基于稀疏表示的不相关分布式信源参数估计算法

程增飞* 赵永波 水鹏朗 徐保庆
(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

摘 要：在分析不相关分布式信源(Incoherently Distributed Source, IDS)信号模型的基础上，该文给出一种基于稀疏表示的 IDS 参数估计方法。该方法利用 IDS 协方差矩阵的 Toeplitz 性质，结合 IDS 协方差矩阵的两点近似及 Jacobi-Anger 级数展开模型，分别采用两个 1 维稀疏表示问题对 IDS 的角度扩展及中心入射角度进行估计。同现有算法相比，该文方法不需要进行 2 维搜索，计算量较小。仿真结果表明，该文算法在低信噪比及小快拍情况下具有良好的参数估计性能。

关键词：信号处理；参数估计；稀疏表示；不相关分布式信源
中图分类号：TN911.7 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2015)12-2885-06
DOI: 10.11999/JEIT150340

Parameter Estimation Method of Incoherently Distributed Source via Sparse Representation

Cheng Zeng-fei Zhao Yong-bo Shui Peng-lang Xu Bao-qing
(*National Key Laboratory of Radar Signal Processing*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: By analyzing the signal model of the Incoherently Distribute Source (IDS), a sparse representation based parameter estimation method of IDS is presented. Through using the Toeplitz characteristic and the two point approximation model as well as the Jacobi-Anger expansion model of the covariance matrix of the IDS, the angle spread and the central direction angle of the IDS is estimated by adopting two sparse representation problems. Compared with the present method, the proposed method does not need two dimensional searches and has low computational burden. Simulation results show that the proposed method has good parameter estimation performance in the low signal-to-noise ratio and small snapshot number scenario.

Key words: Signal processing; Parameter estimation; Sparse representation; Incoherently Distributed Source (IDS)

1 引言

作为阵列信号处理的重要分支，波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计在雷达、声呐及无线通信等领域有着重要应用[1,2]。在入射信源为点信源的假设下，经典的 DOA 估计算法(MUSIC, ESPRIT 等)具有良好的 DOA 估计性能。但是，在移动无线通信、水下声呐及无源雷达等应用中，由于在信源及接收天线间不存在视距传播，阵列天线接收到的信号为多条多径散射信号的叠加，此时需要用分布式信源(Distributed Source, DS)模型对入射信源进行描述，DS 模型一般采用信号的中心入射角度和角度扩展来描述信号的波达方向。由于信号模型的失配，经典的 DOA 估计算法不能够对 DS 的波达方向进行有效估计[1]。

为了解决这一问题，20 世纪 90 年代以来，通过对 DS 进行建模，相关领域的学者从不同角度提出了多种有效的 DS 参数估计方法[2−11]。DS 可以视为多个散射特性满足一定统计规律的散射体的集合，根据散射体散射特性的不同，DS 可以分为相干分布式信源、不相关分布式信源(Incoherently Distributed Source, IDS)和部分相关分布式信源，本文主要研究 IDS 的参数估计问题。文献[3]和文献[4]提出了一种 DS 的参数化描述方法，并据此给出了一种基于广义 MUSIC 的 DS 参数估计算法(DISPARE)。在经典最大似然算法的基础上，文献[2]给出了 DS 参数估计的最大似然算法，并针对最大似然算法的运算量问题，提出了计算复杂度较低的加权子空间拟合算法。在经典的 DOA 估计算法中，Capon 算法具有重要地位，根据 IDS 的信号模型特点，文献[5]提出了基于广义 Capon 谱估计器的 IDS 参数估计算法。和经典的 DOA 估计算法相比，

收稿日期：2015-03-23；改回日期：2015-09-06；网络出版：2015-11-01
*通信作者：程增飞 zfcheng@stu.xidian.edu.cn
基金项目：中央高校基本科研业务费专项基金(K5051202047)
Foundation Item: The Fundamental Research Fund for the Central Universities of China (K5051202047)

上述算法都具有良好的IDS参数估计性能，但是，由于其在进行参数估计时需要进行2维或高维搜索，算法的计算复杂度不能满足实际系统的需要。为了降低算法运算量，文献[6]提出了一种分布式信源参数的解耦估计算法。利用信号协方差矩阵的非结构化模型，该算法首先对入射信源的角度扩展进行估计，然后基于估计出的角度扩展值对入射信源的中心入射角度进行计算。虽然该算法的运算量较2维搜索类算法的运算量低，但是其仅适用于单个入射信源的情况。针对上述算法的缺陷，文献[7]中提出了基于多项式求根的低复杂度IDS参数估计算法，如扩展求根MUSIC算法等。该类算法不仅计算复杂度大大降低，而且能够有效用于多入射信源情况，但是其参数估计性能存在较大损失。

随着稀疏表示理论的发展和完善，其在阵列信号处理领域中的应用越来越广泛[12−15]。本文结合IDS信源的模型特点，提出一种基于稀疏表示的IDS参数估计方法。该方法根据IDS采样协方差矩阵的Toeplitz性质，采用凸优化方法对IDS的采样协方差矩阵进行拟合；然后，基于IDS协方差矩阵的两点近似模型，采用稀疏表示的方法对IDS的角度扩展参数进行估计；利用估计出的角度扩展参数，在IDS的角度分布形式已知的基础上，采用IDS的Jacobi-Anger级数展开模型构建稀疏基矩阵，并据此估计出IDS的中心入射角度。本文算法的运算量较搜索类算法低，在低信噪比和小快拍条件下具有良好的参数估计性能。

2 信号模型

考虑K个不相关分布式信源$s(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})$，$k=1,2,\cdots,K$，入射到由$N$个阵元构成的等距线阵列(Uniform linear array, ULA)上，则接收信号可表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{K}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\boldsymbol{a}(\theta)s(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})\mathrm{d}\theta+\boldsymbol{n} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{a}(\theta)=[1,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\varDelta\sin\theta},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(N-1)\varDelta\sin\theta}]^{\mathrm{T}}$为$\theta$方向上的导向矢量，$\varDelta$表示以波长为单位的阵元间距，$s(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})$表示第$k$个信源的角信号密度函数，$\theta_k$和$\sigma_{\theta_k}$分别表示第$k$个信源的中心入射角度和角度扩展，$\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{C}^{N\times1}$为复高斯白噪声矢量，由分布式信源相互独立可得接收信号协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=E(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}})\\&=\sum_{k=1}^{K}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\boldsymbol{a}(\theta)p(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathrm{d}\theta+\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta})\\&=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{R}_k+\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{R}_s+\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta})\end{aligned} \tag{2}$$

其中$p(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})=E[s(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})s^*(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})]$为第$k$个信源的角自相关核函数，$\boldsymbol{R}_s=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{R}_k$，$\boldsymbol{R}_k$表示第$k$个信源的协方差矩阵，$\boldsymbol{\eta}=[\eta_1,\cdots,\eta_n,\cdots,\eta_N]^{\mathrm{T}}$，$\eta_n$表示第$n$个阵元上的噪声功率。

当角自相关核函数$p(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})$为单峰对称函数且IDS的角度扩展较小时，记$\omega_k=2\pi\varDelta\sin(\theta_k)$为对应角度$\theta_k$方向上的空间频率，$\sigma_{\omega_k}=2\pi\varDelta\cos(\theta_k)\sigma_{\theta_k}$，$\boldsymbol{R}_k$可近似表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_k&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\boldsymbol{a}(\theta)p(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathrm{d}\theta\\&\approx\lambda_k\Big[\boldsymbol{b}(\omega_k-\sigma_{\omega_k})\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\omega_k-\sigma_{\omega_k})\\&\quad+\boldsymbol{b}(\omega_k+\sigma_{\omega_k})\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\omega_k+\sigma_{\omega_k})\Big]\Big/2\\&=\lambda_k\boldsymbol{B}(\omega_k,\sigma_{\omega_k})\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}(\omega_k,\sigma_{\omega_k})\Big/2\end{aligned} \tag{3}$$

其中λ_k表示第k个信源的能量，$\boldsymbol{B}(\omega_k,\sigma_{\omega_k})=[\boldsymbol{b}(\omega_k-\sigma_{\omega_k}),\boldsymbol{b}(\omega_k+\sigma_{\omega_k})]$，$\boldsymbol{b}(\omega_k-\sigma_{\omega_k})=\Big[1,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_k-\sigma_{\omega_k})},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(N-1)(\omega_k-\sigma_{\omega_k})}\Big]^{\mathrm{T}}$。式(3)表明矩阵$\boldsymbol{R}_k$的秩近似等于2，称为IDS协方差矩阵的两点近似模型[2]，其表明在分布式信源角度扩展不是很大时，一个IDS的协方差矩阵可由两个理想点信源的协方差矩阵近似表示。

式(3)是在小角度扩展时对IDS协方差矩阵的近似表示，利用Jacobi-Anger级数可以得到IDS协方差矩阵的精确表达式[2]。记$\boldsymbol{R}_k(m,n)$表示矩阵$\boldsymbol{R}_k$的第m行第n列元素，可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_k(m,n)\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}p(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})\exp\big[\mathrm{j}2\pi(m-n)\varDelta\sin(\theta)\big]\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{4}$$

又根据Jocabi-Anger级数展开式，式(4)可展开为

$$\boldsymbol{R}_k(m,n)=J_0(z)+\sum_{g=1}^{\infty}\alpha_gJ_g(z) \tag{5}$$

其中，$z=2\pi(m-n)\varDelta$，当g为偶数时$\alpha_g=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}p(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})\cos(2g\theta)\mathrm{d}\theta$，当$g$为奇数时$\alpha_g=2\mathrm{j}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}p(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})\ \sin[(2g-1)\theta]\mathrm{d}\theta$，$J_g(\bullet)$表示$g$阶第1类Bessel函数，式(5)称为IDS协方差矩阵的Jacobi-Anger级数展开模型。

3 本文算法

由接收阵列为均匀线阵，容易证明矩阵$\boldsymbol{R}_k$为Toeplitz矩阵，因此，由有限个Toeplitz矩阵的和仍为Toeplitz矩阵可知，矩阵$\boldsymbol{R}_s$也是Toeplitz矩阵。基于矩阵$\boldsymbol{R}_s$的Toeplitz性质，为了降低噪声对参数估计性能的影响，下面首先采用凸优化方法对协方

差矩阵 $\boldsymbol{R}$ 进行拟合，然后采用稀疏表示方法对分布式信源参数进行估计。

3.1 协方差矩阵拟合

在实际应用中，协方差矩阵 $\boldsymbol{R}$ 一般由有限次快拍估计得到，即 $\widehat{\boldsymbol{R}}=1/Q\sum_{q=1}^{Q}\boldsymbol{x}(q)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(q)$，其中 Q 表示快拍个数，当矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{R}}$ 都可逆，即 $Q\ge N$ 时，考虑式(6)所示的协方差矩阵拟合准则：

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{R}}\ \left\|\boldsymbol{R}^{-1/2}(\widehat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{R})\widehat{\boldsymbol{R}}^{-1/2}\right\|_F^2\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{R}\succeq 0\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

用 $\boldsymbol{r}_s$ 表示矩阵 $\boldsymbol{R}_s$ 的第 1 列，则上述准则可等价转化为式(7)所示的凸优化问题[16]：

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{r}_s,\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta})\succeq 0}\quad \boldsymbol{X}+\mathrm{tr}(\widehat{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R})\\&\text{s.t.}\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \widehat{\boldsymbol{R}}^{1/2} & \\ \widehat{\boldsymbol{R}}^{1/2} & \boldsymbol{R} & \\ & & \mathrm{Toep}(\boldsymbol{r}_s)\end{bmatrix}\succeq 0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其中 Toep(•) 表示 Toeplitz 操作，则由式(7)得到 $\boldsymbol{r}_s$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{r}}_s$ 后，可由 $\hat{\boldsymbol{r}}_s$ 唯一确定出 $\boldsymbol{R}_s$ 的拟合值 $\widehat{\boldsymbol{R}}_s$。需要说明的是，由于优化问题式(7)为一半定规划问题[16]，因此由式(7)可以得到唯一的 $\hat{\boldsymbol{r}}_s$。基于拟合出的信号协方差矩阵 $\widehat{\boldsymbol{R}}_s$ 及其 Toeplitz 性质，下面首先采用稀疏表示的方法对 IDS 的角度扩展进行估计。

3.2 IDS 角度扩展估计

根据 IDS 协方差矩阵的两点近似模型，由 $\boldsymbol{R}_s=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{R}_k$，则 $\boldsymbol{R}_s$ 可近似表示为

$$\boldsymbol{R}_s\approx\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma})\tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma}_\omega)=[\boldsymbol{B}(\omega_1,\sigma_{\omega_1}),\boldsymbol{B}(\omega_2,\sigma_{\omega_2}),\cdots,\boldsymbol{B}(\omega_K,\sigma_{\omega_K})]\in\boldsymbol{C}^{N\times 2K}$，$\boldsymbol{\omega}=[\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_K]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\sigma}_\omega=[\sigma_{\omega_1},\sigma_{\omega_2},\cdots,\sigma_{\omega_K}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1/2,\lambda_1/2,\cdots,\lambda_k/2,\lambda_k/2,\cdots,\lambda_K/2,\lambda_K/2)\in\boldsymbol{C}^{2K\times 2K}$。由式(8)可知，$\hat{\boldsymbol{r}}_s$ 可近似表示为

$$\hat{\boldsymbol{r}}_s\approx\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma}_\omega)\boldsymbol{\kappa}\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{\kappa}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda})=[\lambda_1/2,\lambda_1/2,\cdots,\lambda_k/2,\lambda_k/2,\cdots,\lambda_K/2,\lambda_K/2]^{\mathrm{T}}$。又根据 $\omega_k\pm\sigma_{\omega_k}\in[-\pi/2,\pi/2]$，则由此构造过完备基矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_1=[\boldsymbol{b}(\gamma_1),\cdots,\boldsymbol{b}(\gamma_l),\cdots,\boldsymbol{b}(\gamma_L)]$，其中 $\gamma_l\in[-\pi/2,\pi/2]$，$l=1,2,\cdots,L$，利用过完备基矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_1$，对 $\hat{\boldsymbol{r}}_s$ 进行稀疏表示可得

$$\hat{\boldsymbol{r}}_s=\widetilde{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u}+\boldsymbol{e}_1\tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$ 为拟合和稀疏表示误差，$\boldsymbol{u}=[u_1,\cdots,u_l,\cdots,u_L]^{\mathrm{T}}$，且当 $\gamma_l=\omega_k\pm\sigma_{\omega_k}$ 时，$u_l=\lambda_k/2$，否则 $u_l=0$。求解式(10)，由向量 $\boldsymbol{u}$ 中非零元素的位置可以得到 $\omega_k\pm\sigma_{\omega_k}$ 的估计值，根据 $\omega_k\pm\sigma_{\omega_k}$ 的估计值，可计算出分布式信源的角度扩展值 $\hat{\sigma}_{\theta_k}$。需要说明的是，根据 $\omega_k\pm\sigma_{\omega_k}$ 的估计值也可以估计出 IDS 的中心入射角度，但是，仿真实验发现根据这种方法对中心入射角度的估计精度很差。下面结合 IDS 协方差矩阵的 Jocabi-Anger 级数展开近似模型，在估计出的角度扩展的基础上，给出一种基于稀疏表示的 IDS 中心入射角度的估计算法。

3.3 IDS 中心入射角度估计

虽然通过 Jocabi-Anger 级数展开可以得到 IDS 协方差矩阵的精确表达式，在实际应用中，一般用有限阶 Jocabi-Anger 级数展开式对 IDS 的协方差矩阵进行近似。若记 Jocabi-Anger 级数展开阶数为 G，则 $\boldsymbol{R}_k(m,n)$ 可近似表示为

$$\boldsymbol{R}_k(m,n)\approx\boldsymbol{J}_{mn}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}(\theta_k,\sigma_{\theta_k})\tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{J}_{mn}=[J_0(z),J_1(z),\cdots,J_G(z)]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{w}(\theta_k,\sigma_{\theta_k})=[1,\alpha_1,\cdots,\alpha_G]^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{R}_k$ 的第 1 列元素 $\boldsymbol{r}_k$ 可写为

$$\boldsymbol{r}_k\approx\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}(\theta_k,\sigma_{\theta_k})\tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{J}=[\boldsymbol{J}_{11},\boldsymbol{J}_{21},\cdots,\boldsymbol{J}_{N1}]$。利用角度扩展的估计值 $\hat{\sigma}_{\theta_k}$，在角自相关核函数 $p(\theta,\theta_k,\sigma_{\theta_k})$ 形式已知时，构建稀疏基矩阵 $\boldsymbol{W}$：

$$\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_K]\tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{W}_k=[\boldsymbol{w}(\beta_1,\hat{\sigma}_{\theta_k}),\cdots,\boldsymbol{w}(\beta_h,\hat{\sigma}_{\theta_k}),\cdots,\boldsymbol{w}(\beta_H,\hat{\sigma}_{\theta_k})]$，$\{\beta_1,\cdots,\beta_h,\cdots,\beta_H\}$ 为在感兴趣的空域范围内等间隔划分的角度网格。又由 $\boldsymbol{r}_s=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{r}_k$，根据式(12)对 $\hat{\boldsymbol{r}}_s$ 稀疏表示可得

$$\hat{\boldsymbol{r}}_s=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}_2=\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}_2\tag{14}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_2=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_K]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_k=[v_{k1},\cdots,v_{kh},\cdots,v_{kH}]^{\mathrm{T}}$，当角度扩展值匹配且 $\beta_h=\theta_k$ 时，$v_{kh}\neq 0$，否则 $v_{kh}=0$，$\boldsymbol{e}_2$ 为稀疏表示误差项。求解稀疏表示问题得到向量 $\boldsymbol{v}$ 后，根据 $\boldsymbol{v}$ 中非零元素的位置，即可得到 IDS 的中心到达角度值 $\hat{\theta}_k$。

3.4 稀疏表示问题的求解

对于式(10)和式(14)中的稀疏表示问题，可以采用多种方法进行求解，本文采用循环加权最小二乘(Iteratively Reweighted Least Square, IRLS)算法对其进行求解[17,18]。由于式(10)和式(14)的形式完全一样，为方便起见，用式(15)对其进行统一表示。

$$\hat{\boldsymbol{r}}_s=\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{e}\tag{15}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 表示 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_1$ 或 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_2$，$\boldsymbol{t}$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 或 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{e}$ 表示 $\boldsymbol{e}_1$ 或 $\boldsymbol{e}_2$。压缩感知理论表明[19]，稀疏表示问题的解可以通过求解式(16)得到

$$\min_{\boldsymbol{t}}\ \|\boldsymbol{t}\|_p^p,\quad \text{s.t.}\ \left\|\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{t}-\hat{\boldsymbol{r}}_s\right\|_2=\|\boldsymbol{e}\|_2\le\varepsilon\tag{16}$$

其中 $0\le p<1$ 为范数约束值，ε 表示允许的稀疏表示误差。由于 $0\le p<1$，上述优化问题的目标函数为非凸的，导致式(16)不存在闭合形式的最优解。IRLS 算法通过在每一次迭代过程中求解一个加权形式的最小二乘问题来对上述非凸问题进行求解，

由于加权最小二乘问题具有闭合形式的最优解，因此，该算法在每次循环过程中都能够得到最优形式的闭合解，运算量较小。具体而言，若设 IRLS 算法在第 i 次循环中得到的最优解矢量为 $\boldsymbol{t}_i$，则在第 $i+1$ 次循环过程中 IRLS 算法需求解式(17)所示的无约束优化问题：

$$\boldsymbol{t}_{i+1}=\arg\min_{\boldsymbol{t}}\ \left\|\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{t}-\hat{\boldsymbol{r}}_s\right\|_2^2+\mu_{i+1}\left\|\boldsymbol{\gamma}_{i+1}\odot\boldsymbol{t}\right\|_2^2 \tag{17}$$

其中 μ_{i+1} 是第 $i+1$ 次循环中的正则化参数，$\boldsymbol{\gamma}_{i+1}=\left|\boldsymbol{t}_i\right|^{p/2-1}$ 为第 $i+1$ 次循环中的加权矢量，$\odot$ 表示 Hadamard 积。由此，得到基于稀疏表示的 IDS 参数估计算法步骤如下所述：

步骤 1 由阵列接收数据估计采样协方差矩阵 $\widehat{\boldsymbol{R}}$，并利用式(7)对 $\widehat{\boldsymbol{R}}$ 进行拟合，得到向量 $\hat{\boldsymbol{r}}_s$；

步骤 2 由阵列天线结构构建过完备基矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_1$；

步骤 3 设定正则化参数 $\lambda_0=\lambda_{\mathrm{spread}}$，初始解向量 $\boldsymbol{u}_0=(\widetilde{\boldsymbol{B}}_1\widetilde{\boldsymbol{B}}_1^{\mathrm{H}})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{B}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_s$，范数约束值 $p=0.8$，采用 IRLS 算法对式(10)进行求解，得到向量 $\boldsymbol{u}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{u}}$，并由其峰值位置确定出角度扩展的估计值 $\hat{\sigma}_{\theta_k}$，$k=1,2,\cdots,K$；

步骤 4 由 $\hat{\sigma}_{\theta_k},k=1,2,\cdots,K$，根据式(13)构建稀疏基矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_2$；

步骤 5 设定正则化参数 $\lambda_0=\lambda_{\mathrm{central}}$，初始解向量 $\boldsymbol{u}_0=(\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\widetilde{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{H}})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\hat{\boldsymbol{r}}_s$，范数约束值 $p=0.8$，采用 IRLS 算法对式(14)进行求解，得到向量 $\boldsymbol{v}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{v}}$，并由其峰值位置确定出中心角度 $\hat{\theta}_k,k=1,2,\cdots,K$。

在算法运算量方面，本文算法的运算量主要集中在采用式(7)对协方差矩阵的拟合及采用 RILS 算法对式(10)和式(14)的求解。对于式(7)中的凸优化问题，采用内点法对其进行求解时，其运算量为 $O(N^{6.5})$，而采用 IRLS 算法对(10)和式(14)进行求解时，若记算法循环迭代总次数为 I，其运算量为 $O(ILN^2+IHKN^2+N^3)$，因此本文算法的运算量为 $O(ILN^2+IHKN^2+N^{6.5})$。而对于 DISPARE 和广义 Capon 算法，若在进行 2 维搜索时，其在角度扩展及中心入射角度维划分的网格点数分别为 H 和 L，则两算法的计算复杂度分别为 $O(HLKN^2+N^3)$ 和 $O(HLN^3)$。由于一般情况下网格点数 H 和 L 远远大于阵元数 N、信源数 K 及迭代次数 I，因此，本文算法的计算量较 DISPARE 和广义 Capon 算法小。

4 计算机仿真

本节对上述基于稀疏表示的 IDS 参数估计算法进行分析，以验证算法的有效性。为了对比分析本文算法的性能，同时对 DISPARE 算法、广义 Capon 算法及扩展求根 MUSIC 算法进行了计算机仿真。实验中，设定阵列天线为由 $N=10$ 个阵元构成的 ULA，且 $\varDelta=0.5$，IDS 的角自相关核函数为高斯型函数，Jocabi-Anger 级数展开阶数 $G=30$，分别对各算法性能随接收信号信噪比、快拍数及 IDS 角度扩展的变化情况进行分析。

仿真 1 矩阵拟合对采样协方差矩阵的影响

为降低噪声对参数估计性能的影响，本文方法在进行参数估计前，首先对采样协方差矩阵进行了拟合处理，本实验就拟合处理对采样协方差矩阵的影响进行仿真分析。仿真中通过计算原始采样协方差矩阵 $\widehat{\boldsymbol{R}}$ 及拟合得到的信号协方差矩阵 $\widehat{\boldsymbol{R}}_s$ 同真实信号协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_s$ 间差值的 Frobemius 范数来说明拟合的必要性。设定采样快拍数为 100，单个 IDS 的中心入射角度 $\theta=0^\circ$，角度扩展 $\sigma_\theta=4^\circ$，接收信号信噪比由-5 dB 变化到 25 dB，在每一接收信噪比独立进行 300 次实验，得到 $\widehat{\boldsymbol{R}}$ 及 $\widehat{\boldsymbol{R}}_s$ 同 $\boldsymbol{R}_s$ 间差值的 Frobemius 范数随信噪比的变化如图 1 所示。

分析图 1 可知，在不同信噪比下，$\widehat{\boldsymbol{R}}_s$ 同 $\boldsymbol{R}_s$ 间差值的 Frobemius 范数一直小于 $\widehat{\boldsymbol{R}}$ 同 $\boldsymbol{R}_s$ 间差值的 Frobemius 范数，这说明拟合过程降低了噪声对信号协方差矩阵的影响，能够提高参数估计精度。

仿真 2 算法性能随接收信号信噪比的变化情况

本实验中设定采样快拍数为 100，单个 IDS 的中心入射角度 $\theta=0^\circ$，角度扩展 $\sigma_\theta=4^\circ$，接收信号信噪比由-5 dB 变化到 25 dB，正则化参数初始值 $\lambda_{\mathrm{spread}}$ 和 $\lambda_{\mathrm{central}}$ 分别为 0.1 和 0.2，在每一接收信号信噪比独立进行 300 次实验，得到 IDS 的中心入射角度及角度扩展的测量均方根误差随接收信号信噪比的变化情况如图 2 所示。

由图 2 可知，随信噪比的增大，各算法的参数估计性能逐渐提高，且本文算法具有较好的性能。在信噪比较低时，求根类算法不能够对 IDS 的参数

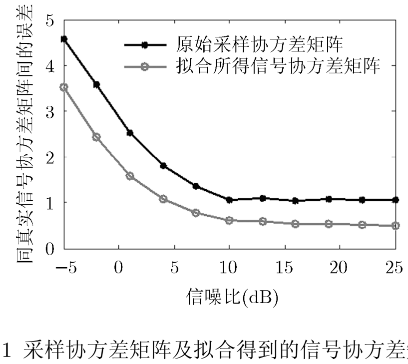
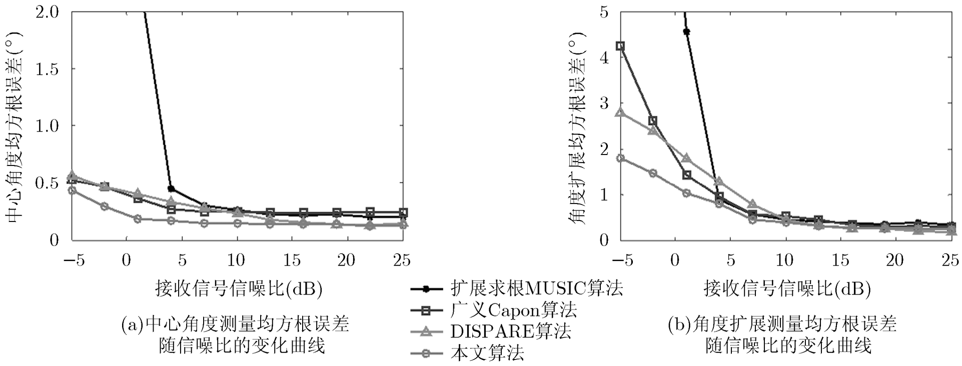


图 1 采样协方差矩阵及拟合得到的信号协方差矩阵同真实信号协方差矩阵间的差值随信噪比的变化



(a)中心角度测量均方根误差随信噪比的变化曲线　(b)角度扩展测量均方根误差随信噪比的变化曲线

图 2 各算法性能随接收信号信噪比的变化曲线

进行有效测量，DISPARE 算法和广义 Capon 算法具有较扩展求根 MUSIC 算法更好的性能，但略逊于本文算法。

仿真 3　算法性能随快拍数的变化情况

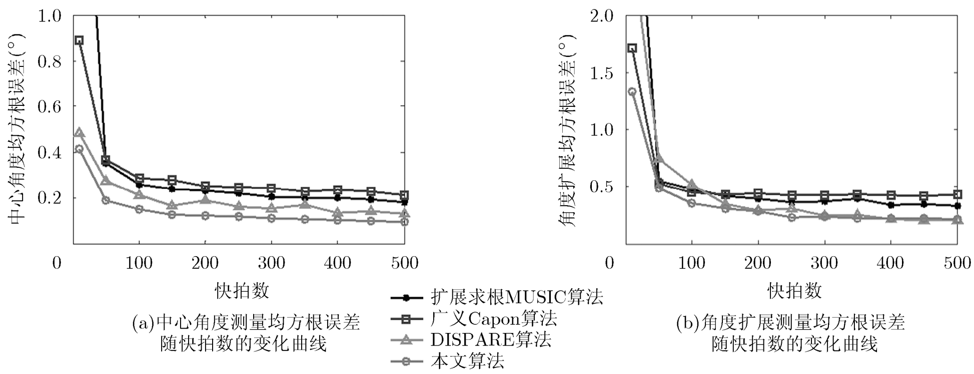
本实验中设定接收信号信噪比为 10 dB，快拍数由 10 变化到 500，其它参数同仿真 1 中相同，在每一快拍数下进行 300 次独立实验，得到 IDS 的中心入射角度及角度扩展的测量均方根误差随快拍数的变化情况分别如图 3(a)和图 3(b)所示。

分析图 3 可知，虽然各算法的性能随快拍数的增大逐渐提高，但是在快拍数大于 200 后，随着快拍数的增加，算法性能受快拍数的影响不再明显，同时，本文算法对中心角度的估计性能明显优于现有算法。

仿真 4　算法性能随角度扩展的变化情况

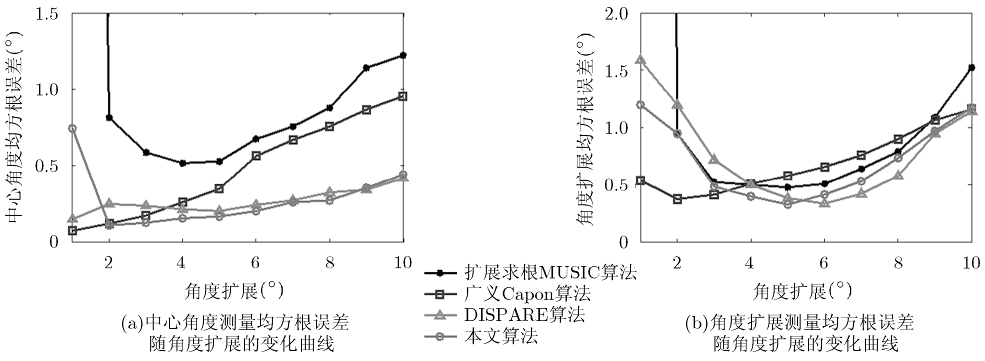
本实验中设定接收信号信噪比为 10 dB，快拍数由 100，单个 IDS 的中心入射角度 $\theta = 0^\circ$，角度扩展 σ_θ 由 1° 变化到 10°，其它参数同仿真 1 中相同，在每一角度扩展值下进行 300 次独立实验，得到 IDS 的中心入射角度及角度扩展的测量均方根误差随分布式信源角度扩展的变化情况分别如图 4 (a)和图 4(b)所示。

由图 4 可知，扩展求根 MUSIC 及本文算法对中心入射角度的估计性能随角度扩展的增加并不是



(a)中心角度测量均方根误差随快拍数的变化曲线　(b)角度扩展测量均方根误差随快拍数的变化曲线

图 3 各算法性能随快拍数的变化曲线



(a)中心角度测量均方根误差随角度扩展的变化曲线　(b)角度扩展测量均方根误差随角度扩展的变化曲线

图 4 各算法性能随角度扩展的变化曲线

单调变化的，其原因在于扩展求根 MUSIC 及本文算法对中心角度的测量是基于 IDS 协方差矩阵的两点近似模型的，当入射信号的角度扩展很小时，算法不能够有效测量出两个近似点信源的入射角度值，导致算法性能下降。

5 结论

利用不相关分布式信源协方差矩阵的性质，本文给出了一种基于稀疏表示的不相关分布式信源参数估计方法。该方法将 IDS 的 2 维参数估计问题转化为了两个 1 维稀疏表示问题，因此该算法的计算复杂度较 2 维搜索类算法低；同时，所提算法在进行参数估计前首先根据 IDS 协方差矩阵的特点，对采样协方差矩阵进行了拟合，这能够有效降低噪声对算法性能的影响，提高算法的参数估计性能。

参 考 文 献

[1] Jantti T P. The influence of extended sources on the theoretical performance of the MUSIC and ESPRIT methods: Narrow-band sources[C]. Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing 1992, San Francisco, 1992: 429–432.

[2] Trump T and Ottersten B. Estimation of nominal direction of arrival and angular spread using an array of sensors[J]. *Signal Processing*, 1996, 50(2): 57–69

[3] Valaee S, Champagne B, and Kabal P. Parametric location of distribute source[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(9): 2144–2153.

[4] Meng Y, Stoica P, and Wong K M. Estimation of the direction of arrival of spatially dispersed signals in array processing[J]. *IEE Proceedings-Radar, Sonar, and Navigation*, 1996, 143(1): 1–9.

[5] Hassanien A, Shahbazpanshi S, and Gershman A B. A generalized Capon estimator for localization of multiple spread sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(1): 280–283.

[6] Besson O and Stoica P. Decoupled estimation of DOA and angular spread for a spatially distributed source[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(8): 2185–2194.

[7] Bengtsson M and Ottersten B. Low-complexity estimator for distributed sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(7): 1872–1882.

[8] 韩英华, 汪晋宽, 宋昕. 相干分布式信源二维波达方向估计算法[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(2): 323–326.
Han Ying-hua, Wang Jin-kuan, and Song Xin. 2D DOA estimation algorithm for coherently distributed source[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(2): 323–326.

[9] 杨学敏, 李广军, 郑植. 基于稀疏表示的相干分布式非圆信号的参数估计[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(1): 164–168.
Yang Xue-min, Li Guang-jun, and Zheng Zhi. Parameter estimation of coherently distributed non-circular signal based on sparse representation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(1): 164–168.

[10] Han K Y and Nehorai A. Distributed source processing with nested linear array[C]. IEEE 8th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, Coruna, 2014: 521–524.

[11] Yang X M, Li G J, Zhang Z, *et al*.. Low-complexity 2D central angle estimation of coherently distributed sources with cross-correlation matrix[J]. *Electronics Letters*, 2014, 50(16): 1118–1120.

[12] Candes E J and Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. *IEEE Signal Processing Maganize*, 2008, 25: 21–30.

[13] Zheng J and Kaveh M. Sparse spatial spectral estimation: a covariance fitting algorithm, performance and regulation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(11): 2767–2777.

[14] Wang J, Sheng W X, Han Y B, *et al*.. Adaptive beamforming with compressed sensoring for sparse receiving array[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, 50(2): 823–833.

[15] Zhao T, Eldar Y C, and Nehorai A. Direction of arrival estimation using co-prime arrays: a super resolution viewpoint[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(21): 5565–5576.

[16] Yang Z, Xie L H, and Zhang C S. A discretization-free sparse and parametric approach for linear array processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(19): 4959–4973.

[17] David W and Srikantan N. Iterative reweighted ℓ_1 and ℓ_2 methods for finding sparse solutions[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 317–329.

[18] Ba D, Babadi B, Purdon P L, *et al*.. Convergence and stability of iteratively re-weighted least squares algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(1): 183–195.

[19] Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(10): 707–710.

程增飞： 男，1990 年生，博士生，研究方向为阵列信号处理、压缩感知理论在雷达系统中的应用.

赵永波： 男，1972 年生，教授，博士生导师，研究方向为阵列信号处理、MIMO 雷达波形设计及波达方向估计.

水鹏朗： 男，1967 年生，教授，博士生导师，研究方向为小波理论及其应用、图像处理及超宽带雷达信号处理.