

## 不确定系统鲁棒协方差交叉融合稳态 Kalman 滤波器

王雪梅<sup>①②</sup> 刘文强<sup>①</sup> 邓自立<sup>\*①</sup>

<sup>①</sup>(黑龙江大学电子工程学院 哈尔滨 150080)

<sup>②</sup>(黑龙江工商学院计算机科学与技术系 哈尔滨 150025)

**摘要:** 针对带不确定模型参数和噪声方差的线性离散多传感器系统, 基于极大极小鲁棒估值原理, 该文提出一种鲁棒协方差交叉(CI)融合稳态 Kalman 滤波器。首先, 用引入虚拟噪声补偿不确定模型参数, 把模型参数和噪声方差两者不确定的多传感器系统转化为仅噪声方差不确定的系统。其次, 应用 Lyapunov 方程证明局部鲁棒 Kalman 滤波器的鲁棒性, 进而保证 CI 融合 Kalman 滤波的鲁棒性, 且证明了 CI 融合器的鲁棒精度高于每个局部滤波器的鲁棒精度。最后, 给出一个仿真例子来说明如何搜索不确定参数的鲁棒域, 并验证所提出的鲁棒 Kalman 滤波器的优良性能。

**关键词:** 多传感器信息融合; 不确定系统; 鲁棒 Kalman 滤波器; 虚拟噪声; 协方差交叉融合

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2015)08-1900-06

DOI: 10.11999/JEIT141515

## Robust Covariance Intersection Fusion Steady-state Kalman Filter for Uncertain Systems

Wang Xue-mei<sup>①②</sup> Liu Wen-qiang<sup>①</sup> Deng Zi-li<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Electronic Engineering College, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

<sup>②</sup>(Department of Computer Science and Technology, Heilongjiang Technology and Business College, Harbin 150025, China)

**Abstract:** For the linear discrete time multisensor system with uncertain model parameters and noise variances, a Covariance Intersection (CI) fusion robust steady-state Kalman filter based on the minimax robust estimation principle is presented. Firstly, introducing the fictitious noise, the model parameter uncertainty can be compensated, so the multisensory system with both the model parameter and noise variance uncertainties is converted into that with only uncertain noise variances. Secondly, using the Lyapunov equation, the robustness of the local robust Kalman filter is proved, so the robustness of the CI fused Kalman filter is guaranteed and it is proved that the robust accuracy of the CI fuser is higher than that of each local filter. Finally, a simulation example shows that how to search the robust region of uncertain parameters and shows the good performance of the proposed robust Kalman filter.

**Key words:** Multisensor information fusion; Uncertain system; Robust Kalman filter; Fictitious noise; Covariance Intersection (CI) fusion

### 1 引言

信息融合的主要目的是得到系统状态的一个融合估值器, 这个估值器是由多传感器系统中的局部观测数据或者局部状态估值融合而成, 它的精度要高于每一个局部估值的精度<sup>[1]</sup>。随着信息科学技术的发展, 为了改善系统状态的估计精度, 多传感器信息融合 Kalman 滤波在国内外引起了广泛关注, 也已经被广泛地应用到包括国防、导航、信号处理、无人机、GPS 定位等多个领域<sup>[2-4]</sup>。比较常用的两

种 Kalman 滤波融合方法是集中式融合和分布式融合<sup>[5,6]</sup>。对于分布式融合方法, 有按矩阵加权、按对角阵加权和按标量加权的 3 种最优加权状态融合方法。为了得到最优加权状态融合 Kalman 滤波器, 要求计算局部 Kalman 滤波器误差方差和互协方差, 而在实际应用中, 存在互协方差未知不确定, 或者互协方差计算复杂等问题<sup>[2]</sup>。为了克服这种局限性, Julier 和 Uhlmann 在文献[2,7,8]中提出了带未知互协方差系统协方差交叉(Covariance Intersection, CI)融合算法, 并被进一步发展<sup>[9-12]</sup>, 且广泛的应用于许多领域<sup>[13-15]</sup>。

经典 Kalman 滤波器的设计前提是要求系统的

2014-11-27 收到, 2015-03-27 改回, 2015-06-08 网络优先出版

国家自然科学基金(60874063, 60374026)资助课题

\*通信作者: 邓自立 dzl@hlju.edu.cn

模型参数和噪声方差都是精确已知的, 否则 Kalman 滤波器性能就会降低甚至可能引起滤波发散<sup>[16]</sup>。这推动了鲁棒 Kalman 滤波器的研究, 所谓鲁棒 Kalman 滤波器是指, 对于所有容许的不确定性, Kalman 滤波器的实际滤波误差方差有一个最小上界, 这个特性为 Kalman 滤波器的鲁棒性<sup>[17]</sup>。

鲁棒 Kalman 滤波器通常采用的两种重要方法是 Riccati 方程方法<sup>[5,17,18]</sup>和线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequation, LMI)方法<sup>[15,16,19]</sup>。两种方法主要针对噪声方差精确已知, 模型参数不确定性的系统。

到目前为止, 模型参数和噪声方差都不确定的鲁棒 Kalman 滤波器很少被研究<sup>[13,20-22]</sup>, 文献[20,22]对带噪声方差不确定的系统提出鲁棒 CI 融合 Kalman 滤波器, 但模型参数是精确已知的。

对于模型参数和噪声方差都不确定的多传感器系统, 本文用虚拟噪声补偿技术补偿模型参数不确定性, 把参数和噪声方差两者不确定系统鲁棒滤波问题转化为仅带不确定噪声方差系统的鲁棒滤波问题。应用极大极小鲁棒估值原理<sup>[23]</sup>, 基于带噪声方差保守方差上界的最坏情形保守系统, 提出了一种鲁棒 CI 融合稳态 Kalman 滤波器, 用 Lyapunov 方程方法证明了其鲁棒性, 并证明它的鲁棒精度高于每个局部滤波器的鲁棒精度。为了保证 Kalman 滤波器的鲁棒性, 给出了不确定参数鲁棒域的搜索方法。

## 2 局部鲁棒稳态 Kalman 滤波器

考虑带不确定模型参数和噪声方差的多传感器系统:

$$\mathbf{x}(t+1) = (\Phi_e + \Delta\Phi)\mathbf{x}(t) + \Gamma\mathbf{w}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{H}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (2)$$

$$\Phi = \Phi_e + \Delta\Phi \quad (3)$$

其中,  $t \geq 0$  是离散时间, 系统在时刻  $t$  的状态  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$  是第  $i$  个子系统的观测, 输入噪声  $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^r$ ,  $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$  是第  $i$  个子系统的观测噪声。  $\Phi$  是真实的状态转移矩阵,  $\Phi_e$  是  $\Phi$  的一个已知估值或近似值;  $\Delta\Phi$  是不确定参数的扰动矩阵, 满足

$$\Delta\Phi \in \mathcal{R}_{\Delta\Phi} \quad (4)$$

$\mathcal{R}_{\Delta\Phi}$  是一个事先规定好的或者是可以搜索到的域。  $\Gamma$  和  $\mathbf{H}_i$  是已知常阵。

**假设 1**  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{v}_i(t)$  是带零均值的不相关白噪声, 它们分别有未知不确定的实际噪声方差  $\bar{Q}$  和  $\bar{R}_i$ , 相应的已知保守上界方差分别为  $Q$  和  $R_i$ , 满足式(5):

$$\bar{Q} \leq Q, \quad \bar{R}_i \leq R_i, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (5)$$

**假设 2** 多传感器系统式(1)~式(3)是完全可观和完全可控的, 且  $\Phi$  为稳定矩阵。

问题是设计鲁棒 CI 融合稳态 Kalman 滤波器。

引入一个带零均值和保守上界方差为  $\Delta_\xi > 0$  的虚拟白噪声  $\xi(t)$ , 用它来补偿式(1)中的不确定模型参数偏差项  $\Delta\Phi\mathbf{x}(t)$ , 根据极大极小鲁棒估计原理<sup>[23]</sup>, 考虑带噪声方差保守上界  $Q, R_i$  和  $\Delta_\xi$  的最坏情形保守系统

$$\mathbf{x}_e(t+1) = \Phi_e\mathbf{x}_e(t) + \xi(t) + \Gamma\mathbf{w}(t) \quad (6)$$

$$\mathbf{y}_e(t) = \mathbf{H}_i\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (7)$$

根据假设 2, 保守的局部稳态最优 Kalman 滤波器为

$$\hat{\mathbf{x}}_{ei}(t|t) = \Psi_i\hat{\mathbf{x}}_{ei}(t-1|t-1) + \mathbf{K}_i\mathbf{y}_{ei}(t) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i &= [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i\mathbf{H}_i]\Phi_e \\ \mathbf{K}_i &= \Sigma_i\mathbf{H}_i^T(\mathbf{H}_i\Sigma_i\mathbf{H}_i^T + \mathbf{R}_i)^{-1} \\ \mathbf{P}_i &= [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i\mathbf{H}_i]\Sigma_i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{I}_n$  为  $n \times n$  单位阵,  $\Psi_i$  是稳态矩阵, 保守的预报误差方差  $\Sigma_i$  满足 Riccati 方程:

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= \Phi_e \left[ \Sigma_i - \Sigma_i\mathbf{H}_i^T(\mathbf{H}_i\Sigma_i\mathbf{H}_i^T + \mathbf{R}_i)^{-1}\mathbf{H}_i\Sigma_i \right] \Phi_e^T \\ &+ \Gamma Q \Gamma^T + \Delta_\xi \end{aligned} \quad (10)$$

其中记号  $T$  表示转置。定义保守的 Kalman 滤波误差  $\tilde{\mathbf{x}}_{ei}(t|t) = \mathbf{x}_e(t) - \hat{\mathbf{x}}_{ei}(t|t)$ ,  $\mathbf{x}_e(t)$  是式(6)的状态。

应用式(6)和式(8), 得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{ei}(t|t) &= \Psi_i\tilde{\mathbf{x}}_{ei}(t-1|t-1) + [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i\mathbf{H}_i] \\ &\cdot [\Gamma\mathbf{w}(t-1) + \xi(t-1)] - \mathbf{K}_i\mathbf{v}_i(t) \end{aligned} \quad (11)$$

于是保守局部滤波互协方差  $\mathbf{P}_{ij} = E[\tilde{\mathbf{x}}_i(t|t)\tilde{\mathbf{x}}_j^T(t|t)]$  ( $E$  为数学期望符号) 和误差方差  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{ii}$  满足保守 Lyapunov 方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ij} &= \Psi_i\mathbf{P}_{ij}\Psi_j^T + [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i\mathbf{H}_i](\Gamma Q \Gamma^T + \Delta_\xi) \\ &\cdot [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_j\mathbf{H}_j]^T + \mathbf{K}_i\mathbf{R}_i\mathbf{K}_j^T\delta_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (12)$$

$\delta_{ij}$  是克罗内克  $\delta$  函数,  $\delta_{ij} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0(i \neq j)$ 。

**注 1** 式(8)中的保守观测  $\mathbf{y}_{ei}(t)$  是不可用的, 它是由带保守上界  $Q, R_i$  和  $\Delta_\xi$  的保守系统式(6)和式(7)生成, 只有实际观测  $\mathbf{y}_i(t)$  是已知的, 它由带实际方差  $\bar{Q}$  和  $\bar{R}_i$  实际系统式(1)和式(2)生成。因此, 在式(8)中用已知的实际观测  $\mathbf{y}_i(t)$  替代保守观测  $\mathbf{y}_{ei}(t)$  得到实际局部 Kalman 滤波器。

$$\hat{\mathbf{x}}_i(t|t) = \Psi_i\hat{\mathbf{x}}_i(t-1|t-1) + \mathbf{K}_i\mathbf{y}_i(t) \quad (13)$$

从式(1)和式(13)得到实际滤波误差  $\tilde{\mathbf{x}}_i(t|t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t|t)$  为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_i(t|t) &= \Psi_i\tilde{\mathbf{x}}_i(t-1|t-1) + [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i\mathbf{H}_i] \\ &\cdot [\Gamma\mathbf{w}(t-1) + \Delta\Phi\mathbf{x}(t-1)] - \mathbf{K}_i\mathbf{v}_i(t) \end{aligned} \quad (14)$$

所以, 相应的实际局部滤波误差方差和互协方差为

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ij} = & \Psi_i \bar{P}_{ij} \Psi_j^T + [I_n - K_i H_i] \\ & \cdot [\Gamma \bar{Q} \Gamma^T + \Delta \Phi X \Delta \Phi^T] [I_n - K_j H_j]^T \\ & + [I_n - K_i H_i] \Delta \Phi C_j^T \Psi_j^T + \Psi_i C_i^T \Delta \Phi^T \\ & \cdot [I_n - K_j H_j]^T + K_i \bar{R}_i K_j^T \delta_{ij} \end{aligned} \quad (15)$$

其中, 定义  $X = E[x(t)x^T(t)]$ ,  $C_i = E[x(t)\tilde{x}_i^T(t|t)]$ 。由式(1)和  $\Phi$  的稳定性,  $X$  满足 Lyapunov 方程:

$$X = \Phi X \Phi^T + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T \quad (16)$$

由式(12), 得到  $C_i$  满足 Lyapunov 方程:

$$\begin{aligned} C_i = & \Phi C_i \Psi_i^T + \Phi X \Delta \Phi^T [I_n - K_i H_i]^T \\ & + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T [I_n - K_i H_i]^T \end{aligned} \quad (17)$$

引理 1<sup>[1]</sup> Lyapunov 方程

$$P = F P F^T + U \quad (18)$$

其中  $U$  是对称矩阵, 如果矩阵  $F$  是稳定的(它的所有特征值都在单位圆内), 且  $U$  是正定(半正定)矩阵, 则该 Lyapunov 方程存在唯一解  $P$  对称且正定(半正定)。

**定理 1** 对带不确定模型参数和噪声方差的多传感器系统式(1), 式(2), 在假设 1 和假设 2 下, 实际局部稳态 Kalman 滤波器式(13)是鲁棒的, 即存在一个鲁棒域  $\mathcal{R}_{\Delta\Phi_i}$ , 使得对于所有容许的不确定模型参数扰动  $\Delta\Phi \in \mathcal{R}_{\Delta\Phi_i}$ , 及满足(5)的不确定噪声方差  $\bar{Q}$  和  $\bar{R}_i$ , 相应的实际滤波误差方差阵  $\bar{P}_i$  有上界  $P_i$ , 即

$$\bar{P}_i < P_i \quad (19)$$

且称实际局部 Kalman 滤波器为鲁棒局部 Kalman 滤波器, 并称  $\mathcal{R}_{\Delta\Phi_i}$  是第  $i$  个局部鲁棒 Kalman 滤波器不确定参数的鲁棒域。

**证明** 定义  $\Delta P_i = P_i - \bar{P}_i$ , 式(12)减去式(15)得到 Lyapunov 方程:

$$\Delta P_i = \Psi_i \Delta P_i \Psi_i^T + U_i \quad (20)$$

其中定义:

$$\begin{aligned} U_i = & [I_n - K_i H_i] \Gamma (Q - \bar{Q}) \Gamma^T [I_n - K_i H_i]^T \\ & + K_i (R - \bar{R}_i) K_i^T + V_i \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} V_i = & [I_n - K_i H_i] \Delta_\zeta [I_n - K_i H_i]^T - [I_n - K_i H_i] \\ & \cdot \Delta \Phi X \Delta \Phi^T [I_n - K_i H_i]^T - [I_n - K_i H_i]^T \\ & \cdot \Delta \Phi C_i \Psi_i^T - \Psi_i C_i^T \Delta \Phi^T [I_n - K_i H_i] \end{aligned} \quad (22)$$

根据稳态 Kalman 滤波理论<sup>[24]</sup>, 由于  $P_i > 0$ ,  $\Sigma_c > 0$  和式(7)知  $[I_n - K_i H_i] = P_i \Sigma_i^{-1}$  是非奇异阵, 并且由于  $\Delta_\zeta > 0$  有

$$[I_n - K_i H_i] \Delta_\zeta [I_n - K_i H_i]^T > 0 \quad (23)$$

于是当  $\Delta\Phi \rightarrow 0$  时

$$V_i \rightarrow [I_n - K_i H_i] \Delta_\zeta [I_n - K_i H_i]^T > 0 \quad (24)$$

故当  $\Delta\Phi$  充分小的时候, 存在一个充分小的域  $\mathcal{R}_{\Delta\Phi_i}$ , 对于所有容许的不确定模型参数  $\Delta\Phi \in \mathcal{R}_{\Delta\Phi_i}$ , 都有  $V_i > 0$ , 进而由式(4)有

$$U_i > 0 \quad (25)$$

由式(20)根据引理 1, 得到  $\Delta P_i > 0$ , 即只要  $\Delta\Phi \in \mathcal{R}_{\Delta\Phi_i}$ , 就有  $\bar{P}_i < P_i$ 。证毕

**注 2** 对式(19)两侧同时做矩阵迹运算得

$$\text{tr} \bar{P}_i < \text{tr} P_i, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (26)$$

记号  $\text{tr}$  表示矩阵的迹。由文献[20], 称  $\text{tr} P_i$  为鲁棒精度,  $\text{tr} \bar{P}_i$  为实际精度。式(26)表明局部鲁棒 Kalman 滤波器的实际精度高于其鲁棒精度。

### 3 鲁棒稳态 CI 融合 Kalman 滤波器

根据 CI 融合原理<sup>[2]</sup>对式(1)~式(3), 本文提出鲁棒稳态 CI 融合 Kalman 滤波器为

$$\hat{x}_{\text{CI}}(t|t) = P_{\text{CI}} \sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} \hat{x}_i(t|t) \quad (27)$$

$$P_{\text{CI}} = \left[ \sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} \right]^{-1} \quad (28)$$

其中  $\hat{x}_i(t|t)$  是局部鲁棒 Kalman 滤波器, 最优加权系数  $\omega_i \geq 0$ , 满足约束:

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_L = 1 \quad (29)$$

极小化性能指标  $J = \text{tr} P_{\text{CI}}$ :

$$\begin{aligned} \min J = & \min \text{tr} P_{\text{CI}} \\ = & \min_{\substack{\omega_i \in [0,1] \\ \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_L = 1}} \text{tr} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} \right]^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

这是一个在  $R^L$  维欧氏空间中带约束非线性最优化问题, 可以用 Matlab 工具箱中的“fmincon”(最优化工具箱)求解。由式(28)有

$$x(t) = P_{\text{CI}} \sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} x(t) \quad (31)$$

用式(31)减式(27)得到实际滤波误差:

$$\tilde{x}_{\text{CI}}(t|t) = P_{\text{CI}} \sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} \tilde{x}_i(t|t) \quad (32)$$

由式(32)得到实际滤波误差方差为

$$\bar{P}_{\text{CI}} = P_{\text{CI}} \left[ \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \omega_i P_i^{-1} \bar{P}_{ij} P_j^{-1} \omega_j \right] P_{\text{CI}} \quad (33)$$

文献[20]证明了由局部滤波器鲁棒性可以得出 CI 融合滤波器也是鲁棒的, 即

$$\bar{P}_{\text{CI}} < P_{\text{CI}} \quad (34)$$

CI 融合滤波器的鲁棒域  $\mathcal{R}_{\Delta\Phi_{\text{CI}}}$  可由所有局部滤波器鲁棒域  $\mathcal{R}_{\Delta\Phi_i}$  的交集给出, 即

$$\mathcal{R}_{\Delta\Phi_{CI}} = \mathcal{R}_{\Delta\Phi_1} \cap \mathcal{R}_{\Delta\Phi_2} \cap \dots \cap \mathcal{R}_{\Delta\Phi_L} \quad (35)$$

由式(30)得出

$$\text{tr}P_{CI} < \text{tr}P_i, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (36)$$

对式(34)取矩阵迹运算，并由式(36)得到局部和 CI 融合鲁棒 Kalman 滤波器具有鲁棒精度关系：

$$\text{tr}\bar{P}_{CI} < \text{tr}P_{CI} < \text{tr}P_i, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (37)$$

这表明 CI 融合器的鲁棒精度高于每个局部滤波器的鲁棒精度，且 CI 融合器的实际精度高于它的鲁棒精度。

### 4 仿真分析

考虑带不确定模型参数和噪声方差的 2 传感器时变系统式(1)~式(3)，其中  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$  在

$$\text{仿真中取 } \Phi_e = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.3 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = 1.5, \quad R_1 = 6.5,$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 0.36 \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_1 = 1, \quad \bar{R}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}。其中 \delta 是$$

不确定的扰动参数，当  $\Delta\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$ ，对  $\Delta\Phi$  取欧

几里得范数得  $\|\Delta\Phi\| = |\delta|$ ，所以  $\Delta\Phi$  的鲁棒域  $\mathcal{R}_{\Delta\Phi}$  对应于  $\delta$  的鲁棒域  $\mathcal{R}_\delta$ ，即  $\mathcal{R}_{\Delta\Phi} = \mathcal{R}_\delta$ 。

以第 1 个子系统为例，取虚拟噪声上界方差  $\Delta_\xi = \alpha I_2$ ， $\alpha = 0.5$ ； $\bar{Q} = 1.0$ 。仿真图 1 为开口向下的抛物线，其横坐标为扰动参数  $\delta$ ，纵坐标为行列式  $\det V_1$ 。本例中易知扰动参数  $\delta$  的鲁棒域为  $\mathcal{R}_\delta(\bar{Q}) = \{\delta | \det V_1 > 0\}$ 。在这个鲁棒域内可保证  $V_i > 0$ ， $U_i > 0$ ，从而保证鲁棒性  $\bar{P}_i < P_i$ 。

利用二分搜索方法，图 1 中  $\delta$  在区间  $(-0.7762, 0.4332)$  内都有  $\det V_1 > 0$ ，同理对于第 2 个子系统，其扰动参数  $\delta$  在  $(-0.7781, 0.5375)$  区间时都有  $\det V_2 > 0$ 。即局部 Kalman 滤波器  $\hat{x}_1(t|t)$  和  $\hat{x}_2(t|t)$  扰动参数  $\delta$  的鲁棒域  $\mathcal{R}_{\delta_i}$  分别为  $-0.7762 < \delta_1 < 0.4332$  和

$-0.7781 < \delta_2 < 0.5375$ 。因为 CI 融合鲁棒域是两个局部 Kalman 滤波器  $\hat{x}_1(t|t)$  和  $\hat{x}_2(t|t)$  鲁棒域  $\mathcal{R}_{\delta_i}$  的交集，故 CI 融合器的鲁棒域为  $-0.7762 < \delta_{CI} < 0.4332$ 。

下面仿真结果均以第 1 个子系统为例。

当  $\alpha = 0.5$ ， $\bar{Q}$  从 0 变化到上界  $Q(1.5)$ ， $\Delta_\xi$  分取  $0.1I_2$ ， $0.3I_2$ ， $0.5I_2$ ， $0.7I_2$ ， $0.9I_2$ ，局部 Kalman 滤波器的鲁棒域随着  $\bar{Q}$  和  $\Delta_\xi$  变化如图 2 所示。从图 2 中可以看出无论虚拟噪声方差上界  $\Delta_\xi$  取哪一个值，随着  $\bar{Q}$  的增加，实际滤波器的鲁棒域都将变小。当  $\bar{Q} \leq Q$  时，总有  $\mathcal{R}_\delta(Q) \subset \mathcal{R}_\delta(\bar{Q})$ 。故  $\mathcal{R}_\delta(Q)$  是所有  $\bar{Q} \leq Q$  的公共鲁棒域。另一方面也看到随着预置  $\Delta_\xi$  的增加，相应  $\delta$  鲁棒域增大。因此，若预置鲁棒域大小，则可反求相应的虚拟噪声方差上界  $\Delta_\xi$ 。 $\det V_1$  随着不确定性  $\bar{Q}$  和  $\delta$  同时变换时对应的 3 维图如图 3 所示。

图 4 所示的 3 维图，是当  $\bar{Q}$  从 0 变化到  $Q$ ，虚拟噪声方差  $\Delta_\xi$  从  $0.1I_2$  变化到  $0.9I_2$  时，两个局部鲁棒 Kalman 滤波器鲁棒域，从图中可看出，当规定了虚拟噪声方差  $\Delta_\xi$  的值，且  $\bar{Q}$  增大时，滤波器的鲁棒域  $\mathcal{R}_{\delta_i}(\bar{Q})$ ， $i = 1, 2$  在减小；而当规定了  $\bar{Q}$  的值，且  $\Delta_\xi$  逐渐增加时，滤波器的鲁棒域  $\mathcal{R}_\delta(\Delta_\xi)$  在增加，这个结论与如图 2 中反映的结论相一致。

为了给出矩阵精度比较的几何解释，定义方差  $P_\theta, \theta = 1, 2, CI$  的协方差椭圆为满足  $\{x : x^T P_\theta^{-1} x = c\}$  的点轨迹，不失一般性取常量  $c = 1$ 。文献[24]中已证明， $P_1 \leq P_2$  等价于  $P_2$  的椭圆包含  $P_1$  的椭圆。图 5 给出了基于协方差椭圆的精度比较，可看到  $\bar{P}_i$  的椭圆被包含在  $P_i$  的椭圆内。 $\bar{P}_{CI}$  的椭圆被包含在  $P_{CI}$  的椭圆内，这验证精度关系式(19)和式(34)。

为了验证理论精度关系，图 6 给出进行 1000 次 Monte-Carlo 仿真实验得到的局部和 CI 融合的均方误差(Mean Square Error, MSE)曲线  $MSE_\theta(t), \theta = 1, 2, CI$ ，均方误差可看成是实际误差方差阵的采样方差的迹，直线代表相应的实际误差方差阵的迹，从图中可看到 MSE 曲线接近相应的直线，这验证了采样方差的一致性。

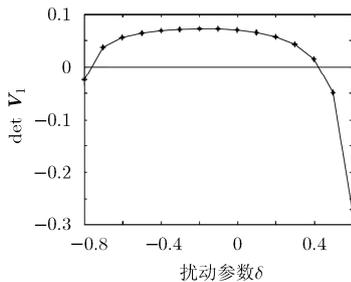


图 1 局部鲁棒 Kalman 滤波器  $\hat{x}_1(t|t)$  的鲁棒域  $\mathcal{R}_{\delta_1}$

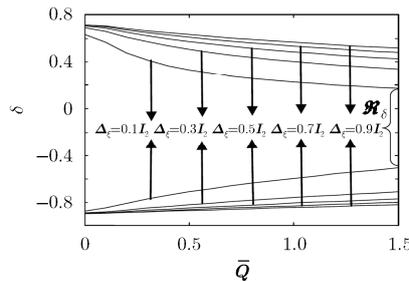


图 2 不确定模型参数  $\delta$  的鲁棒域随  $\bar{Q}$  和  $\Delta_\xi$  变化的曲线

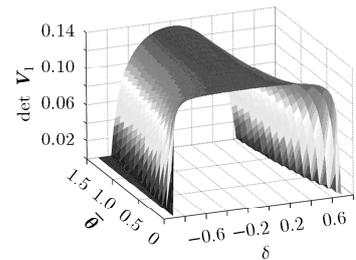


图 3  $\det V_1$  随着不确定性  $\delta$  和  $\bar{Q}$  的变化情况

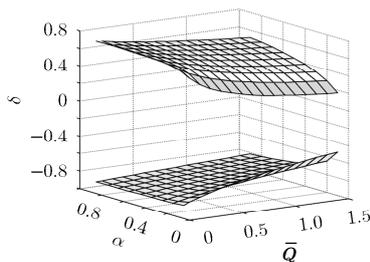


图4 局部鲁棒 Kalman 滤波器  $\hat{x}_1(t|t)$  鲁棒域随着  $\bar{Q}$  和  $\Delta_\xi$  的变化情况

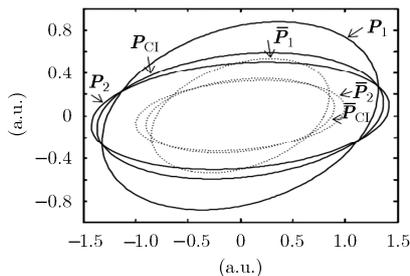


图5 基于协方差椭圆的局部和 CI 融合鲁棒 Kalman 滤波器的精度比较

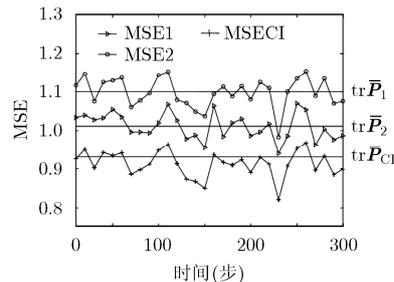


图6 局部和 CI 融合鲁棒 Kalman 滤波器的 MSE 曲线

当  $\Delta_\xi = 0.36I_2, \bar{Q} = 1, \delta = 0.3$  时, 保守和实际的滤波误差方差如表 1 所示, 表 1 验证了精度关系式 (26) 和式 (37), 即鲁棒 Kalman 滤波器的实际精度高于其鲁棒精度, 且 CI 融合器的鲁棒精度高于每一个局部滤波器的鲁棒精度。

表 1 鲁棒精度和实际精度的比较

$\text{tr}P_1(\text{tr}\bar{P}_1)$	$\text{tr}P_2(\text{tr}\bar{P}_2)$	$\text{tr}P_{CI}(\text{tr}\bar{P}_{CI})$
2.5077(1.0112)	2.2773(1.1005)	2.2208(0.9312)

当  $\Delta_\xi = 0.36I_2, \bar{Q} = 1, \delta = 0.3$  时, 在鲁棒局部滤波器、鲁棒 CI 融合滤波器之间的累积滤波误差平方和比较如图 7 所示。从图 7 可看出, 鲁棒 CI 融合滤波器的实际精度高于局部滤波器的实际精度。

## 5 结束语

对于带不确定模型参数和噪声方差的多传感器系统, 采用虚拟噪声补偿不确定模型参数, 将系统模型转化为仅带噪声方差不确定的多传感器系统。用极大极小鲁棒估计原理, 基于稳态 Kalman 滤波理论和带噪声方差保守上界的最坏情形保守多传感器系统, 提出了局部和 CI 融合鲁棒稳态 Kalman 滤波器方法。采用 Lyapunov 方程方法, 证明了所提出局部和 CI 融合稳态 Kalman 滤波器的鲁棒性, 即实际 Kalman 滤波误差方差有一个较小的保守上界, 这种证明方法不同于 Riccati 方程方法和 LMI 方法。

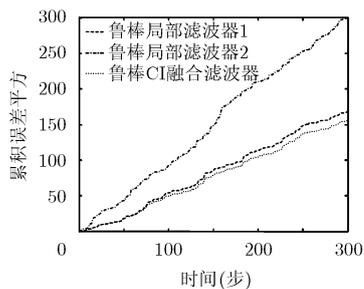


图7 累积滤波误差平方曲线比较

仿真例子给出了局部和 CI 融合滤波器鲁棒域的搜索方法, 并验证了鲁棒 CI 融合器精度高于鲁棒局部 Kalman 滤波精度, 结果表明本文提出的 CI 融合滤波器具有良好的性能。

## 参考文献

- [1] Hall D L and Llinas J. An introduction to multisensor data fusion[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1997, 85(1): 6-23.
- [2] Julier S J and Uhlmann J K. General Decentralized Data Fusion with Covariance Intersection. *Handbook of Multisensor Data Fusion: Theory and Practice*[M]. Second Edition, New York: CRC Press, 2008: 319-342.
- [3] Hajiyeve C G and Soken H E. Robust adaptive Kalman filter for estimation of UAV dynamics in the presence of sensor/actuator faults[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2013, 28(1): 376-383.
- [4] Le M S, Shin H S, Markham K, et al.. Cooperative allocation and guidance for air defence application[J]. *Control Engineering Practice*, 2014, 32: 236-244.
- [5] Feng J X, Wang Z D, and Zeng M. Distributed weighted robust Kalman filter fusion for uncertain systems with autocorrelated and cross-correlated noises[J]. *Information Fusion*, 2013, 14(1): 78-86.
- [6] Li X R, Zhu Y M, and Han C Z. Optimal linear estimation fusion-Part I: Unified fusion rules[C]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2003, 49(9): 2192-2208.
- [7] Julier S J and Uhlmann J K. Non-divergent estimation algorithm in the presence of unknown correlations[C]. *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, Albuquerque, 1997: 2369-2373.
- [8] Uhlmann J K. Covariance consistency methods for fault-tolerant distributed data fusion[J]. *Information Fusion*, 2003, 4(3): 201-215.
- [9] Julier S J and Uhlmann J K. Using covariance intersection for SLAM[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2007, 55(1): 3-20.
- [10] Sijts J and Lazar M. State fusion with unknown correlation: Ellipsoidal intersection[J]. *Automatica*, 2012, 48: 1874-1878.

- [11] Lazarus S B, Tsourdos A, Zbikowski R, *et al.* Robust localisation using data fusion via integration of covariance intersection and interval analysis[C]. International Conference on Control, Automation and Systems COEX, Seoul, Korea, 2007: 199–206.
- [12] Ferreira J and Waldmann J. Covariance intersection-based sensor fusion for sounding rocket tracking and impact area prediction[J]. *Control Engineering Practice*, 2007, 15(4): 389–409.
- [13] Qi W J, Zhang P, and Deng Z L. Robust sequential covariance intersection fusion kalman filtering over multi-agent sensor networks with measurement delays and uncertain noise variances[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(11): 2632–2642.
- [14] Gao Q, Chen S Y, Leung H R, *et al.* Covariance intersection based image fusion technique with application to pansharpening in remote sensing[J]. *Information Sciences*, 2010, 180(18): 3434–3443.
- [15] Deng Z L, Zhang P, Qi W J, *et al.* Sequential covariance intersection fusion Kalman filter[J]. *Information Sciences*, 2012, 189: 293–309.
- [16] Sriyananda H. A simple method for the control of divergence in Kalman filter algorithms[J]. *International Journal of Control*, 1972, 16(6): 1101–1106.
- [17] Lewis F L, Xie L H, and Popa D. Optimal and Robust Estimation[M]. Second Edition, New York: CRC Press, 2007: 315–340.
- [18] Qu X M and Zhou J. The optimal robust finite-horizon Kalman filtering for multiple sensors with different stochastic failure rates[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2013, 26(1): 80–86.
- [19] Deng Z L, Zhang P, Qi W J, *et al.* The accuracy comparison of multisensor covariance intersection fuser and three weighting fusers[J]. *Information Fusion*, 2013, 14(2): 177–185.
- [20] Qi W J, Zhang P, and Deng Z L. Robust weighted fusion Kalman filters for multisensor time-varying systems with uncertain noise variances[J]. *Signal Processing*, 2014(99): 185–200.
- [21] Qi W J, Zhang P, Nie G H, *et al.* Robust weighted fusion Kalman predictors with uncertain noise variances[J]. *Digital Signal Processing*, 2014(30): 37–54.
- [22] Qi W J, Zhang P, and Deng Z L. Robust weighted fusion time-varying Kalman smoothers for multisensory system with uncertain noise variances[J]. *Information Sciences*, 2014 (282): 15–37.
- [23] Qu X M. A mini-max fusion strategy in distributed multi-sensor system[C]. International Conference on System Science and Engineering, Xiamen, China, 2012: 330–333.
- [24] Kailath T, Sayed A H, and Hassibi B. Linear Estimation[M]. New York: Prentice Hall, 2000, 766–772.
- 王雪梅：女，1978年生，博士生，讲师，研究方向为信息融合、鲁棒 Kalman 滤波。
- 刘文强：男，1980年生，博士生，讲师，研究方向为信息融合、鲁棒 Kalman 滤波。
- 邓自立：男，1938年生，教授，博士生导师，研究方向为信息融合、鲁棒 Kalman 滤波。