline{\boldsymbol{J}}_y\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{Q}_{Me}$，$\boldsymbol{K}_{y2}=\boldsymbol{J}_{y2}\overline{\boldsymbol{J}}_y\boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{Q}_{Me}$；$\boldsymbol{\Psi}_x=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_x\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{\Psi}_y=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_y\boldsymbol{T}$；$\boldsymbol{\Psi}_x=\mathrm{diag}\left\{\delta_1^{\vartheta},\cdots,\delta_K^{\vartheta}\right\}$，$\boldsymbol{\Psi}_y=\mathrm{diag}\left\{\delta_1^{\phi},\cdots,\delta_K^{\phi}\right\}$，显然 $\left(\boldsymbol{K}_{x1}\boldsymbol{U}_s\right)^{\dagger}\boldsymbol{K}_{x2}\boldsymbol{U}_s$ 的特征值对应 $\boldsymbol{\Phi}_x$ 的对角线元素 $\left\{\delta_k^{\vartheta}\right\}_{k=1}^{K}$，$\left(\boldsymbol{K}_{y1}\boldsymbol{U}_s\right)^{\dagger}\boldsymbol{K}_{y2}\boldsymbol{U}_s$ 的特征值对应 $\boldsymbol{\Phi}_y$ 的对角线元素 $\left\{\delta_k^{\phi}\right\}_{k=1}^{K}$；同时对于空间角 ϑ 和 ϕ 的旋转不变因子的提取基于同一个信号子空间，即其中的角度信息是对应不变的，通过式(31)即可实现参数的自动配对，求得对应的空间角度 $\left\{\vartheta_k,\phi_k\right\}_{k=1}^{K}$，从而得到 $\left\{\theta_k,\varphi_k\right\}_{k=1}^{K}$ 的 2 维估计。

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_k&=\arccos\left[-\mathrm{angle}\left(\delta_k^{\vartheta}\right)\lambda\big/2\pi d_x\right]\\ \phi_k&=\arccos\left[-\mathrm{angle}\left(\delta_k^{\phi}\right)\lambda\big/2\pi d_y\right]\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

其中 angle(•) 为取相位操作。

3.4　算法性能分析

3.4.1　降维处理信噪比增益　本文降维处理前后回波数据对应的协方差矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{R}_y=E\left\{\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\right\}=\boldsymbol{G}E\left\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\right\}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{(2M_x+2M_y-3)^2} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{R}_z = E\left\{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}\right\} = \boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}E\left\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\right\}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{1/2} + \sigma_n^2\boldsymbol{I}_{M_e} \tag{34}$$

则对应的信噪比增益可以表示为

$$\mathrm{SNR}_y = \frac{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{G}E\left\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\right\}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\right)}{\mathrm{tr}\left(\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{(2M_x+2M_y-3)^2}\right)} = \frac{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}E\left\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\right\}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)}{\left(2M_x+2M_y-3\right)^2\sigma_n^2} \tag{35}$$

$$\mathrm{SNR}_z = \frac{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{W}^{1/2}\boldsymbol{H}E\left\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\right\}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}^{1/2}\right)}{\mathrm{tr}\left(\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{M_e}\right)} = \frac{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}E\left\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\right\}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)}{M_e\sigma_n^2} \tag{36}$$

可得经过降维处理前后获得的信噪比增益$\mathrm{SNR_g}$为

$$\mathrm{SNR_g} = \frac{\mathrm{SNR_z}}{\mathrm{SNR_y}} = \frac{\left(2M_x+2M_y-3\right)^2\sigma_n^2}{M_e\sigma_n^2} = \frac{\left(2M_x+2M_y-3\right)^2}{4M_xM_y-3} \tag{37}$$

因此，本文通过降维处理将高维回波数据转换到低维的同时，能够获取较高的信噪比增益，这对后续进一步提高目标角度参量的联合估计性能和估计精度具有重要意义，这一点也可以从后续仿真实验对比得到。

3.4.2 等效虚拟扩展分析及移不变子阵划分 由以上分析及图2的等效虚拟扩展可知，收、发阵列均为$2M_x+2M_y-3$个阵元的收发共置十字阵列MIMO雷达，虚拟扩展后共产生$(2M_x+2M_y-3)^2$个阵元，然而其中仅有M_e个有效阵元，其余均为重叠(冗余)阵元，而本文经过降维矩阵的设计以及降维处理，将$(2M_x+2M_y-3)^2$维的雷达回波信号降至M_e，有效去除了所有的重叠阵元。与此同时，虚拟扩展后的阵列流型具有中心对称性，这也为本文进行矩阵酉变换对实数域信号子空间的估计提供了条件。此外，本文进行2维空间角参量旋转不变因子的提取及等效子阵划分可由图2直观表示，由子阵1与子阵2之间的平移即可获得对$\boldsymbol{\Phi}_y$的估计，由子阵3与子阵4之间的平移即可获得对$\boldsymbol{\Phi}_x$的估计，同时对2维参量的联合估计利用到了所有有效的虚拟阵元，在基于同一信号子空间获得2维空间角参量联合估计及参数的自动配对的同时，不损失阵列孔径，进一步提高了整体的阵元利用效率。

3.4.3 运算复杂度及最大可分辨目标数 为表示方便，本文降维处理后采用特征分解进行子空间估计及参数求解的算法记为RD-EV-ESPRIT算法；将本文降维处理后采用UCM进行子空间估计及参数求解的算法记为RD-UCM-ESPRIT (Reduced-Dimensional ESPRIT with Unitary transformation of Covariance Matrix)算法；将本文降维处理后采用

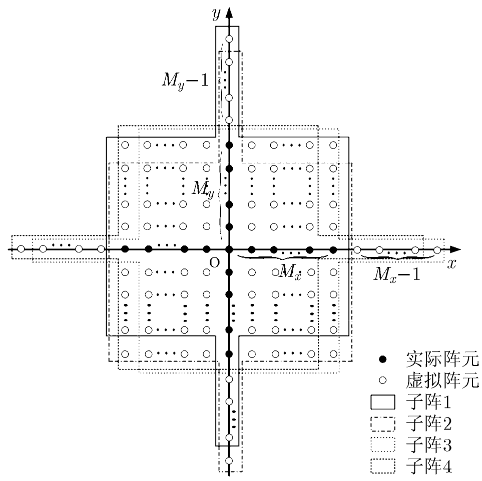


图2 虚拟扩展示意图及移不变子阵划分

URD进行子空间估计及参数求解的算法记为RD-URD-ESPRIT(Reduced-Dimensional ESPRIT with Unitary transformation of Received Data)算法。比较本文RD-UCM-ESPRIT, RD-URD-ESPRIT算法与ESPRIT算法[16,17]、Unitary-ESPRIT[15]算法以及RD-EV-ESPRIT算法的运算复杂度。相同维数的矩阵在实数域进行分解和运算的复杂度约为在复数域的1/4[18]，则ESPRIT算法的运算复杂度$O\{\boldsymbol{Q}\widehat{M}^4+\widehat{M}^6+2K^2[\widehat{M}(\widehat{M}-1)]+6K^3\}$；相对应的Unitary-ESPRIT算法的运算复杂度为$O\{(1/4)\cdot(\boldsymbol{Q}\widehat{M}^4+\widehat{M}^6)+2K^2[\widehat{M}(\widehat{M}-1)]+6K^3\}$。其中$Q$为快拍数；$K$为目标个数，$\widehat{M}=(2M_x+2M_y-3)$。由前文分析可得，降维处理后的数据维数为$M_e$，则RD-EV-ESPRIT算法的计算复杂度为$O\{Q\widehat{M}^2M_e+QM_e^2+M_e^3+2K^2\left(M_{ex}+M_{ey}\right)+6K^3\}$。则对应的RD-UCM-ESPRIT算法的计算复杂度为$O\{Q\widehat{M}^2M_e+(1/4)(2QM_e^2+M_e^3)+2K^2\left(M_{ex}+M_{ey}\right)+6K^3\}$；相应的本文RD-URD-ESPRIT算法整体计算复杂度为$O\{Q\widehat{M}^2M_e+(1/4)M_e^3+2K^2(M_{ex}+M_{ey})+6K^3\}$。其中$M_{ex}=4M_x-4+\left(2M_x-2\right)\left(2M_y-2\right)$，$M_{ey}=4M_y-4+\left(2M_x-2\right)\left(2M_y-2\right)$。显然本文提出的算法要明显低于其他算法，同时本文RD-UCM-ESPRIT和RD-URD-ESPRIT算法运算复杂度相当，后者略低于前者。

本文算法在2维空间角参量求解以及等效平移子阵划分过程中，应使$\boldsymbol{K}_{x1},\boldsymbol{K}_{x2},\boldsymbol{K}_{y1},\boldsymbol{K}_{y2}$满足列满秩条件

$$K \le \min\left(M_{ex},M_{ey}\right) \tag{38}$$

因此，本文算法的最大可分辨目标数目为

$$\min\left[2M_y(2M_x-2),2M_x(2M_y-2)\right]$$

4 仿真实验与数据分析

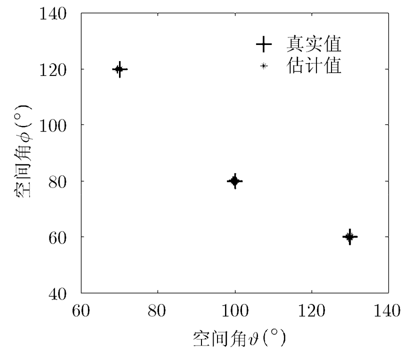
假设十字型阵列配置下的单基地MIMO雷达，

等间距阵元满足 $d_x = d_y = \lambda/2$，以相位编码信号为发射波形，分别进行以下实验。

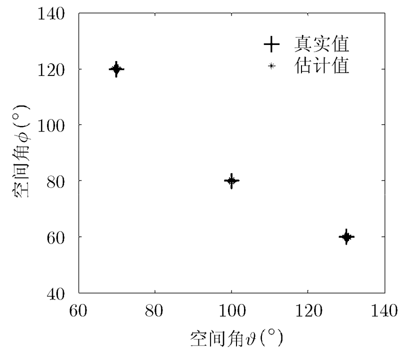
实验 1 算法有效性验证　假设十字型阵列配置下的单基地 MIMO 雷达发射阵列阵元数目满足 $M_x = 3$，$M_y = 4$；远场空域存在 $K = 3$ 个目标，与十字型阵列 MIMO 雷达的 x , y 轴的夹角(即空间角)分别为 $(60°,130°)$，$(80°,100°)$，$(120°,70°)$；信噪比为 0 dB，快拍数 $Q = 50$；进行 100 次 Monte-Carlo 实验，验证本文 RD-UCM-ESPRIT 和 RD-URD-ESPRIT 算法的有效性，仿真结果如图 3 所示。由仿真结果可得，本文 RD-UCM-ESPRIT 和 RD-URD-ESPRIT 算法均能够实现对目标 2 维空间角的有效估计，且能实现参数的自动配对；同时估计出的 2 维空间角度比较集中而没有出现散布，一定程度上也反映了两种算法在低信噪比、低快拍数据情况下的稳健性。

实验 2 算法有性能分析　假设十字型阵列配置下的单基地 MIMO 雷达发射阵列阵元数目满足 $M_x = 5$，$M_y = 6$；目标个数及相对十字型阵列 MIMO 雷达的 x , y 轴的夹角同上，快拍数 $Q = 100$，信噪比为 $-20 \sim 20$ dB；比较本文 RD-UCM-ESPRIT, RD-URD-ESPRIT 算法与文献 ESPRIT 算法、Unitary-ESPRIT 算法以及 RD-EV-ESPRIT 算法的估计性能，仿真结果如图 4 所示；其中 2 维空间角参量估计性能的 RCRB 采用文献[14]的计算方法。由仿真结果可以看出，随着信噪比的增大，以上几种算法参数估计的 RMSE 逐渐变小，估计精度越来越高，这一点很好理解；与 ESPRIT 算法和 Unitary-ESPRIT 算法相比，基于本文降维处理的算法估计性能、估计精度更好，这是由于直接采用 ESPRIT 算法和 Unitary-ESPRIT 算法会存在不同程度的孔径损失(参数估计没有利用到所有的有效阵元)，而本文降维变换过程，在去除原始回波数据中所有冗余数据的同时，能够获取较高的信噪比增益，在基于 ESPRIT 思想进行 2 维空间角参量联合估计的同时，利用到了所有的有效虚拟扩展阵元；与 RD-EV-ESPRIT 算法相比，本文两种算法在构建 Centro-Hermite 矩阵进行 Unitary 变换的过程中，均利用回波数据(降维变换后)的共轭信息进行数据扩展，在信号子空间估计上相当于获取了数据快拍增益，因此在低信噪比、低快拍数据长度下估计性能更优；本文两种算法相比较(见图 4 中放大部分)，高信噪比估计性能相当，低信噪比时，与基于快拍回波数据的奇异值分解的 RD-URD-ESPRIT 算法相比，基于协方差矩阵的奇异值分解的 RD-UCM-ESPRIT 算法能够更有效降低噪声的影响，因此估计性能略优；值得注意的是，$M_x = 5$，$M_y = 6$ 配置时，收、发阵列均为 $2M_x + 2M_y - 3 = 19$ 阵元，经 MIMO 雷达虚拟扩展后能够形成 X 轴向 $4M_x - 3 = 17$ 个阵元、Y 轴向 $4M_y - 3 = 21$ 个阵元的类十字阵列(如图 2 所示)，因此图 4 中算法的估计精度在较低信噪比下依旧能够获取较高的估计精度。

实验 3 算法性能与参数之间的关系　远场空域目标位置、目标个数以及快拍数保持不变，信噪比为 0dB，阵元配置为 $M_x = M_y = 4$，$Q = 10 \sim 300$ 变化时，比较本文 RD-UCM-ESPRIT 算法与 RD-URD-ESPRIT 算法在不同数据快拍长度下的估计性能，仿真结果如图 5(a)所示；阵元数在 $M_x = M_y = 2 \sim 10$ 变化，比较本文 RD-UCM-ESPRIT 算法与 RD-URD-ESPRIT 算法在不同阵元配置下的估计性能，仿真结果如图 5(b)所示。由图 5 可得，随着阵元数 M_x，M_y 的增大，对应的阵列孔径也逐渐变大，因此两种算法的估计精度也越来越高；随着快拍数的积累，对信号子空间的估计也越来越准确，对应的估计性能也越来也好。

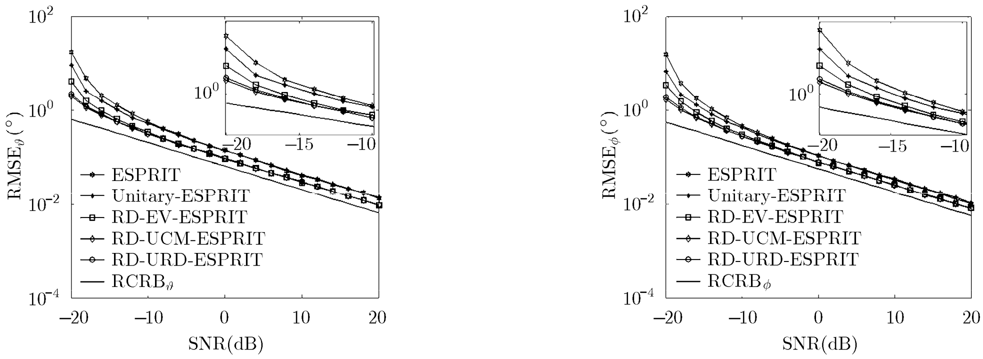


(a) RD-UCM-ESPRIT算法估计的星座图



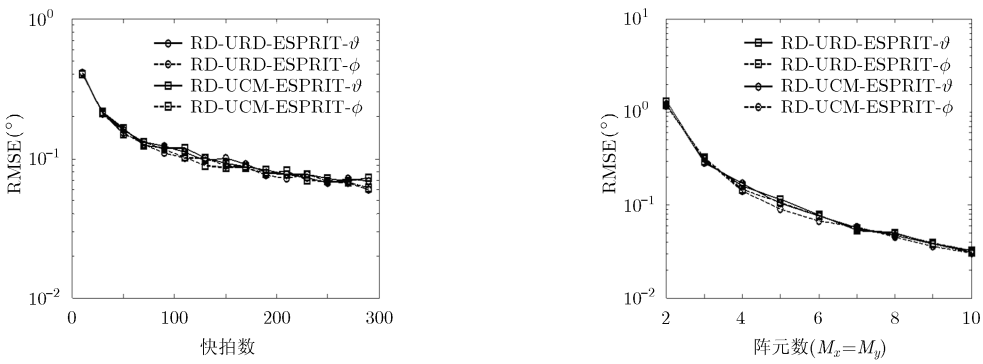
(b) RD-URD-ESPRIT算法估计的星座图

图 3 本文算法的估计结果



(a)空间角ϑ估计的RMSE随SNR的变化 (b)空间角ϕ估计的RMSE随SNR的变化

图 4 算法估计性能的比较



(a) 2维空间角估计的RMSE随快拍数的变化 (b) 2维空间角估计的RMSE随阵元数的变化

图 5 空间角估计结果与阵元数快拍数的关系

5 结论

针对十字型阵列配置下的单基地 MIMO 雷达 2 维空间角度估计问题，本文基于酉变换提出一种降维 DOA 估计算法。理论分析和实验仿真表明：(1)本文通过降维矩阵的设计及降维处理，将高维回波数据转换至低维信号空间，有效降低数据处理维数的同时，获得了较高的信噪比增益；(2)分析对比了两种矩阵 Centro-Hermite 化方法，并从理论上证明了两种方法在实信号子空间估计上的等价性，基于 ESPRIT 算法有效估计出目标 2 维空间角度的同时，实现了参数的自动配对；(3)与文献算法相比，本文算法通过降维处理及实数域信号子空间估计，在获取信噪比增益和快拍增益的同时，不损失阵列孔径，具有更低的运算复杂度，在低信噪比、低快拍数据长度下参数估计性能更优。值得注意的是，本文推导基于收、发阵列相同配置的单基地 MIMO 雷达，当收、发阵列不同(收、发阵列均满足中心对称性)时，本文算法思路同样适用。

参 考 文 献

[1] HULEIHEL W, TABRIKIAN J, and SHAVIT R. Optimal adaptive waveform design for cognitive MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(20): 5075–5089.

[2] WANG P, LI H B, and HIMED B. A parametric moving target detector for distributed MIMO radar in non-homogeneous environment[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(9): 2282–2294.

[3] TANG B, TANG J, ZHANG Y, *et al.* Maximum likelihood estimation of DOD and DOA for bistatic MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2013, 93(5): 1349–1357.

[4] ZHANG X, HUANG Y, CHEN C, *et al.* Reduced-complexity Capon for direction of arrival estimation in a monostatic multiple-input multiple-output radar[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2012, 6(8): 796–801.

[5] ZHANG X and XU D. Low-complexity ESPRIT-based DOA estimation for colocated MIMO radar using reduced-dimension transformation[J]. *Eletronics Letters*, 2011, 47(4): 283–284.

[6] 文才, 王彤. 单基地 MIMO 雷达降维酉 ESPRIT 算法[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(6): 1062–1067.

WEN C and WANG T. Reduced-dimensional unitary ESPRIT algorithm for monostatic MIMO radar[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(6): 1062–1067.

[7] ARASH K, ABOULNASR H, SERGIY A V, *et al*. Efficient transmit beamspace design for search-free based DOA estimation in MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(6): 1490–1500.

[8] HASSANIEN A and VOROBYOV S A. Transmit energy focusing for DOA estimation in MIMO radar with colocated antennas[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(6): 2669–2682.

[9] CHEN H W, LI X, JIANG W D, *et al*. MIMO radar sensitivity analysis of antenna position for direction finding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(10): 5201–5216.

[10] CHEN H W, ZHOU W, YANG J, *et al*. Manifold sensitivity analysis for MIMO radar[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2012, 9(5): 999–1003.

[11] CHEN H W, YANG J, ZHOU W, *et al*. Manifold studies on fundamental limits of direction finding multiple-input multiple-output radar systems[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2012, 6(8), 708–718.

[12] 王伟, 王晓萌, 李欣, 等. 基于 MUSIC 算法的 L 型阵列 MIMO 雷达降维 DOA 估计[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(8): 1954–1959. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01281.
WANG Wei, WANG Xiaomeng, LI Xin, *et al*. Reduced-dimensional DOA estimation based on MUSIC algorithm in MIMO radar with L-shaped array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(8):1954–1959. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01281.

[13] 蔡晶晶, 鲍丹, 李鹏, 等. 强约束优化降维 MUSIC 2 维 DOA 估计[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(5): 1113–1118. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01127.
CAI Jingjing, BAO Dan, LI Peng, *et al*. Two-dimensional DOA estimation using reduced-dimensional MUSIC algorithm with strong-constraint optimization[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(5): 1113–1118. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01127.

[14] LI J F and ZHANG X F. Unitary reduced-dimensional estimation of signal parameters via rotational invariance techniques for angle estimation in monostatic multiple-input-multiple-output radar with rectangular arrays [J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2014, 8(6): 575–584.

[15] ZHENG G M, CHEN B X, and YANG M L. Unitary ESPRIT algorithm for bistatic MIMO radar[J]. *Electronics Letters*, 2012, 48(3): 179–181.

[16] CHEN D F, CHEN B X, and GUO D Q. Angle estimation using ESPRIT in MIMO radar[J]. *Electronics Letters*, 2008, 44(12): 770–771.

[17] CHEN J L, GU H, and SU W M. Angle estimation using ESPRIT without pairing in MIMO radar[J]. *Electronics Letters*, 2008, 44(24): 1422–1423.

[18] REN S, MA X, YAN S, *et al*. 2-D unitary ESPRIT-like Direction-Of-Arrival (DOA) estimation for coherent signals with a uniform rectangular array[J]. *Sensors*, 2013, 13(4): 4272–4288.

梁　浩：　男，1987 年生，博士生，研究方向为阵列信号处理以及 MIMO 雷达信号处理.

崔　琛：　男，1962 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为雷达信号处理.

余　剑：　男，1980 年生，讲师，硕士，主要研究方向为雷达信号处理以及雷达对抗技术.