第 37 卷第 10 期　　电 子 与 信 息 学 报　　Vol.37 No.10
2015 年 10 月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Oct. 2015

L0范数平滑逼近的稳健求解算法

王　峰*①②　　向　新②　　易克初①　　熊　磊②
①(西安电子科技大学综合业务网国家重点实验室　西安　710071)
②(空军工程大学航空航天工程学院　西安　710038)

摘　要：该文研究基于代理函数和先验概率密度的 L0 范数平滑逼近问题的稳健求解。首先，分析了平滑逼近函数的凹凸特性，给出提高恢复性能的参数调整策略与改进的 SL0 和 FOCUSS 算法。其次，将噪声背景下 L0 范数逼近过程进行正则化表示，并基于牛顿方向推导其迭代重加权形式的求解框架，给出一种新的代理函数。最后，使用数值仿真证实了所提算法可以提高此类问题的求解的稳健性，具有实用价值。

关键词：非凸压缩感知；L0 范数平滑逼近；迭代重加权算法
中图分类号：TN911.72　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2015)10-2377-06
DOI: 10.11999/JEIT141590

Robust Computational Methods for Smoothed L0 Approximation

Wang Feng①②　　Xiang Xin②　　Yi Ke-chu①　　Xiong Lei②
①(*State Key Laboratory of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an* 710071, *China*)
②(*Aeronautics and Astronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an* 710038, *China*)

Abstract: Computational framework using surrogate functions and prior probability density functions, for smoothed L0 minimization approximation is studied in this paper, for the purpose of improving the recovery performance of non-convex compressed sensing. Firstly, a simple parameter adjusting strategy and modified SL0 and FOCUSS are presented, based on the convex-concave property analysis of approximation functions. Secondly, since L0 approximation problem can be viewed as a L0-Regularized Least Squares problem in noisy setting, a new computational framework called IRSL0 (Iteratively Reweighted SL0) is derived from the Newton direction, furthermore, a new surrogate function is also given. Finally, extensive numerical simulations demonstrate the robustness and applicability of the new theory and algorithms.

Key words: Non-convex compressed sensing; Smoothed L0 approximation; Iteratively reweighted algorithms

1　引言

压缩感知[1]恢复算法，其核心是求解问题 $\min_{\boldsymbol{x}}\|\boldsymbol{x}\|_0$ s.t. $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ，其中 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N$ ，$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^M$ ，$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{M\times N}$ 是一个满足 RIP(Restricted Isometry Property)准则的测量矩阵。因为 L0 范数最小化是 N-P 难的，所以发展出了贪婪算法、凸松弛算法(使用 L1 范数替代 L0)、贝叶斯压缩感知等恢复方法。

除上述算法外，研究者还考虑使用代理函数来实现对 L0 范数的逼近，典型代表有 SL0 和 ISL0 等[2,3]。此处的代理函数，是指某一类参数化平滑可微的连续函数，通过调整其参数，可以逼近 $\|\boldsymbol{x}\|_0$，从而使得 $\min\|\boldsymbol{x}\|_0$ 这一 N-P 难问题变得可以规划求解。SL0 算法提出后引起广泛关注，文献[4]设计了改进的 SL0，并将其应用于 ISAR(Inverse Synthetic Aperture Radar)成像。文献[5]发展了序贯 SL0，用以对机动目标进行 ISAR 成像。文献[6]开展了类似工作，使用 SL0 进行 SAR 图像重建。文献[7]基于 SL0 设计短时压缩感知，并用于微多普勒分析。文献[8,9]将 SL0 拓展至通信领域，用于稀疏信道估计与均衡。国内学者对 L0 范数逼近算法的研究，多以 SL0 算法框架为基础，使用新的代理函数和新的计算方向[10−14]。应用方面，文献[15]将 SL0 应用于高分辨雷达 1 维成像，取得良好效果。

仿真表明，虽然计算效率较高，但 SL0 算法的性能并不占优势，尤其在引入噪声后，需要寻求更为稳健的求解方法。而且，目前尚未在 SL0 类算法和其他主流算法之间建立关联，其研究有待深化。

本文开展了如下工作：(1)分析了 L0 范数平滑逼近过程中目标函数的凹凸特性；(2)梳理了 SL0 类算法，FOCUSS[16]算法以及最近提出的 L_p-RLS [17]

收稿日期：2014-12-11；改回日期：2015-06-03；网络出版：2015-07-06
*通信作者：王峰　wangfengisn@163.com
基金项目：国家自然科学基金(61379104)和陕西省自然科学基金(2014JM2-6106)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61379104); The Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2014JM2-6106)

之间的内在关联，并给出改进算法，新算法在逼近过程中可避开一部分局部解，降低了提前收敛在非全局最优解上的风险；(3)基于牛顿方向和 CCCP (ConCave-Convex Procedure)[18]推导了一种迭代重加权恢复算法框架，对相同稀疏度的信号，同样的恢复效果下，需要较少的测量值，且具有较强的抗噪声能力；(4)提出一种新的代理函数，代入本文框架计算可获得性能提升。

论文组织如下：第 2 节基于代理函数和先验概率密度分析了 SL0 与 FOCUSS，指出二者是 L0 范数平滑逼近的不同途径；第 3 节对 L0 范数逼近过程中目标函数的凹凸特性进行了分析，并据此提出改进算法；第 4 节基于牛顿方向推导了 L0 范数逼近的迭代求解算法，并且给出了一种新的代理函数；第 5 节说明了所提算法的收敛性与复杂度；第 6 节和第 7 节分别是数值仿真与总结展望。

2 L0 范数的平滑逼近与正则化表达

2.1 基于代理函数的逼近

在 SL0 中，每个 x_i 定义代理逼近函数为

$$f_\sigma(x_i)=\exp\left(-x_i^2/2\sigma^2\right) \tag{1}$$

σ 足够小时，$F(\boldsymbol{x})=N-\lim_{\sigma\to 0}\sum_{i=1}^N f_\sigma(x_i)=\|\boldsymbol{x}\|_0$，实现了对 $\|\boldsymbol{x}\|_0$ 的逼近。

除 SL0 外，文献[17]提出近似 p 范数，所使用的代理函数为

$$\|\boldsymbol{x}\|_{p,\sigma}^p=\sum_{i=1}^N\left(x_i^2+\sigma^2\right)^{p/2} \tag{2}$$

同样当 σ 与参数 p 足够小时，得到 L0 范数的平滑逼近。

2.2 基于先验概率密度的逼近

考虑噪声时，压缩感知恢复问题转化为

$$\min_{\boldsymbol{x}}\|\boldsymbol{x}\|_0,\quad \text{s.t.}\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$$

其中 $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{R}^M$ 是高斯噪声序列，且 $\boldsymbol{n}\sim N(0,\boldsymbol{I}\sigma^2)$。使用贝叶斯准则，有

$$\boldsymbol{x}_{\text{MAP}}=\arg\min_{\boldsymbol{x}}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2+\lambda\ln p(\boldsymbol{x})$$

λ 为正则化因子，用以调节恢复的误差和稀疏度。当 $\boldsymbol{x}$ 服从高斯先验分布时，就得到岭回归问题(其中 λ 与 $\boldsymbol{n}$ 的方差相关)。

$$\boldsymbol{x}_{\text{MAP}}=\arg\min_{\boldsymbol{x}}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2+\lambda\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$

岭回归无法得到稀疏解，可以构造一种迭代算法，令 $\boldsymbol{W}^{(k)}=\text{diag}(|\boldsymbol{x}^{(k)}|^{1-p/2})$，并求解

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{x}}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2+\lambda\left\|\left(\boldsymbol{W}^{(k)}\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right\|_2^2$$

此即正则化的 FOCUSS 算法，当 $p=0$，且算法收敛时，有 $\left\|\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{x}\right\|_2^2\approx\|\boldsymbol{x}\|_0$。

2.3 使用代理函数的正则化表达

存在噪声时，恢复算法的目标函数均可以表示为 2.2 节的正则化形式，该式具有如下的性质：

$$\lim_{\lambda\to 0}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2+\lambda R(\boldsymbol{x})=R(\boldsymbol{x}),\quad \text{s.t.}\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中 $R(\boldsymbol{x})$ 是正则化项，对应稀疏约束。可以看出，正则化手段实现了更为广义的表达方式。

2.1 节中分析了无噪情况下基于代理函数的优化目标，相应地，考虑噪声的情况下，该优化目标的正则化形式可写作式(3)所示的无约束函数：

$$L(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2+\lambda F_\sigma(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

其正则化项 $F_\sigma(\boldsymbol{x})$ 同 2.1 节，而非 FOCUSS 中的 $\|\boldsymbol{x}\|_p^p$。

3 基于参数调整策略的改进算法

3.1 目标函数的凹凸特性分析

命题 1 任何平滑可微的单变量 L0 范数逼近代理函数 $f_\sigma(x)$，都是分段凹凸的。

证明 L0 范数的定义为 $|\boldsymbol{x}|_0=\text{num}(x_i\neq 0)$，要求 $0\le f_\sigma(x)\le 1,\forall\sigma\in R$，这意味着 $df_\sigma(x)/x\big|_{x=0}=0$，且有 $df_\sigma(x)/x_{|x|>\kappa}\approx 0$，其中 κ 是一个随参数 σ 变化的较大值，可见，平滑可微的要求令 $f_\sigma'(x)$ 有一个从 0 到非 0，然后再接近 0 的过程，该过程中势必会出现拐点令 $f_\sigma''(x)$，即该函数是分段凹凸的。 证毕

以 SL0 的高斯函数为例，在区间 $\{\boldsymbol{x}:|x_i|\le\sigma\}$，目标函数是凸的。对于近似 p 范数，在区间 $\{\boldsymbol{x}:|x_i|\le\sigma/\sqrt{1-p}\}$ 目标函数是凸的。

图 1 以 SL0 的高斯函数为例，揭示了 σ 取不同值时 $F(\boldsymbol{x})$ 的局部解特性(归一化)。其中 $\boldsymbol{x}=[1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1]$，高斯随机矩阵 $\boldsymbol{A}=\text{randn}(10,11)$，假设 $\hat{\boldsymbol{v}}\in\text{null}(\boldsymbol{A})$，则 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}+\alpha\cdot\hat{\boldsymbol{v}}$ 表示反问题 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的解，$\alpha\in[-15:0.01:15]$ 表示尺度因子变量。

从图 1 中可以观察出，当 $\sigma=800$ 时目标函数 $F(\boldsymbol{x})$ 为凸函数，类似 L2 范数，所以不存在局部解，但是目标函数的最小值并没有对应最稀疏解 $\alpha=0$ 处。当 $\sigma=0.1$ 时，目标函数呈现凹性，局部解出现，

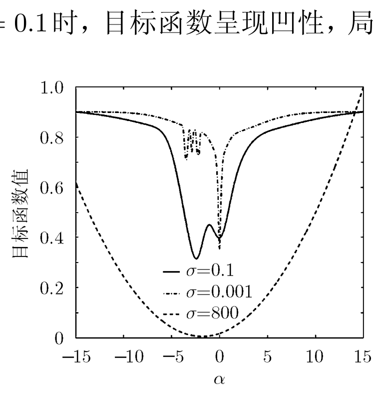

图 1 高斯代理函数不同 σ 对应目标函数的局部解特性

最优解仍不在 $\alpha=0$ 处。直到 $\sigma=0.001$ 时，目标函数最小值才对应于最稀疏解，但此时局部解也最多。

若将目标函数换为 FOCUSS 对应的 $\|\boldsymbol{x}\|_p^p$，也有类似图 1 的结果。无论哪种逼近方法，都存在陷入局部解的风险，为此必须寻求合适的策略避免提早收敛。

3.2 改进策略

(1)对基于代理函数的算法，假设需更新的参数为 σ (若以近似 p 范数为代理函数，p 也可使用类似更新方法)，使用 $\sigma_k=g_\sigma(k)=\sigma_1 e^{-\beta(k-1)}$ 来更新，有 $k=1,2,\cdots,T$，且 $\beta=\ln(\sigma_1/\sigma_T)/(T-1)$。

(2)对基于先验概率密度的算法，也使用 σ_k 的方法更新参数 p_k，其物理意义是通过平滑调整 $\boldsymbol{x}$ 不同分量 x_i 的先验高斯分布的方差，获得稀疏解。事实上，经典 FOCUSS 算法对应于固定的 $\mathrm{p}=0$，如果引入 p_k 更新过程，获得了“变范数 FOCUSS”，在不增加运算量的同时，求解更为稳健。

4　基于牛顿方向的求解框架及算法

4.1 基于牛顿方向的算法框架

本部分基于 2.3 节的正则化表达实现。将式(3) $L(\boldsymbol{x})$ 两边同时除以 λ (不影响其解特性)，令 $\varepsilon=1/\lambda$，并分别对 $\boldsymbol{x}$ 求一阶和二阶梯度。

$$\left.\begin{aligned}\nabla L(\boldsymbol{x})&=\nabla F_\sigma(\boldsymbol{x})-2\varepsilon\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\\ \nabla^2 L(\boldsymbol{x})&=\nabla^2 F_\sigma(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{aligned}\right\}$$

则 $L(\boldsymbol{x})$ 的牛顿方向可以表示为

$$\hat{d}(\boldsymbol{x})=-\left(\nabla^2 F_\sigma(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}H(\boldsymbol{x})$$

其中 $H(\boldsymbol{x})=\nabla L(\boldsymbol{x})$，因为 $\nabla^2 L(\boldsymbol{x})$ 未必正定，所以无法直接使用牛顿法求解，为此，将该问题考虑为一个 CCCP(ConCave-Convex Procedure)过程，转化为如下形式：

$$d(\boldsymbol{x})=-\left(G(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}H(\boldsymbol{x})$$

其中 $G(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}(\nabla_+^2 F(\boldsymbol{x}))$，而 $\nabla_+^2 F(\boldsymbol{x})$ 表示 $\nabla^2 F_\sigma(\boldsymbol{x})$ 的正定部分。进一步推导有

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{x})&=-\left(\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})\\&=-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\varepsilon\left(\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})&=\varepsilon\left(\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\end{aligned}\tag{5}$$

将式(5)代入式(4)即可得到

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{x})=&-\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\right)\\&\times\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

当算法达到收敛时，牛顿方向 $d(\boldsymbol{x})$=0，即

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\tag{6}$$

或者有 $H(\boldsymbol{x})=0$。

4.2 一阶迭代求解算法 IRSL0_1

$H(\boldsymbol{x})=0$ 时，相当于 $\nabla L(\boldsymbol{x})$=0，求解 $\boldsymbol{x}$ 得到

$$\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\frac{\lambda\nabla F_\sigma(\boldsymbol{x})}{2\boldsymbol{x}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\tag{7}$$

式(7)两边均有 $\boldsymbol{x}$，无法直接求解，可令

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}\left(\nabla F_\sigma(\boldsymbol{x})/\boldsymbol{x}\right)$$

则得到迭代重加权形式的求解算法 IRSL0_1

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+(\lambda/2)\boldsymbol{W}^{(k)}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

此处为便于表达，$\boldsymbol{W}^{(k)}(\boldsymbol{x})$ 记作了 $\boldsymbol{W}^{(k)}$。与 FOCUSS 等算法不同之处在于，IRSL0_1 的第 k 次反馈权值不仅依赖 $\boldsymbol{x}^{(k)}$，同时还依赖 σ_k。若使用近似 Lp 函数，则还需要更新 p_k。

4.3 二阶迭代求解算法 IRSL0_2

在式(6)两边右乘 $\boldsymbol{x}$，同时考虑到所有的解均应位于 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\}$ 内，于是有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{y}\tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$，为表达方便，下面记作 $\boldsymbol{W}$。与 4.2 节类似，式(8)隐含着一种迭代重加权算法。

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\left(\boldsymbol{W}^{(k)}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{W}^{(k)}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{y}$$

可以看出，IRSL0_2 算法需要计算代理逼近函数的 Hess 矩阵，并用其正定部分构成反馈权值矩阵，且同步更新平滑参数 σ_k 与 p_k。限于篇幅，4.2 节并未给出常用代理函数的一阶梯度。在此给出文献中几种代理函数的 IRSL0_2 反馈权值矩阵。

(1)高斯函数[2]：

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}\left(\exp\left(-\boldsymbol{x}^2/2\sigma^2\right)/\sigma^2\right)$$

(2)双曲正切函数[11]：

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{ta}}(\boldsymbol{x})=\frac{4}{\sigma^2}\mathrm{diag}\left(C^{-2}(\boldsymbol{x})+\frac{2\boldsymbol{x}^2}{\sigma^2}D^{-1}(\boldsymbol{x})C^{-3}(\boldsymbol{x})\right)$$

其中 $C(\boldsymbol{x})=D(\boldsymbol{x})+E(\boldsymbol{x})$，且有

$$\left.\begin{aligned}D(\boldsymbol{x})&=\exp\left(\boldsymbol{x}^2/2\sigma^2\right)\\E(\boldsymbol{x})&=\exp\left(-\boldsymbol{x}^2/2\sigma^2\right)\end{aligned}\right\}$$

(3)反正切函数[10]：

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{ac}}(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{\boldsymbol{x}^4}{16\sigma^2}+\sigma^2\right)^{-1}\right)$$

(4)近似 Lp 函数[17]：

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{Lp}}(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}\left(p(\boldsymbol{x}^2+\sigma^2)^{p/2-2}\left((1+p)\boldsymbol{x}^2+\sigma^2\right)\right)$$

在迭代过程中更新 σ_k 和 p_k 两个参数。

(5)高斯和函数：

受部分响应波形构造的启发，设计平移相加的高斯函数来抵消波形的旁瓣起伏，达到减小凹区间影响的目的。单变量高斯和函数的表达式为：

$$f_{\rm sg}(x)=0.5{\rm e}^{1/8}\left(E(x-0.5\sigma)+E(x+0.5\sigma)\right)$$

该函数的 Hess 矩阵正定部分构成的权值矩阵为

$$\boldsymbol{W}_{\rm sg}(\boldsymbol{x})=\frac{{\rm e}^{1/8}}{2\sigma^2}{\rm diag}\left(E(\boldsymbol{x}-0.5\sigma)+E(\boldsymbol{x}+0.5\sigma)\right)$$

$E(\boldsymbol{x})$ 定义同上。

5 对算法的说明

5.1 复杂度

(1)改进的 SL0 复杂度是 T 的线性函数，T 表示 SL0 算法的参数空间维数。(2)对变范数 FOCUSS，若总的迭代次数不变，则复杂度不变，每次迭代复杂度约为 $O(M^3)$。(3)IRSL0_2 仅使用 $\nabla^2 F_\sigma(\boldsymbol{x})$ 正定部分，而 IRSL0_1 使用了 $\nabla F_\sigma(\boldsymbol{x})$ 的全部分量，后者复杂度较大，且和使用函数有关，实验结论见 6.4 节。

5.2 参数设定与收敛性

参数 λ 和信噪比 SNR 有密切的关系[16]，为此，假设 SNR(dB) 已知，使用 $\lambda=||\boldsymbol{y}||^2 10^{(-{\rm SNR}/10)}/N$ 来计算。对于 IRSL0_1，其收敛性的证明可以参考文献[19]的收敛性研究方法，只需要将正则化部分替换为 SL0 的代理函数即可。对于 IRSL0_2，因为此时将其考虑为一个 CCCP 过程，其收敛性已有结论。

6 数值仿真与稳健性说明

如无特别说明，仿真条件设定如下：$N=390$，$M=80$，信号稀疏度 $K=18$，产生随机支撑的 ±1 信号。运行平台为 ThinkPad T420 笔记本，Winxp 系统，2G 内存，仿真软件为 MatlabR2011a。恢复成功是指 ${\rm supp}(\hat{\boldsymbol{x}}_K)$=${\rm supp}(\boldsymbol{x})$。每种算法均仿真 200 次，求其平均恢复成功率，算法停止规则为到达最小参数值即停止。

6.1 平滑逼近效果度量

图 2 给出了使用参数调整策略后算法性能提升效果，可以看出，增大参数维度，即经过平滑处理后，SL0 和变范数 FOCUSS 算法(对每个 p 固定迭代向下取整的 $60/T$ 次)均获得了明显的性能提升。其中 SL0 的 $\sigma\in[2,0.001]$，FOCUSS 的 $p\in[1,0.1]$。信噪比定义为

$${\rm SNR(dB)}=20\lg\left(\|\boldsymbol{Ax}\|_2/\|\boldsymbol{n}\|_2\right)$$

图 2 同时给出了 IRSL0_1 和 IRSL0_2 在不同信噪比下的恢复概率。为公平起见，和 SL0 一样，此二者也使用高斯代理函数，且使用最大的参数维度 $T=25$。结论是，本文所提出的迭代算法虽然复杂度有所提升，但在恢复性能上明显要优于平滑后 SL0 和变范数 FOCUSS。

6.2 使用不同代理函数的 IRSL0 算法

本实验的目的是为了揭示不同代理函数对本文所提出算法的性能影响。图 3 给出的是本文所提出算法分别使用反正切函数(arctan)，高斯函数(gauss)，双曲正切函数(tangent)以及高斯和函数(sumgauss)和近似 p 范数(alp)情况下的恢复概率。从仿真结果看，反正切函数和本文所提出的高斯和函数表现最佳，其他函数表现稍差。对 IRSL0_2 也有类似结论，限于篇幅，其仿真结果未给出。

为解释图 3 中各函数仿真结果的差异，图 4 给出了 $\sigma=1$ 时的 4 类函数二阶导数。

观察图 4，得到的结论是，对于本文所提出的算法，应尽量选择“凹度”较小，即二阶导数负区间中函数绝对值较小的代理函数。

6.3 稀疏度的影响

已经知道，局部解的数目和信号的稀疏度 K 密切相关[16]，K 值越大，就会出现越多的局部解，为了研究 K 值对算法性能的影响，设定 SNR=100 dB，

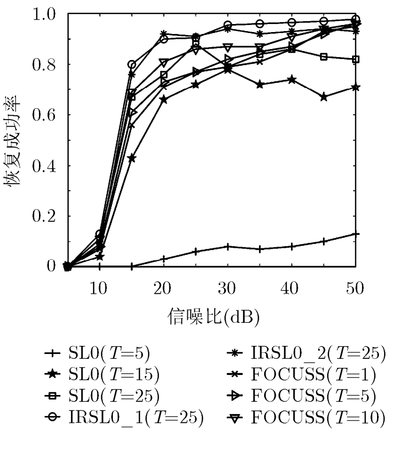

图 2 平滑效果对恢复概率的影响

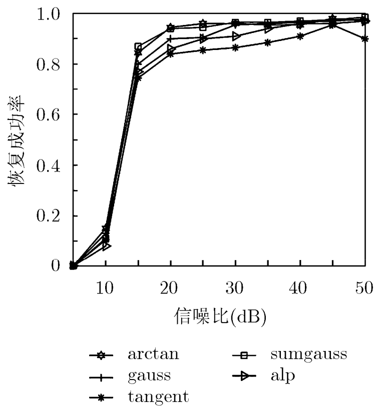

图 3 不同代理函数对 IRSL0_1 恢复性能的影响

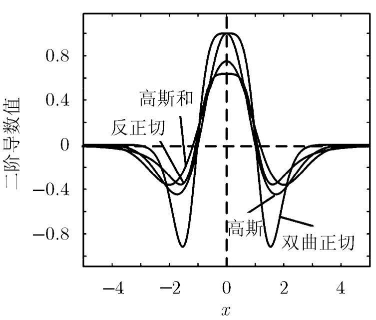

图 4 不同代理函数的二阶导数

在这种近似无噪的条件下仿真了 3 种算法使用本文提出的高斯和函数时的恢复概率，如图 5 所示。

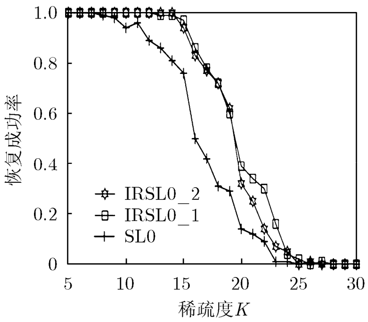

图 5 不同稀疏度对恢复性能的影响

从图 5 中可以看出，当 $K<15$ 时，IRSL0_1 和 IRSL0_2 可以完全恢复信号，但 SL0 不能。整体上看，本文算法有能力处理更为“稠密”的信号，而且 IRSL0_1 略有优势。

6.4 运算时间

仿真条件为，SNR=50 dB，信号稀疏度 $K=15$，$T=25$，每种算法运行 100 次，记录其累计运行时间(其中包括产生随机稀疏信号的运算时间)。 结果如表 1 所示。结合前面仿真结果，本文所提出的高斯和函数与反正切函数在 IRSL0_2 中恢复概率高且运算量适当，具有实用价值。

表 1 使用不同代理函数的算法运算时间(s)

算法	代理函数				
	gauss	tangent	arctan	sumgauss	alp
SL0	3.0781	4.3750	2.7969	4.4219	4.7251
IRSL0_1	45.4531	51.2188	49.4126	48.0225	59.2363
IRSL0_2	11.5637	14.7188	**12.6563**	**11.6719**	13.7628

6.5 关于稳健性的说明

数值仿真证实，本文工作提高了 L0 范数平滑逼近的稳健性，这种性能增益的获得，本质上来自 3 个方面：(1)对 2.1 节和 2.2 节的两种逼近方式，设计了参数平滑改进策略，使用平滑参数的算法可以有效避免提前陷入局部解的风险，性能提升效果见 6.1 节仿真。(2)4.2 节和 4.3 节所获得的两种迭代重加权运算框架，具有较强的抗噪能力，且在相同稀疏度下，需要较少的测量值，性能远优于原始 SL0 类算法，见 6.1 节和 6.3 节仿真。(3)所设计的代理函数，其凹凸特性优良，且运算量适当，尤其适合于本文所提出的迭代重加权框架，实用性强于其它函数，见 6.2 节和 6.4 节仿真。

7 结束语

本文将 L0 范数平滑逼近问题划分为基于代理函数和基于先验概率密度两类，分别对其目标函数的凹凸特性进行分析，以此为基础提出了基于参数调整策略的改进算法，仿真表明改进策略可明显提升恢复能力。另一个贡献在于，基于牛顿方向推导了一个运算框架，形成两种迭代重加权形式的恢复算法，见诸文献的代理函数均可代入本文的框架进行运算。数值运算证实，本文算法虽然运算量有所提高，但抗噪声性能明显高于 SL0，具有很好的应用潜力。事实上，如果将高斯代理函数代入本文的 IRSL0_2，就得到了 ISL0，所以本文工作是 ISL0 的广义形式。

此外，通过数值仿真，比较了不同代理函数对恢复性能的影响，本文所提出的高斯和函数表现优良。最后，给出了代理函数的初步选择准则，关于“好”的代理函数的设计准则与理论上深入的性能分析，有待进一步研究。

参 考 文 献

[1] Candès E J and Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21–30.

[2] Mohimani H, Zadeh M, and Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed L0 norm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(1): 289–301.

[3] Hyder M M and Mahata K. An improved smoothed L0 approximation algorithm for sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(4): 2194–2205.

[4] Lv J, Huang L, Shi Y, *et al*.. Inverse synthetic aperture radar imaging via modified smoothed L0 norm[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2014, 13(7): 1235–1238.

[5] Liu Z, You P, Wei X, *et al*.. Dynamic ISAR imaging of maneuvering targets based on sequential SL0[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2013, 10(5): 1041–1045.

[6] Guo L and Wen X. SAR image compression and reconstruction based on compressed sensing[J]. *Journal of Information & Computational Science*, 2014, 11(2): 573–579.

[7] Liu Z, Wei X, and Li X. Aliasing-free micro-Doppler analysis based on short-time compressed sensing[J]. *IET Signal Processing*, 2013, 8(2): 176–187.

[8] Liu T and Zhou J. Improved smoothed L0 reconstruction algorithm for ISI sparse channel estimation[J]. *The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications*, 2014, 21(2): 40–47.

[9] Ye X and Zhu W. Sparse channel estimation of pulse-shaping

multiple-input-multiple-output orthogonal frequency division multiplexing systems with an approximate gradient L2-SL0 reconstruction algorithm[J]. *IET Communications*, 2014, 8(7): 1124–1131.

[10] 王军华, 黄知涛, 周一宇, 等. 基于近似 L0 范数的稳健稀疏重构算法[J]. 电子学报, 2012, 40(6): 1185–1189.
Wang Jun-hua, Huang Zhi-tao, Zhou Yi-yu, *et al*.. Robust sparse recovery based on approximate L0 norm[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(6): 1185–1189.

[11] 赵瑞珍, 林婉娟, 李浩, 等. 基于光滑L0范数和修正牛顿法的压缩感知重建算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2012, 24(4): 478–484.
Zhao Rui-zhen, Lin Wan-juan, Li Hao, *et al*.. Reconstruction algorithm for compressive sensing based on smoothed L0 norm and revised newton method[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphic*, 2012, 24(4): 478–484.

[12] 杨良龙, 赵生妹, 郑宝玉, 等. 基于 SL0 压缩感知信号重建的改进算法[J]. 信号处理, 2012, 28(6): 834–841.
Yang Liang-long, Zhao Sheng-mei, Zheng Bao-yu, *et al*.. The improved reconstruction algorithm for compressive sensing on SL0[J]. *Signal Processing*, 2012, 28(6): 834–841.

[13] 余付平, 沈堤. 基于拟牛顿方向的改进平滑 L0 算法[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(22): 215–218.
Yu Fu-ping and Shen Di. Improved smoothed L0 approximation algorithm based on Quasi-Newton direction[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2013, 49(22): 215–218.

[14] 贺亚鹏, 庄珊娜, 张燕洪, 等. 一种基于交叉验证的稳健 SL0 目标参数提取算法[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(1): 64–68.
He Ya-peng, Zhuang Shan-na, Zhang Yan-hong, *et al*.. Cross validation based robust-SL0 algorithm for target parameter extraction[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(1): 64–68.

[15] 邱伟, 赵宏钟, 陈建军, 等. 基于平滑 L0 范数的高分辨雷达一维成像研究[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(12): 2869–2874.
Qiu Wei, Zhao Hong-zhong, Chen Jian-jun, *et al*.. High-resolution radar one-dimensional imaging based on smoothed L0 norm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(12): 2869–2874.

[16] Gorodnitsky I F and Rao B D. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: a reweighted minimum norm algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(3): 600–616.

[17] Pant J K, Lu W, and Antoniou A. New improved algorithms for compressive sensing based on Lp norm[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2014, 61(3): 198–202.

[18] Yuille A L and Rangarajan A. The concave-convex procedure [J]. *Neural Computer*, 2003, 15(4): 915–936.

[19] Rao B D, Engan K, Cotter S F, *et al*.. Subset selection in noise based on diversity measure minimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(3): 760–770.

王 峰： 男，1978 年生，博士生，讲师，研究方向为稀疏贝叶斯学习、基于压缩感知的通信信号处理.

向 新： 男，1971 年生，博士，教授，研究方向为通信信号处理、超宽带通信与综合航电系统.

易克初： 男，1943 年生，教授，博士生导师，研究方向为无线通信、扩频通信.

熊 磊： 男，1976 年生，博士，副教授，研究方向为模式识别、机器学习.