第 37 卷第 12 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.37 No.12
2015 年 12 月 Journal of Electronics & Information Technology Dec. 2015

基于高度冗余 Gabor 框架的欠 Nyquist 采样系统子空间探测

陈 鹏* 孟 晨 王 成
(军械工程学院导弹工程系 石家庄 050003)

摘 要：基于指数再生窗 Gabor 框架的欠 Nyquist 采样系统对窄脉冲信号完成采样与重构一般情况下效果较好，但是当框架高度冗余时，使用传统面向系数域的方法对信号进行子空间探测会面临失败或较大误差。该文采用面向信号域的思想，构建了分块的对偶 Gabor 字典，并对信号分块稀疏表示；根据信号的分块表示推导了采样系统的测量矩阵，提出了测量矩阵受字典相干性约束的分块 ε -相干性；将信号合成模型引入多观测向量问题，提出基于分块 ε -闭包的同步正交匹配追踪算法($\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$)，用于信号子空间探测。此外还证明了算法的收敛约束条件。仿真结果表明，所提子空间探测方法相比传统方法提高了信号重构成功率，降低了采样通道数，并增强了系统鲁棒性。

关键词：信号处理；Gabor 字典；相干性；欠采样；子空间
中图分类号：TN911.72 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2015)12-2877-08
DOI: 10.11999/JEIT150327

Subspace Detection of Sub-Nyquist Sampling System Based on Highly Redundant Gabor Frames

Chen Peng Meng Chen Wang Cheng
(*Department of Missile Engineering*, *Mechanical Engineering College*, *Shijiazhuang* 050003, *China*)

Abstract: The sampling system based on Gabor frames with exponential reproducing windows holds nice performance for short pulses in general cases, but when the frames are highly redundant, the traditional coefficient oriented methods for subspace detection may fail or have large error. Firstly, the signal oriented idea is introduced and the blocked dual Gabor dictionaries are constructed, finishing the block sparse representation. By introducing the blocked dictionaries, the measurement matrix is constructed and the block ε -coherence restricted by the coherence of the dictionaries is proposed. Consequently, the synthesis model for signal representation is introduced to subspace detection based on Multiple Measurement Vector problem and the Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit is proposed based on blocked ε -closure($\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$), using for subspace detection. Additionally, the convergence of the algorithm is proved. At last, simulation experiments prove that the new method improves the recovery rate, decreases the channel numbers and enforces the robustness of the sampling system compared with the traditional methods.

Key words: Signal processing; Gabor dictionaries; Coherence; Sub-Nyquist sampling; Subspace

1 引言

基于压缩感知(Compressed Sensing, CS)理论的欠 Nyquist 采样技术作为近年来国内外研究的热点，在核磁共振[1,2]、频谱感知[3]、雷达[4,5]及通信[6]领域需求广泛。目前，窄脉冲信号欠 Nyquist 采样方法主要有两类。第 1 类是有限新息率(Finite Rate of Innovation, FRI)信号采样[7,8]，应用于脉冲波形已知、脉冲个数、幅度和延迟未知的脉冲串信号。第 2 类是基于 Gabor 框架的采样方法[9]，应用于波形未知、脉宽和脉冲个数上限已知脉冲串信号。后者不需要预先知道脉冲波形，在现实中应用更加广泛。其基本思想是，利用采样系统对信号进行 Gabor 变换和压缩采样，再通过子空间探测获取 Gabor 系数，根据信号在 Gabor 框架中的稀疏表示恢复出原始信号。文献[10]将指数再生窗引入采样系统，使系统中时域加窗和积分环节简化为指数滤波器，不仅易于物理实现，还利用框架的高度冗余特性大大增强了采样系统的鲁棒性。

在 Hilbert 空间中，用于信号稀疏表示的基或原子可以张成一个信号子空间，同种类型的信号属于这些子空间的联合(Union of Subspace, UoS)。一个

收稿日期：2015-03-20；改回日期：2015-08-24；网络出版：2015-11-01
*通信作者：陈鹏 beimingke@163.com
基金项目：国家自然科学基金(61372039)
Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61372039)

具体信号的子空间探测，就是根据测量信息找到 UoS 中对应的子空间并求出信号的稀疏表示[11]。传统的基于合成模型方法都是面向系数域的方法，即从测量结果中直接重构出信号稀疏表示的系数，再利用信号空间中的稀疏基对信号完成合成，只适用于信号子空间正交或冗余度较低的情况。而近年来新出现的基于分析模型[12]方法利用面向信号域重构的思想，已经可以处理高冗余或高度线性相关的子空间探测的问题。

面向信号域重构时，需要根据信号字典空间的约束等距特性(Restricted Isometry Property, RIP)或相干性对重构获得的系数支撑集进行修正，从而探测出最准确的信号空间。根据分析模型中的思想，本文将引入一种新的相干性定义[13]用于基于多观测向量问题(Multiple Measurement Vector, MMV)的子空间探测，提出了分块 ε -相干性，克服了面向系数域重构方法对子空间冗余度的要求。在解决 MMV 问题时，面向系数域重构常用到的算法有同步正交匹配追踪(Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit, SOMP)、同步压缩采样匹配追踪(Simultaneous Compressive Sampling Matching Pursuit, SCoSaMP)、同步迭代硬阈值(Simultaneous Iterative Hard Thresholding, SIHT)等[14]，它们在字典高度冗余时可能因信号稀疏表示的不唯一导致重大重构误差，或因字典 RIP 较差使算法无法执行，而面向信号域的方法将克服这些问题。

在信号子空间探测的过程中，本文将解决信号稀疏表示和子空间探测两个问题。首先，构建了 Gabor 框架对应的字典和测量矩阵，并对基于合成模型的测量矩阵相干性进行分析。针对采样系统子空间探测需要解决的 MMV 问题，对字典进行分块，完成信号块稀疏表示。其次，将信号稀疏表示融合到基于合成模型的 CS 联合稀疏重构算法中，对面向系数域重构方法中的典型算法 SOMP 进行改进，提出基于 ε -闭包的合成模型的 SOMP 算法($\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$)，完成子空间探测和信号重构。仿真结果表明，本文方法可以提高信号重构成功率，并进一步压缩采样系统的通道数，同时保证采样系统具有较好的鲁棒性。

2 基于指数再生窗 Gabor 框架的采样系统

2.1 信号模型

定义有限长度的连续时间多脉冲信号 $x(t)$ ，$t\in[0,T]$ 。单个脉冲最大宽度为 W ，脉冲最大个数为 N_p ，脉冲波形及延迟未知且可重叠。根据测不准原理，此类信号不能保证带限，但为便于研究，将信号定义为 ϵ_Ω -带限信号。定义本质带宽 $F=[-\Omega/2,\Omega/2]$， F^c 表示 F 以外的频带，存在 $\epsilon_\Omega<1$ 和，使得

$$\int_{F^c}\left|\hat{x}(if)\right|^2\mathrm{d}f\le\epsilon_\Omega\left\|x(t)\right\|_2^2 \tag{1}$$

2.2 基于指数再生窗的 Gabor 框架采样系统

定义 1[15] 对于任意 $x(t),g(t)\in L_2(\mathbb{R})$，定义调制算子 M_f 和位移算子 T_τ ，满足 $M_f x(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ft}x(t)$ ，$T_\tau x(t)=x(t-\tau)$ 。存在常数 $0<\mathrm{A}\le\mathrm{B}<\infty$ ，使得函数集合 $G(g,a,b)=\left\{M_{bl}T_{ak}g(t);k,l\in\mathbb{Z}\right\}$ 满足

$$\mathrm{A}\left\|x\right\|^2\le\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle x,M_{ak}T_{bl}g\right\rangle\right|^2\le\mathrm{B}\left\|x\right\|^2 \tag{2}$$

则 $G(g,a,b)$ 为 Gabor 框架， A 和 B 定义为框架界。框架中，时频采样单元为时间长度 a 和频率长度 b 构成的栅格，计为 (a,b) 。框架的冗余度 $\mu=ab$ ，根据 Balian-Law 定理，$\mu\in(0,1)$ 。存在对偶窗 $\gamma(t)\in L_2(\mathbb{R})$，$x(t)$ 在 $G(\gamma,a,b)$ 框架中可表示为

$$x(t)=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}z_{k,l}M_{bl}T_{ak}\gamma(t) \tag{3}$$

定义 S 为框架算子，标准对偶窗 $\gamma=bS^{-1}g$ 。如果 $g(t)$ 框架在 $[0,W_g]$ 上紧支撑， $a=\mu W_g$ ， $b=1/W_g$ ，则框架算子具有简单的Walnut表达形式 $S(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\,g(t-ak)\,|^2$ [9]。

采样系统将 $x(t)$ 分 JM 个通道在 $t=[T]$ 采样，其基本结构如图 1 所示[10]。

图 1 中，$w_j(t)=\sum_{l=-L_0}^{L_0}d_{jl}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi blt}$ 用于频域调制，$s_m(t)=\sum_{k=K_1}^{K_2}c_{mk}\overline{g(t-ak)}$ 用于时域采样。其中，$L_0=1/2\left\lceil(\Omega+B)W_g\right\rceil-1$ ，$K_1=-N$ ，$K_2=\left\lceil(T+W_g)N/W_g\right\rceil-1$ 。窗函数表达式为 $g(t)=\beta_\alpha(tN/W_g)$， $\beta_\alpha(t)$ 为标准 N 阶平滑的指数样条窗函数，这样滤波器 $\chi_m(t)$ 为一个指数滤波器。

$$\mathrm{X}_m(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-T(s+\overline{\alpha_m}N/W_g)}}{s+\overline{\alpha_m}N/W_g} \tag{4}$$

将采样点 $y_{j,m}$ 构建为 $J\times M$ 的矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 。重构分为两步，第 1 步是子空间探测，即求解由 $z_{k,l}$ 构成的系数矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 。求解 $\boldsymbol{Z}$ 的过程即为解方程组 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{DU}^{\mathrm{T}}$,

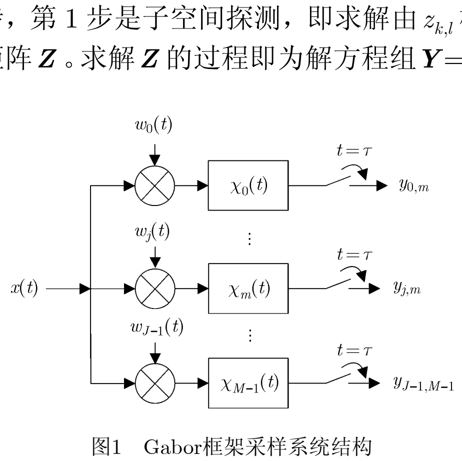

图1 Gabor框架采样系统结构

$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{CZ}$。其中，$\boldsymbol{D}$ 为 $w_j(t)$ 中频域调制分量的加权系数，其选取并不影响采样率。文献[16]指出，为了简化硬件实现，可以令 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，子空间探测即为解决式(5)中的问题。

$$\boldsymbol{Z}'=\arg\min|\operatorname{supp}\boldsymbol{Z}|,\ \text{s.t. } \boldsymbol{U}=\boldsymbol{CZ} \tag{5}$$

$\boldsymbol{C}$ 中的元素 $c_{m,k}$ 的表达式为

$$c_{m,k}=\mathrm{e}^{\overline{\alpha_m}k}\frac{\Xi(m)}{|\Xi(m)|^2},\ \Xi(m)=\frac{W_g}{N}\prod_{n=1}^{N}\frac{1-\mathrm{e}^{\overline{\alpha_n}+\overline{\alpha_m}}}{\overline{\alpha_n}+\overline{\alpha_m}} \tag{6}$$

其中，$m\in\{1,2,\cdots,M\}$。令 $P/K=2nW_g/N$，其中 n 为正整数，则 $\boldsymbol{C}$ 为 DFT 矩阵。在实际应用中，将 $\boldsymbol{C}$ 进行列归一化。第 2 步是利用 Gabor 系数和对偶窗求出原始信号 $x(t)$，根据式(3)可以恢复出窄脉冲信号 $x(t)$。

3　基于合成模型测量矩阵的相干性

3.1 分块 Gabor 字典

本小节将定义用于信号恢复的离散 Gabor 字典 $\boldsymbol{\Upsilon}$，此字典的每一列实际上是用于信号稀疏表示的对偶 Gabor 框架原子的离散化表示。首先，对 Gabor 框架进行离散化并构建 Gabor 矩阵 $\boldsymbol{G}$。在上文描述的 Gabor 框架中，窗函数之间时域平移的时间为 $a=\mu W_g$，令 $[0,a]$ 中恢复出来的采样点数为 n，重构出来的离散信号的采样时间间隔为 T_{rs}，可以构建矩阵 $\boldsymbol{G}[k]$，其第 (q,l) 个元素为

$$\boldsymbol{G}[k]_{q,l}=\omega^{-l}g_{kn+q} \tag{7}$$

其中，q=0,1,$\cdots$,$n-1$。g_{kn+q} 表示在 $t=T_{rs}(kn+q)$ 时刻窗函数的值，ω=$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi bT_{rs}(kn+q)}$ 表示在 $t=T_{rs}(kn+q)$ 时刻在 $f=bl$ 的频域调制。这样 Gabor 矩阵就可以使用分块循环矩阵表示。

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} G[0] & G[K-1] & \cdots & G[1] \\ G[1] & G[0] & \cdots & G[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G[K-1] & G[K-2] & \cdots & G[0] \end{bmatrix} \tag{8}$$

此矩阵是一个分块的 Toeplitz 矩阵，矩阵的尺寸为 $Kn\times KL$。在信号重构过程中，根据实际采集到的信息，n 的取值范围受到定理 1 的约束。

定理 1　对于 N 阶指数再生窗构建的截短的 Gabor 框架，如果获得的 Gabor 系数矩阵的尺寸为 $K\times L$，在对用于合成信号的 Gabor 窗进行离散化时，将时间区间 $[0,a]$ 分为 n 为个点表示，n 的范围满足 $n>(L-1)/N$ 时，能够准确重构信号。

证明　根据以上构建的采样系统，$a=nT_{rs}=\mu W_g$，b=$\dfrac{1}{W_g}$，可得 T_{rs}=$\dfrac{1}{f_{rs}}$=$\dfrac{\mu W_g}{n}$。根据采样定理可知 $f_{rs}>\varOmega+B$。所以 $n>\mu(\varOmega+B)W_g$=$\mu(L-1)$。由 $\mu=1/N$，得 $n>\dfrac{L-1}{N}$。　证毕

对于 Gabor 矩阵 $\boldsymbol{G}$，其对偶矩阵为 $\boldsymbol{\Upsilon}$，根据本文中对 (a,b) 的选取，列向量 $\boldsymbol{\gamma}=b\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{g}$，其中 $\boldsymbol{S}$ 为 Gabor 框架的框架算子矩阵。根据文献[16,17]，可知 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}$。利用此式直接进行计算框架算子非常复杂[18,19]，为了方便计算，本文根据最常用的 Walnut 表达式 $S(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g(t-ak)|^2$ 给出一个等价框架算子矩阵 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{W}}$。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{S}_{\mathrm{W}}=\frac{1}{L}\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{S}_{1,1},\boldsymbol{S}_{2,2},\cdots,\boldsymbol{S}_{i,i},\cdots,\boldsymbol{S}_{K\times n,K\times n}\right),\\&\boldsymbol{S}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}\end{aligned} \tag{9}$$

因此采样系统中的对偶 Gabor 字典为

$$\boldsymbol{\Upsilon}=b\boldsymbol{S}_{\mathrm{W}}^{-1}\boldsymbol{G} \tag{10}$$

根据式(10)，对偶字典矩阵 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 相当于在 $\boldsymbol{G}$ 的每一列上乘以相同的系数，同时参照式(7)和式(8)，字典 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 的列可以分成 K 个子矩阵 $\boldsymbol{\Upsilon}=(\boldsymbol{\Upsilon}[1]\ \boldsymbol{\Upsilon}[2]\ \cdots\ \boldsymbol{\Upsilon}[K])$。这样，信号 $\boldsymbol{x}$ 的稀疏表达式就表示为 $\boldsymbol{x}$=$\boldsymbol{\Upsilon}\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})$。

在本文中提出的采样系统中，$\boldsymbol{Z}$ 为用于信号稀疏表示的系数矩阵，其第 k 行对应的是时域第 k 个平移的栅格，这里将每一个时间窗对应的短时傅里叶变换向量 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}[k]$ 与 $\boldsymbol{\Upsilon}[k]$ 一一对应，方便在进行信号重构的过程中对冗余的 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 字典的分块支撑集进行筛选。

3.2 测量矩阵

式(5)中的问题可以等价于求解式(11)的过程：

$$\mathrm{vec}\left(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\right)=\left(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_L\right)\mathrm{vec}\left(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\right) \tag{11}$$

其中，$\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})$ 表示 $\boldsymbol{Z}$ 的行经过转置连成的列向量，$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 积。根据文献[16]的分析，对于对偶字典矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{\Upsilon}$，满足 $\boldsymbol{I}_{K\times L}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Upsilon}$，代入式(11)可得

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}\left(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\right)&=\left(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_L\right)\boldsymbol{I}_{K\times L}\mathrm{vec}\left(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\right)\\&=\left(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_L\right)\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Upsilon}\mathrm{vec}\left(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\right)\\&=\boldsymbol{M\Upsilon}\mathrm{vec}\left(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

这里，$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_L)\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}$，这是一个 $(M\times L)\times(K\times n)$ 的测量矩阵，且 $M<K$。考虑 $\boldsymbol{x}$=$\boldsymbol{\Upsilon}\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})$，式(11)还等价于 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{Mx}$。$n/L$ 越大，$\boldsymbol{M}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 具有更高的压缩特性。但是实际上，无论 $\boldsymbol{M}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 是否能够紧性压缩，都不是最关心的问题，因为 n 的选取与采样系统无关，只和信号重构有关。

对于 Gabor 系数矩阵 $\boldsymbol{Z}$，其每一列 $\boldsymbol{Z}[l]$ 的非零点位置相同。用 Λ 表示 $\boldsymbol{Z}$ 的支撑集，$|\Lambda|<S$。则对于 $\boldsymbol{U}$ 的每一列，都存在 $\boldsymbol{U}[l]=\boldsymbol{C}_\Lambda\boldsymbol{Z}[l]_\Lambda$。相应地，列向量 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}})$ 满足 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{M\Upsilon})_\Lambda\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})_\Lambda$。在这里，$(\boldsymbol{M\Upsilon})_\Lambda=\boldsymbol{M\Upsilon}_\Lambda=\boldsymbol{C}_\Lambda\otimes\boldsymbol{I}_L$。可见，无论是 $\boldsymbol{Z}$ 的

支撑集还是 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})$ 的支撑集，对应地，用于合成 $\boldsymbol{U}$ 或 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}})$ 的映射矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的子集本质上都是一样的。因此可得 $\mathrm{vec}((\boldsymbol{Z}_\Lambda)^{\mathrm{T}})=\mathrm{vec}((\boldsymbol{Z})^{\mathrm{T}})_\Lambda$，这使得使用联合贪婪算法和块稀疏算法探测到的子空间等价。

3.3 基于合成模型测量矩阵的分块 ε-相干性

根据3.1节和3.2节关于Gabor字典、测量矩阵及信号分块稀疏表示的讨论，本节提出分块 ε-相干性。

对于稀疏表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Upsilon z}$，字典可以分块表示为 $\boldsymbol{\Upsilon}=(\boldsymbol{\Upsilon}[1]\ \boldsymbol{\Upsilon}[2]\ \cdots\ \boldsymbol{\Upsilon}[K])$，其中 $\boldsymbol{\Upsilon}[k]$ 为 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 的第 k 个子分块矩阵。相应地，系数向量 $\boldsymbol{z}$ 可以按字典的分块结构进行分块表示为 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{z}[1]^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{z}[2]^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \boldsymbol{z}[K]^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$。定义 $\|\boldsymbol{z}\|_{2,0}=\sum_{k=1}^{K}I(\|\boldsymbol{z}[k]\|_2>0)$，其中 $I(\bullet)$ 为指标函数，如果括号内变量大于零则函数值为1，否则为0。类似地，在后面出现的块稀疏向量的范数 $\|\boldsymbol{z}\|_{p,q}=\left\|(\|\boldsymbol{z}[1]\|_p\ \ \|\boldsymbol{z}[2]\|_p\cdots\ \|\boldsymbol{z}[K]\|_p)^{\mathrm{T}}\right\|_q$。函数支撑 Λ 定义为 $\Lambda=\{k\in\Lambda\mid\exists k,\|\boldsymbol{z}[k]\|_2>0\}$。如果 $\boldsymbol{\Upsilon}[k]$ 列数为 L，则分块 ε-相干性如定义2。

定义2 对于 $0\le\varepsilon<1$，$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 分别为确定的测量矩阵和稀疏字典，分块 ε-相干性 $\theta_{\mathrm{B}\varepsilon}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Upsilon})$ 定义为

$$\left.\begin{aligned}&\theta_{\mathrm{B}\varepsilon}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Upsilon})=\max_{k,k'\neq k}\frac{1}{L}\rho(\mathbf{Gr}[k,k'])\\&\mathrm{s.t.}\quad\frac{\left\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Upsilon}[k']\right\|_{\mathrm{F}}^2}{\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]\|_{\mathrm{F}}^2\,\|\boldsymbol{\Upsilon}[k']\|_{\mathrm{F}}^2}<1-\varepsilon^2\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

其中，$\mathbf{Gr}[k,k']=(\boldsymbol{\Upsilon}[k])^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Upsilon}[k']$，是Gram矩阵 $\mathbf{Gr}=\boldsymbol{\Upsilon}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Upsilon}$ 中的尺寸为 $L\times L$ 子矩阵。当取相同的 ε 时，$\boldsymbol{\Upsilon}$ 中满足式(13)中右边不等式的字典向量指标集更大，再根据文献[20]，推论可得 $0<\theta_{\mathrm{B}\varepsilon}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Upsilon})\ \le\theta_\varepsilon(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Upsilon})$。相应地，引入分块 ε-闭包 $clos_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}(\Lambda)$ 的概念，定义如下。

定义3 对于 $0\le\varepsilon<1$ 和分块字典 $\boldsymbol{\Upsilon}$，从支撑集 Λ 中选取并满足以下条件的集合称为分块 ε-闭包，并用 $\mathrm{clos}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}(\Lambda)$ 表示，

$$\mathrm{clos}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}(\Lambda)=\left\{k\mid\exists k'\in\Lambda,\frac{\left\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Upsilon}[k']\right\|_{\mathrm{F}}^2}{\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]\|_{\mathrm{F}}^2\,\|\boldsymbol{\Upsilon}[k']\|_{\mathrm{F}}^2}\ge1-\varepsilon^2\right\}\tag{14}$$

对于本文中构建的Gabor字典，其分块 ε-闭包对应的是 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 子块的指标集或系数矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的非零行的指标集。相应地，$\mathrm{clos}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}(\Lambda)$ 的补集可以定义为分块 ε-独立支撑集。

4 基于合成模型的子空间探测

4.1 重构算法

本小结结合冗余Gabor字典分块 ε-相干性，探索了SOMP和信号分块稀疏表示相结合的采样系统子空间探测方法，并可以直接恢复出原始信号 $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{SOMP_{B\varepsilon,F}}}$。输入变量为：$S$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{\Upsilon}$，$\boldsymbol{U}$，这里 $\boldsymbol{U}$ 满足 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{CZ}+\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}$ 为加性噪声。信号稀疏表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Upsilon}\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})$。支撑集 Λ 满足 $|\Lambda|\le S$。定义 Λ_{C} 为 Λ 的补集。算法如表1所示。

表1 SOMP和信号分块稀疏表示相结合的采样子空间探测算法

初始化：$\widehat{\boldsymbol{x}}^0=\mathbf{0}$，残差 $\boldsymbol{R}^0=\boldsymbol{U}$，支撑集 $\widehat{\Lambda}^0=\breve{\Lambda}^0=\varnothing$，$\widehat{\boldsymbol{Z}}_{\widehat{\Lambda}^0}=\mathbf{0}$ 迭代次数 $p=0$

while $p\le S$ do

(1) $p=p+1$

(2) $k^p=\arg\max_{k\notin\breve{\Lambda}^{p-1}}\|\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}^{p-1}\|_{\mathrm{F}}$ {探测新支撑集}

(3) $\widehat{\Lambda}^p=\widehat{\Lambda}^{p-1}\cup\{k^p\}$ {合并支撑集}

(4) $\widehat{\boldsymbol{Z}}_{\widehat{\Lambda}^p}=\boldsymbol{C}_{\widehat{\Lambda}^p}^{\dagger}\boldsymbol{U}$，$\widehat{\boldsymbol{Z}}_{\widehat{\Lambda}_{\mathrm{C}}^p}=\mathbf{0}$ {最小二乘估计}

(5) $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{SOMP_{B\varepsilon,F}}}^p=\boldsymbol{\Upsilon}_{\widehat{\Lambda}^p}\mathrm{vec}\left((\boldsymbol{Z}_{\widehat{\Lambda}^p})^{\mathrm{T}}\right)$ {更新信号估计}

(6) $\boldsymbol{R}^p=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}_{\widehat{\Lambda}^p+\widehat{\Lambda}_{\mathrm{C}}^p}$ {更新残差}

(7) $\breve{\Lambda}^p=\mathrm{clos}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}(\widehat{\Lambda}^p)$

end while

$\widehat{\boldsymbol{Z}}_{\mathrm{SOMP_{B\varepsilon,F}}}=\widehat{\boldsymbol{Z}}_{\widehat{\Lambda}^p+\widehat{\Lambda}_{\mathrm{C}}^p}$，$\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{SOMP_{B\varepsilon,F}}}=\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{SOMP_{B\varepsilon,F}}}^p$ {最终子空间探测结果和信号合成}

算法中，第 p 次迭代的第(2)步等价于

$$\begin{aligned}k^p&=\arg\max_{k\notin\breve{\Lambda}^{p-1}}\left\|(\boldsymbol{C}_k\otimes\boldsymbol{I}_L)^{\mathrm{H}}\mathrm{vec}\left((\boldsymbol{R}^{p-1})^{\mathrm{T}}\right)\right\|_2\\&=\arg\max_{k\notin\breve{\Lambda}^{p-1}}\left\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}\mathrm{vec}\left((\boldsymbol{R}^{p-1})^{\mathrm{T}}\right)\right\|_2\end{aligned}$$

可见，此过程中探测到的最优支撑实际上是由分块字典决定的。在更新此支撑集的时候，k 从 $\breve{\Lambda}^{p-1}$ 中选取，摒弃了与 $\widehat{\Lambda}^{p-1}$ 中相干性过强的字典子块，增强的了 $\widehat{\Lambda}^p$ 中字典的相干性。

第(6)步更新残差的过程等价于

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}\left((\boldsymbol{R}^p)^{\mathrm{T}}\right)&=\mathrm{vec}\left(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\right)-\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Upsilon}_{\widehat{\Lambda}^p}\mathrm{vec}\left((\boldsymbol{Z}_{\widehat{\Lambda}^p})^{\mathrm{T}}\right)\\&=\mathrm{vec}\left(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\right)-\boldsymbol{M}\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{SOMP_{B\varepsilon,F}}}^p\end{aligned}$$

说明此步残差更新是探测到更加逼近的子空间后，对 $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{SOMP_{B\varepsilon,F}}}^p$ 投影到 $\boldsymbol{M}$ 上的残余子空间的探测的过程。

算法的第(7)步中，对于分块的字典 $\boldsymbol{\Upsilon}_\Lambda$，其 ε-闭包存在一个临界值 ε_c，当 $\varepsilon<\varepsilon_c$，存在 $\breve{\Lambda}^p=\mathrm{clos}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}(\widehat{\Lambda}^p)$，则此步骤将不起作用，算法等价于SOMP。

4.2 约束条件及算法分析

完成了算法描述，本节将分析算法重构的约束条件。对于 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\Upsilon}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Upsilon}$，抽取对角线上的元素分块相加，可构成对角矩阵 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Upsilon}}=\mathrm{diag}(\|\boldsymbol{\Upsilon}[1]\|_{\mathrm{F}},\|\boldsymbol{\Upsilon}[2]\|_{\mathrm{F}},\cdots,$

$\|\boldsymbol{\Upsilon}[K]\|_{\mathrm{F}}$)。规定 $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\Upsilon}}=\left(\|\boldsymbol{z}[1]\|_2\ \|\boldsymbol{z}[2]\|_2 \cdots \|\boldsymbol{z}[K]\|_2\right)^{\mathrm{T}}$。首先提出引理 1。

引理 1 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Upsilon z}$，$\Lambda$ 为 S 阶块稀疏向量 $\boldsymbol{z}$ 的支撑集，$\tilde{\Lambda}$ 为满足 $\Lambda\subseteq \mathrm{clos}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}(\tilde{\Lambda})$ 的一个支撑集，$\boldsymbol{\Psi}_k=\dfrac{\boldsymbol{\Upsilon}[k]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Upsilon}[\tilde{k}]}{\|\boldsymbol{\Upsilon}[\tilde{k}]\|_{\mathrm{F}}^2}$。对于确定的 k，$\tilde{k}$ 满足 $\dfrac{\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Upsilon}[\tilde{k}]\|_{\mathrm{F}}^2}{\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]\|_{\mathrm{F}}^2\|\boldsymbol{\Upsilon}[\tilde{k}]\|_{\mathrm{F}}^2}\ge 1-\varepsilon^2$。如果对于一个 k 存在若干 $\tilde{k}$，选择其中任意一个代替 k，构建 $\boldsymbol{x}$ 的一个稀疏表示 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\sum_{k\in\Lambda\cap\tilde{\Lambda}}\boldsymbol{\Upsilon}[k]\boldsymbol{z}[k]+\sum_{k\in\Lambda\backslash\tilde{\Lambda}}\boldsymbol{\Upsilon}[k]\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{z}[k] \tag{15}$$

可得

$$\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|_2^2\le\varepsilon^2\left\|\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Upsilon}_\Lambda}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\Upsilon}_{\Lambda\backslash\tilde{\Lambda}}}\right\|_1^2 \tag{16}$$

证明　略。

引理 1 给出了分块 ε-独立支撑集对应的稀疏表示产生的误差边界。选取的分块 ε-闭包越大，允许的误差边界就越大。

引理 2　当 $\boldsymbol{M\Upsilon}=\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_L$ 时，且满足 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 的分块尺寸为 L，则 $\theta_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Upsilon})=(1/L)\theta(\boldsymbol{C})$。

证明　将 $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_L)\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}$ 带入式(13)可得引理 2。

引理 2 中两种相干性相差 L 倍，这是因为将 MMV 联合稀疏问题转化为块稀疏问题时，由 $\boldsymbol{C}$ 经过变换获得的测量矩阵 $\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_L$ 的子分块矩阵内部是正交的。在使用 SOMP 算法进行重构时，不需要考虑 $\boldsymbol{Z}$ 的列之间的关联性。为了保证算法的收敛，只要分别保证 $\boldsymbol{Z}$ 中每一列的重构收敛即可。

引理 3　在 4.2 节描述的算法和定理 2 中设定条件下，算法经 S 次迭代满足 $\tilde{\Lambda}\subseteq\breve{\Lambda}^S=\mathrm{clos}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}(\hat{\Lambda}^S)$。

证明　略。

引理 3 中的 $\breve{\Lambda}^S$ 是算法经过 S 次迭代后的支撑集的分块 ε-闭包，它是支撑集在一定范围内的拓展，尽可能多地包含了可以用于信号稀疏表示的冗余字典向量的指标。在算法中更新支撑集时，新的支撑集要从第 p 次迭代已经选择的支撑集的分块 ε-闭包以外选择，从而保证选择的支撑集是分块 ε-独立的。

根据上面提出的 3 个引理，可以提出定理 2，给出了算法收敛的约束条件和重构误差边界。

定理 2　令 $0\le\varepsilon<1$，$\boldsymbol{M\Upsilon}=\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_L$，其中 $\boldsymbol{M}$ 为确定的测量矩阵，$\boldsymbol{\Upsilon}$ 为分块尺寸为 L 的字典，$\boldsymbol{M\Upsilon}$ 的 ε-相干为 $\theta_{\mathrm{B}\varepsilon}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Upsilon})=\theta_{\mathrm{B}\varepsilon}$。令 $\boldsymbol{z}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}})$，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{CZ}$ 是信号 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Upsilon z}$ 的测量值，其中 $\boldsymbol{Z}$ 的支撑集为 Λ 且 $|\Lambda|=S$。令 ε-独立支撑集 $\tilde{\Lambda}\subseteq\Lambda$，则 $\Lambda\subseteq\mathrm{clos}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}(\tilde{\Lambda})$，且 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\Upsilon}\tilde{\boldsymbol{z}}$。如果满足

$$\tilde{S}<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{L\theta_{\mathrm{B}\varepsilon}}\right)-\frac{\sigma_{\boldsymbol{M}}\varepsilon}{\sqrt{L}\theta_{\mathrm{B}\varepsilon}z_{\boldsymbol{\Upsilon}_{\min}}}\cdot\left(\|\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\tilde{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\|_1+\left\|\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Upsilon}_{\Lambda\backslash\tilde{\Lambda}}}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\Upsilon}_{\Lambda\backslash\tilde{\Lambda}}}\right\|_1\right) \tag{17}$$

其中 $z_{\boldsymbol{\Upsilon}_{\min}}$ 是 $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\Upsilon}}$ 中的最小非零值，则此条件下 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}}$ 满足

$$\left\|\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}}-\boldsymbol{x}\right\|_2^2\le\|\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\tilde{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\|_1^2\varepsilon^2+\left\|\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Upsilon}_{\Lambda\backslash\tilde{\Lambda}}}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\Upsilon}_{\Lambda\backslash\tilde{\Lambda}}}\right\|_1^2\varepsilon^2 \tag{18}$$

证明　略。

说明：关于定理 2 中的式(18)，如果 $\boldsymbol{\Upsilon}_\Lambda$ 是 ε-线性独立的字典，则 $\Lambda=\tilde{\Lambda}$，有

$$\left\|\hat{\boldsymbol{x}}^p_{\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}}-\boldsymbol{x}\right\|_2\le\varepsilon\|\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\|_1\,\boldsymbol{z}$$

对于本文提出的算法，当 $\varepsilon<\varepsilon_c$，$\Lambda$ 是一个关于字典 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 的分块 ε-独立支撑集，此时算法相当于 SOMP 算法，重构约束条件为 $S<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{L\theta_{\mathrm{B}\varepsilon}}\right)$。重构出来的 Gabor 系数矩阵 $\boldsymbol{Z}=\tilde{\boldsymbol{Z}}$，则重构误差为 $\left\|\tilde{\boldsymbol{x}}^p_{\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}}-\boldsymbol{x}\right\|_2^2\le\varepsilon_c\|\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\|_1^2$。根据定义，可知 $\rho(\boldsymbol{\Upsilon}[k]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M\Upsilon}[k'])=\dfrac{1}{\sqrt{L}}\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M\Upsilon}[k']\|_{\mathrm{F}}$。

由于 $\dfrac{\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Upsilon}[k']\|_{\mathrm{F}}^2}{\|\boldsymbol{\Upsilon}[k]\|_{\mathrm{F}}^2\|\boldsymbol{\Upsilon}[k']\|_{\mathrm{F}}^2}\le1-\varepsilon_c^2$, SOMP 算法探测得到子空间对应的字典的相干性满足 $\theta\le\dfrac{1}{L^{3/2}}\sqrt{1-\varepsilon_c^2}$。对于高度冗余的字典 $\boldsymbol{\Upsilon}$，ε 非常小。如果 $\varepsilon_c\to0$，$S<\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{L})$。所以分块尺寸 $L\ge2$ 才能允许 $|\Lambda|\ge1$。此条件非常苛刻，如果不对 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 分块，在 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 高度冗余的条件下 $S<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$，则根本无法完成信号重构。为了比较本文提出的算法对于约束条件的改善，根据定理 2 推出推论 1。

推论 1　在定理 2 的设定下，取 $\varepsilon=\varepsilon_c$，本文算法的约束条件为

$$S<\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{L}{1-\varepsilon_c^2}}\right)-\frac{L}{\sqrt{K\left(1-\varepsilon_c^2\right)}}\varepsilon_c$$

说明：根据推论 1，需要满足 $K>4L\varepsilon_c^2$。当选取比 ε_c 大的 ε，重构条件有比较明显的放宽。当 $\varepsilon\to1$ 将意味着选取的字典接近正交，等价于使用 OMP 算法重构测量矩阵为正交矩阵条件下的稀疏信号。在 K 和 L 保持一定比例关系的条件下，L 越大，重构条件就越放松。但是，ε 的增大也意味着重构误差边界的放宽，所以在 Gabor 系数的稀疏度较小的条件下，可以令 ε 尽可能地小，以获得更加精确的重构误差。

定理 2 的分析是在无噪声条件下，下面给出带噪声时的约束条件。

推论 2 定理 2 的条件下，令$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{CZ}+\boldsymbol{E}$，则为了保证算法收敛，需要满足

$$\widetilde{S}_N < \widetilde{S} - \frac{\|\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}}{L\theta_{\mathrm{B}\varepsilon}\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\Upsilon}_{\min}}}$$

推论 2 定理证明参照文献[21]，不再详细证明。可见误差的存在对收敛条件提出了更加严格的要求，误差越大，允许重构的系数度越低。

4.3 通道数的影响

采样系统总的通道数为矩阵$\boldsymbol{Y}$的测量点个数，其列数由测量矩阵$\boldsymbol{C}$的行数决定，其值为M。本文可以通过降低M来减小通道数。根据文献[22]，为了保证算法收敛且取得较小误差，M的下界决定于$\boldsymbol{Z}$的行数K和支撑集Λ尺寸。

一方面，在本文的采样系统中，字典冗余度越高，窗函数平滑阶数N越小，K越小，M的下界越低。根据文献[10]可知N越小，最终恢复的信号的误差也越大。另一方面，使用改进的子空间探测方法，使得支撑集Λ减小，从而M的下界也相应减小。但是ε的增大会一定程度上对误差产生影响，选取适当的ε可以减小误差，但是ε过大也会增大误差。所以，通道数M是针对最终信号重构误差所允许的值进行权衡得到的结果。对于误差要求越苛刻，需要的通道数就越多。但是根据后面的仿真实验，相比较文献[10]中系统对通道数的要求，本文方法在减小通道数方面还是取得了非常积极的改善。

5 实验仿真

本节通过数值仿真对前面分析进行验证。仿真实验对时间长度为$T=20$ ms 的多脉冲信号进行了采样和重构，脉冲从包含单脉宽度为$W=0.5$ ms 的单周期的正弦脉冲、高斯脉冲和三阶 B-样条脉冲构成的集合中随机选取，脉冲的位置随机设置。实验在 100 次蒙特卡洛仿真后，通过计算相对误差$\|\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}}\|_2/\|\boldsymbol{x}\|_2$对重构效果进行评价。下面的实验中$(\varepsilon 1)^2=3\varepsilon_c^2$，$(\varepsilon 2)^2=5\varepsilon_c^2$。

实验 1 利用本文提出的$\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$算法在分别在$\varepsilon=\varepsilon 1$，$\varepsilon=\varepsilon 2$条件下进行子空间探测，对信号进行恢复，观察不同字典冗余度$\mu=1/N$条件下的信号重构成功率，并和传统的 SOMP 算法、SCoSaMP 算法、SIHT 算法进行对比。其中，SIHT 的迭代步长通过残差标准化的方法获得。这里，冗余度度量值μ越小，字典冗余度越高。当$\varepsilon=\varepsilon_c$时，$\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$算法等同于 SOMP 算法。信号成功率定义为，100 次中重构相对误差满足$\|\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}}\|_2/\|\boldsymbol{x}\|_2 \le 0.05$的次数。这里设置测量矩阵$\boldsymbol{M}$的行数$M=N$，根据文献[10]中的分析，窗宽$W_g\ge 7W$时，明显取得较好的重构效果，本文中取$W_g=7W$进行实验。仿真结果如图 2。

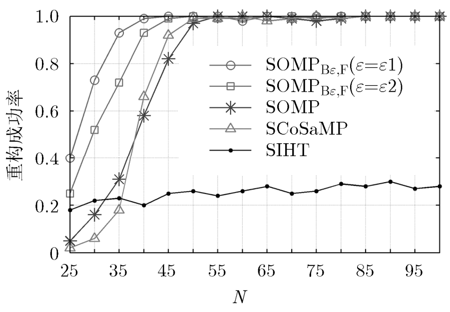

图2 不同字典冗余度条件下算法重构成功率

根据图 2 仿真结果，使用$\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$ $(\varepsilon=\varepsilon 1)$算法重构成功率最高，在$\mu$较大时，重构效果明显优于其他几种算法。随着$\mu$的减小，字典$\boldsymbol{\Upsilon}$冗余度提高，重构成功率都趋近于 1.0，且差别越来越不明显。这是因为通道数$M=N$，随着通道数增加，测量值也越来越多，贪婪算法本身的重构效果越来越好。但是，在实际系统构建时，通道数越少越好，因此本实验更关心当M较小时改进算法对子空间探测的影响。当$\varepsilon=\varepsilon 2$时，由于字典$\boldsymbol{\Upsilon}$为循环矩阵，选取的$\varepsilon$-独立支撑集对应的子空间原子的相干性降低，但支撑集也相应减小，导致信号采样中获得的信息量减小，重构成功率相比$\varepsilon=\varepsilon 1$条件下反而增大。在冗余度较低时，SCoSaMP 重构成功率较低，随着冗余度提高，其重构成功率迅速提高，并最终趋近于 1.0，但整体上还是不如$\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$算法。使用 SIHT 算法时，在不同冗余度条件下重构成功率都不超过 0.3，在本采样系统中工程意义较差。

实验 2 本实验进一步降低通道M，观察通道数减小时改进算法在子空间探测中的效果。使用$\varepsilon=\varepsilon 1$和$\varepsilon=\varepsilon 2$两种条件的$\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$算法及传统的 SOMP 算法、SCoSaMP 算法进行仿真，仿真过程中令从$M=N$降低到$M=0.2N$，其它实验条件同实验 1。仿真结果如图 3。

根据图 3 仿真结果，不同算法条件下，信号重构成功率都随通道数M与窗函数平滑阶数N的比值M/N的减小而降低。N相同时，相比较 SOMP 算法和 SCoSaMP 算法，使用$\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$算法能够在$M/N$更小的条件下依然保持很高的重构成功率。使用$\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$算法进行信号重构，$\varepsilon=\varepsilon 2$时重构效果比$\varepsilon=\varepsilon 1$时略差，原因同实验 1。为达到 90%以上的重构成功率，使用$\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$算法最少仅需要$M$=24 个通道，而使用 SOMP 算法和 SCoSaMP 算法都最少需要M=65 个通道。可见，使用改进的方法，可以大大降低采样通道数。

实验 3 为了验证改进方法对于鲁棒性的影响，本实验分别在采样系统每个通道加入信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)为 15 dB 的高斯白噪声，使用

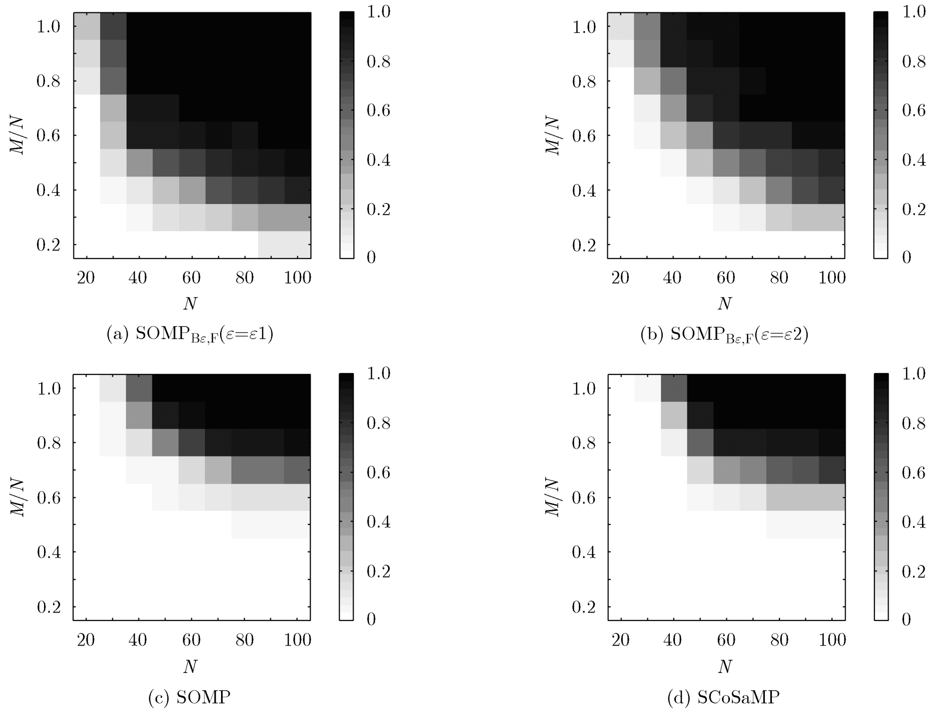

图 3 不同 M/N 条件下算法重构成功率

在 $\varepsilon=\varepsilon1$ 和 $\varepsilon=\varepsilon2$ 两种条件的 $\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$ 算法及传统的 SOMP 算法、SCoSaMP 算法对信号进行重构，通过重构信号的信噪比来观察不同算法方法时的系统鲁棒性。本实验的其它条件同实验 1，实验结果如图 4。

根据图 4 中的仿真结果，可以看出不同算法重构出来的信号 SNR 都随着 N 的增大而提高，而且对通道噪声具有大于 15 dB 的抑制作用。使用 $\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$ 算法时，系统对于噪声抑制优于 SOMP 和 SCoSaMP 算法时。但是 N 越大，改进方法的优势越来越小。这是因为算法经过 S 次迭代，$\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$ 算法选取的支撑集为 ε-独立支撑集，其尺寸要小于 SOMP 和 SCoSaMP 算法最终选取的支撑集。在 N 较小时字典冗余度较低，ε-独立支撑集的相干性提高在噪声抑制中起主要作用；在 N 较大时

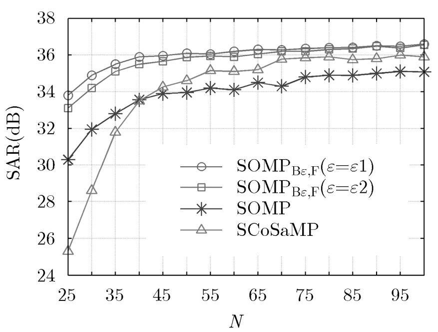

图 4 不同算法重构信号的 SNR

字典冗余度较高，相比算法中字典冗余性对于噪声抑制的贡献，ε-独立支撑集相干性的提高又限制了冗余性的作用。同时也可以看出，由于 $M{=}N$，改进方法在通道数较小的条件下更有意义。

6　结论

当 Gabor 框架高度冗余时，基于指数再生窗 Gabor 框架的采样系统使用面向系数域的重构方法进行信号子空间探测可能面临失败或存在误差较大，本文将合成模型引入基于 MMV 的子空间探测问题，取得了较好的效果。论文构建了对偶 Gabor 字典，并对字典进行分块，完成信号的分块稀疏表示。将分块字典引入采样过程，计算了采样系统的测量矩阵。提出了受到字典相干性约束的测量矩阵分块 ε-相干性概念，根据分块 ε-相干性更新支撑集，在 SOMP 基础上得到 $\mathrm{SOMP}_{\mathrm{B}\varepsilon,\mathrm{F}}$ 算法，分析和证明了算法收敛的约束条件。仿真实验证明，在信号子空间探测的过程中，本文提出的方法比传统面向系数域的重构方法具有更高的重构成功率；在相同的信号重构成功率条件下，可以大大降低采样通道的数量；当通道中引入高斯白噪声时，重构出来的信号具有更高的信噪比。本系统可应用于测试仪器、状态监测、雷达及通信领域等多种背景下的信号采样与重构。

参 考 文 献

[1] Park S and Park J. Compressed sensing MRI exploiting complementary dual decomposition[J]. *Medical Image Analysis*, 2014, 18(3): 472–486.

[2] 王忠良, 冯燕, 贾应彪. 基于线性混合模型的高光谱图像谱间压缩感知重构[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(11): 2737–2743.
Wang Zhong-liang, Feng Yan, and Jia Ying-biao. Reconstruction of hyperspectral images with spectral compressive sensing based on linear mixing models[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(11): 2737–2743.

[3] 张京超, 付宁, 乔立岩, 等. 一种面向信息带宽的频谱感知方法研究[J]. 物理学报, 2014, 63(3): 030701.
Zhang Jing-chao, Fu Ning, Qiao Li-yan, *et al.*. Investigation of information bandwidth oriented spectrum sensing method[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(3): 030701.

[4] Omer B and Eldar Y C. Sub-Nyquist radar via doppler focusing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(7): 1796–1811.

[5] Herman M A and Strohmer T. High-resolution radar via compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(6): 2275–2284.

[6] Razzaque M A, Bleakley C, and Dobson S. Compression in wireless sensor networks: a survey and comparative evaluation[J]. *ACM Transactions on Sensor Networks*, 2013, 10(1): Article No. 5.

[7] Michaeli T and Eldar Y C. Xampling at the rate of innovation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(3): 1121–1133.

[8] Urigiien J A, Eldar Y C, and Dragotti P L. Compressed Sensing: Theory and Applications[M]. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2012: 148–213.

[9] Matusiak E and Eldar Y C. Sub-Nyquist sampling of short pulses[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(3): 1134–1148.

[10] 陈鹏, 孟晨, 孙连峰, 等. 基于指数再生窗 Gabor 框架的窄脉冲欠 Nyquist 采样与重构[J]. 物理学报, 2014, 67(7): 070701.
Chen Peng, Meng Chen, Sun Lian-feng, *et al.*. Sub-Nyquist sampling and reconstruction of short pulses based on Gabor frames with exponential reproducing windows[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(7): 070701.

[11] Mishali M, Eldar Y C, and Elron A J. Xampling: signal acquisition and processing in union of subspaces[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(10): 4719–4734.

[12] Candes E J, Eldar Y C, Needell D, *et al.*. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, 31(1): 59–73.

[13] Giryes R and Elad M. Can we allow linear dependencies in the dictionary in the sparse synthesis framework?[C]. 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vancouver, Canada, 2013: 5459–5463.

[14] Blanchard J D, Cermak M, Hanle D, *et al.*. Greedy algorithms for joint sparse recovery[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(7): 1694–1704.

[15] Kloos T and Stöckler J. Zak transforms and gabor frames of totally positive functions and exponential B-splines[J]. *Journal of Approximation Theory*, 2014, 184(5): 209–237.

[16] Qiu S and Feichtinger H G. Discrete Gabor structures and optimal representations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(10): 2258–2268.

[17] Qiu S. Block-circulant Gabor-matrix structure and discrete Gabor transforms[J]. *Optical Engineering*, 1995, 34(10): 2872–2878.

[18] Janssen A. Representations of Gabor Frame Operators[M]. Netherlands, Springer, 2001: 73–101.

[19] Casazza P G, Christensen O, and Janssen A. Weyl–Heisenberg frames, translation invariant systems and the Walnut representation[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2001, 180(1): 85–147.

[20] Eldar Y C, Kuppinger P, and Bolcskei H. Block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(6): 3042–3054.

[21] Donoho D L, Elad M, and Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(1): 6–18.

[22] Leviatan D and Temlyakov V N. Simultaneous greedy approximation in Banach spaces[J]. *Journal of Complexity*, 2005, 21(3): 275–293.

陈 鹏： 男，1987 年生，博士生，研究方向为压缩感知、信号采集、自动测试.

孟 晨： 男，1963 年生，教授，博士生导师，研究方向为状态监测、压缩感知、信号采集、自动测试.

王 成： 男，1980 年生，讲师，研究方向为压缩感知、信号采集.