基于ESPRIT算法的L型阵列MIMO雷达降维DOA估计

梁 浩* 崔 琛 代 林 余 剑
(合肥电子工程学院401室 合肥 230037)

摘 要：该文针对L型阵列MIMO雷达的2维角度估计问题，基于ESPRIT算法提出两种降维DOA估计方法。首先通过降维矩阵的设计及回波数据的降维变换，将高维回波数据转换至低维信号空间；然后分别基于特征分解和传播算子获得信号子空间的估计，最后利用ESPRIT算法实现2维空间角参量的联合估计及参数的自动配对。算法不牺牲阵列孔径，最大程度地降低了回波数据的维数，具有更低的运算复杂度。仿真结果验证了该文理论分析的正确性和算法的有效性。

关键词：MIMO雷达；L型阵列；降维ESPRIT；低复杂度
中图分类号： TN958 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2015)08-1828-08
DOI: 10.11999/JEIT141295

Reduced-dimensional DOA Estimation Based on ESPRIT Algorithm in MIMO Radar with L-shaped Array

Liang Hao Cui Chen Dai Lin Yu Jian
(401 *Laboratory*, *Electronic Engineering Institute*, *Hefei* 230037, *China*)

Abstract: In order to solve the issue of two dimensional angles estimation for MIMO radar with L-shaped array, two novel reduced-dimensional Direction Of Arrival (DOA) estimation methods using ESPRIT algorithm are proposed. Firstly, through the reduced-dimensional matrix design and reduced-dimensional transformation, the high dimensional received data can be transformed into a lower dimensional signal space. Then, the signal space can be achieved via the eigen-value decomposition and propagator operator method respectively, and two dimensional spatial angle parameters can be joint estimated using ESPRIT algorithm with automatic pairing. The proposed two methods remove data redundancy of high dimensional received data at the greatest degree without costing the aperture of array and have lower computation complexity. Simulation results verify the correctness of theoretical analysis and the effectiveness of proposed algorithm.

Key words: MIMO radar; L-shaped array; Reduced-dimensional ESPRIT; Low complexity

1 引言

以多输入多输出(MIMO)技术为基础体制的MIMO雷达系统[1,2]，在目标检测、参数估计、杂波抑制等方面具有诸多优势，成为近年来学术界研究的热点。L型阵列结构简单、阵列冗余度较小，能够实现空域目标2维角度定位，具有优于其他交叉阵列结构的DOA(Direction Of Arrival)估计性能[3]；此外，当收、发阵列采用L型结构时，意味着目标参数维度的扩展，对目标的描述也就更准确，因此深入研究L型阵列MIMO雷达的参数估计问题具有重要意义和实用价值。

目前对MIMO雷达参数估计的研究大多集中在单基地MIMO雷达1维角度估计以及双基地的2维角度估计，鉴于线性配置下的单/双基地MIMO雷达与线阵/平面阵的等效相似性，传统阵列信号处理中的超分辨参数估计算法ML (Maximum Likelihood), ESPRIT (Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Techniques)以及MUSIC (MUltiple SIgnal Classification)等被广泛应用于MIMO雷达的目标参数估计[4−10]中，并取得了一系列成果；而关于L型阵列配置下的MIMO雷达参数估计问题研究相对较少，仅有的研究：文献[11]基于DOA矩阵思想，通过划分L型阵列MIMO雷达所虚拟的平面阵，实现了目标2维角度的估计，并进一步提出联合对角化DOA矩阵方法解决了角度兼并问题；但该模型采用收发阵列垂直分置的L型配置，因此算法并不适用于收发均为L型配置的共置MIMO雷达。文献[12]建立了L型阵列配置的单基地MIMO雷达系统，并基于Capon

2014-10-09收到，2015-05-07改回，2015-06-08网络优先出版
国家自然科学基金(60702015)和电子工程学院院控科研基金(KY13A206)资助课题
*通信作者：梁浩 lhmailhappy@163.com

波束形成器的 MIMO-Capon 算法实现了目标方位角和俯仰角的 2 维估计；理论分析和仿真结果表明，L 型阵列配置的单基地 MIMO 雷达在实际阵元数相同的条件下，能够产生更多的虚拟阵元，提高目标的分辨能力，但算法需要 2 维的谱搜索；文献[13]针对文献[12]算法计算复杂度较高的问题，提出一种基于 MUSIC 算法的 L 型阵列多输入多输出雷达降维 DOA 估计算法。算法根据 L 型阵列导向矢量的结构，通过构造降维矩阵及降维预处理后，利用二次优化方法将 2 维 DOA 估计分解为两个 1 维 DOA 估计，一定程度上降低了运算复杂度，但存在以下问题：(1)降维矩阵并没有最大程度地降低回波数据的维数，没有去除所有重复的虚拟阵元，回波数据中仍存在冗余；(2)在利用二次优化进行降维求解过程中，对方向向量中各元素的约束较弱[14]，造成估计精度较差，同时协方差矩阵的构建和特征分解以及两次 1 维谱搜索仍存在较高的运算量。

本文针对文献[13]算法存在的不足，基于 ESPRIT 算法提出两种 L 型阵列 MIMO 雷达降维 DOA 估计算法。通过降维矩阵的设计及回波数据的降维变换，将高维回波数据转换至低维信号空间，然后分别基于特征分解和传播算子实现对信号子空间的估计，并通过对 2 维空间角旋转不变因子的提取，利用 ESPRIT 算法实现了参数的联合估计；算法不牺牲阵列孔径，且最大程度地降低了回波数据的维数，具有更低的运算复杂度；仿真结果验证了本文理论分析的正确性和算法的有效性。

2　问题建模

如图 1 所示，xoy 平面上存在窄带模式下 L 型阵列的收、发共址 MIMO 雷达系统，x 轴与 y 轴垂直放置，均为等间距线阵且满足 $d_x = d_y$，阵元个数分别为 M_x 和 M_y；发射阵元同时发射相同载频及带宽的一组正交信号，即为 $\boldsymbol{S}(t)=[\boldsymbol{s}_1(t),\boldsymbol{s}_2(t),\cdots,\boldsymbol{s}_{M_y+M_x-1}(t)]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{s}_m(t)$ 为第 m 个发射信号，其中 $m=1,2,\cdots,M_x+M_y-1$。远场空域内存在 K 个目标，第 $k(k=1,2,\cdots,K)$ 个目标的空间角度位置信息为 (ϑ_k,ϕ_k)，并满足 $\cos\vartheta=\cos\theta\cos\varphi$，$\cos\phi=\cos\theta\sin\varphi$；其中 (θ,φ) 对应目标的俯仰角与方位角，(ϑ,ϕ) 对应目标分别与 x，y 轴的夹角。则第 $q\{q=1,2,\cdots,Q\}$ 次脉冲下接收端的输出信号为

$$\boldsymbol{x}_q(t)=\boldsymbol{A}(\vartheta,\phi)\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\beta}_q\right)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{S}(t)+\boldsymbol{w}_q(t) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_q=[\beta_1^q,\cdots,\beta_K^q]^{\mathrm{T}}$，$\beta_1^q,\beta_2^q,\cdots,\beta_K^q$ 为第 q 次脉冲下各个目标的散射系数；$\boldsymbol{w}_q(t)$ 为加性高斯噪声矢量；$\boldsymbol{A}(\vartheta,\phi)=[\boldsymbol{a}(\vartheta_1,\phi_1),\boldsymbol{a}(\vartheta_2,\phi_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\vartheta_K,\phi_K)]$ 为导向矢量，满足 $\boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)=[\boldsymbol{a}_x^{\mathrm{T}}(\vartheta),\underline{\boldsymbol{a}}_y^{\mathrm{T}}(\phi)]^{\mathrm{T}}$，其中 $\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)$ 为 $\boldsymbol{a}_y(\phi)$ 的后 M_y-1 项，满足 $\boldsymbol{a}_x(\vartheta)=[\exp(\kappa_{M_x-1}^x),\exp(\kappa_{M_x-2}^x),\cdots,\exp(\kappa_0^x)]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_y(\phi)=[\exp(\kappa_0^y),\exp(\kappa_1^y),\cdots,\exp(\kappa_{M_y-1}^y)]^{\mathrm{T}}$；式中 $\kappa_m^x=-\mathrm{j}2\pi m d_x\cos\vartheta/\lambda; m=0,1,\cdots,M_x-1$；$\kappa_n^y=-\mathrm{j}2\pi n d_y\cos\phi/\lambda; n=0,1,\cdots,M_y-1$。由于发射正交波形，则接收信号经过匹配滤波以及矢量化操作后得：

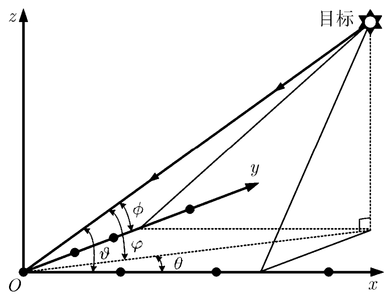


图 1　L 型阵列 MIMO 雷达结构及角度配置关系

$$\boldsymbol{y}_q=\boldsymbol{G}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{\beta}_q+\boldsymbol{n}_q \tag{2}$$

对 $\boldsymbol{y}_q$ 进行列堆栈，即可得到 Q 次脉冲下 L 型阵列 MIMO 雷达的回波接收数据：

$$\boldsymbol{Y}=\left[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_Q\right]=\boldsymbol{G}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{N} \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{\eta}=\left[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_Q\right]$ 为散射系数；$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\cdots,\boldsymbol{n}_Q]$ 为加性高斯白噪声，服从 $\boldsymbol{N}\sim N^c(0,\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{(M_x+M_y-1)^2})$；$\boldsymbol{G}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{A}(\vartheta,\phi)\circ\boldsymbol{A}(\vartheta,\phi)=[\boldsymbol{g}(\vartheta_1,\phi_1),\boldsymbol{g}(\vartheta_2,\phi_2),\cdots,\boldsymbol{g}(\vartheta_K,\phi_K)]$ 对应联合导向矢量，$\boldsymbol{g}(\vartheta,\phi)=\boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)\otimes\boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)$，式中 $\circ$ 和 $\otimes$ 分别为 Khatri-Rao 积和 Kronecker 积。

3　算法分析

3.1 降维预处理

由信号模型可得：

$$\boldsymbol{g}(\vartheta,\phi)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\otimes\boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)\\ \underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\otimes\boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\rho}(\vartheta,\phi) \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}(\vartheta,\phi)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\\ \boldsymbol{a}(\vartheta,\phi)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_x & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_y\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Pi}_x$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_y$ 为置换矩阵，构造方式与文献[13]类似；显然 $\boldsymbol{g}(\vartheta,\phi)$ 与 $\boldsymbol{\rho}(\vartheta,\phi)$ 成线性关系，同时由于

$$\boldsymbol{\rho}(\vartheta,\phi)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\\ \underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\\ \boldsymbol{a}_x(\vartheta)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\\ \underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}_x(\vartheta)\\ \boldsymbol{\rho}_{xy}(\vartheta,\phi)\\ \boldsymbol{\rho}_y(\phi)\end{bmatrix} \tag{5}$$

则存在线性变换

$$\boldsymbol{\rho}_x(\vartheta)=\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)=\boldsymbol{T}_x\boldsymbol{h}_x(\vartheta) \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}_{xy}(\vartheta,\phi)\\ \boldsymbol{\rho}_y(\phi)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\otimes\boldsymbol{a}_x(\vartheta)\\ \boldsymbol{a}_x(\vartheta)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\\ \underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{T}}_{xy}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{a}}_x(\vartheta)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\\ \underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\\ \underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)\end{bmatrix}$$
$$= \widetilde{\boldsymbol{T}}_{xy}\widetilde{\boldsymbol{T}}_y\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_{xy}(\vartheta,\phi)\\ \boldsymbol{h}_y(\phi)\end{bmatrix} \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{h}_x(\vartheta)=[\exp(\kappa^x_{2M_x-2}),\exp(\kappa^x_{2M_x-3}),\cdots,\exp(\kappa^x_0)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{h}_y(\phi)=[\exp(\kappa^y_1),\exp(\kappa^y_2),\cdots,\exp(\kappa^y_{2M_y-2})]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{h}_{xy}(\vartheta,\phi)=\bar{\boldsymbol{a}}_x(\vartheta)\otimes\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)$；$\boldsymbol{T}_x$ 和 $\boldsymbol{T}_y$ 为降维矩阵。

$$\boldsymbol{T}_x=\begin{bmatrix} & \boldsymbol{I}_{M_x} & \boldsymbol{0}_{M_x\times(M_x-1)} & \\ \boldsymbol{0}_{M_x\times 1} & & \boldsymbol{I}_{M_x} & \boldsymbol{0}_{M_x\times(M_x-2)}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0}_{M_x\times(M_x-1)} & & & \boldsymbol{I}_{M_x}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}_y=\begin{bmatrix} & \boldsymbol{I}_{M_Y-1} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times(M_Y-1)} & \\ \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times 1} & & \boldsymbol{I}_{(M_y-1)} & \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times(M_Y-2)}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0}_{(M_y-1)\times(M_Y-1)} & & & \boldsymbol{I}_{(M_y-1)}\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{T}}_{xy}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{xy} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_{M_x(M_y-1)} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{(M_y-1)^2}\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{T}}_y=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{(M_x-1)(M_y-1)} & \boldsymbol{0}_{(M_x-1)(M_y-1)\times(2M_y-2)}\\ \boldsymbol{0}_{M_y(M_y-1)\times(M_x-1)(M_y-1)} & \boldsymbol{T}_y\end{bmatrix} \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{\Pi}_{xy}$ 为置换矩阵，与 $\boldsymbol{\Pi}_x$，$\boldsymbol{\Pi}_y$ 类似。由式(4)，式(6)和式(7)可得，存在降维矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 满足：

$$\boldsymbol{g}(\vartheta,\phi)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_x & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_x & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \widetilde{\boldsymbol{T}}_{xy}\widetilde{\boldsymbol{T}}_y\end{bmatrix}\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi) = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi) \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)=[\boldsymbol{h}_x^{\mathrm{T}}(\vartheta),\boldsymbol{h}_{xy}^{\mathrm{T}}(\vartheta,\phi),\boldsymbol{h}_y^{\mathrm{T}}(\phi)]^{\mathrm{T}}$。则式(3)中回波接收数据可表示为 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{N}$；其中 $\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)=[\boldsymbol{h}(\vartheta_1,\phi_1),\cdots,\boldsymbol{h}(\vartheta_K,\phi_K)]$。则回波信号 $\boldsymbol{Y}$ 中目标的信息存在于 $\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)$ 张成的低维信号子空间中。因此可以通过降维处理将回波信号变换到该低维子空间中，定义降维矩阵 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{(M_x+M_y-1)^2\times(M_xM_y+M_x+M_y-2)}$ 对回波信号进行降维预处理[15]：

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}(\vartheta,\phi)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{N} \tag{11}$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2}$，显然有 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_{(M_xM_y+M_x+M_y-2)}$，即降维处理后噪声矢量 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{N}$ 服从 $N^c(0,\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{(M_xM_y+M_x+M_y-2)})$。式(11)化简可得 $\boldsymbol{Z}=\widetilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{N}$；其中 $\widetilde{\boldsymbol{H}}=(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma})^{1/2}\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)=[\tilde{\boldsymbol{h}}(\vartheta_1,\phi_1),\tilde{\boldsymbol{h}}(\vartheta_2,\phi_2),\cdots,\tilde{\boldsymbol{h}}(\vartheta_K,\phi_K)]$，$\tilde{\boldsymbol{h}}(\vartheta_k,\phi_k)=(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma})^{1/2}\boldsymbol{h}(\vartheta_k,\phi_k)$。

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{diag}\Big\{\underbrace{1,\cdots,M_x-1,M_x,M_x-1,\cdots,1}_{2M_x-1},\underbrace{2,\cdots,2}_{(M_x-1)(M_y-1)},\overbrace{\underbrace{2,1+2,\cdots,M_y-2+2}_{M_y-1},M_y-1,M_y-2,\cdots,1}^{2M_y-2}\Big\} \tag{12}$$

式(12)证明略。从式(11)和式(12)可得，降维后的回波数据 $\boldsymbol{Z}$ 可以等效为长度为 $(M_xM_y+M_x+M_y-2)$ 的加权平面阵的回波信号，权值为对角阵 $(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma})^{1/2}$ 的对角元素。显然，由 $\boldsymbol{H}(\vartheta,\phi)$ 可知，本文降维处理最大程度地降低了回波数据的维数，去除了原始回波数据中所有重复量，达到了降维的目的。

3.2 信号子空间的获取

3.2.1 基于特征分解的信号子空间估计 计算降维后的回波协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_Z$，并对其进行特征分解：

$$\boldsymbol{R}_Z=[\boldsymbol{u}_1^z,\boldsymbol{u}_2^z,\cdots,\boldsymbol{u}_K^z]\boldsymbol{\Sigma}_K[\boldsymbol{v}_1^z,\boldsymbol{v}_2^z,\cdots,\boldsymbol{v}_K^z] = \boldsymbol{U}_s^Z\boldsymbol{\Sigma}_K\left(\boldsymbol{V}_s^Z\right)^{\mathrm{H}} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{u}_i^z,\boldsymbol{v}_i^z(i=1,\cdots,M_xM_y+M_x+M_y-2)$ 为矩阵 $\boldsymbol{R}_Z$ 左右奇异正交基矢量，$\boldsymbol{\Sigma}_K=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_K\}$ 对应 $\boldsymbol{R}_Z$ 的奇异值矩阵；则对任意 $\boldsymbol{u}_j^z\in\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_{K+1}^z,\boldsymbol{u}_{K+2}^z,\cdots,\boldsymbol{u}_{M_xM_y+M_x+M_y-2}^z\}$ 有 $(\boldsymbol{u}_j^z)^{\mathrm{H}}[\boldsymbol{u}_1^z,\boldsymbol{u}_2^z,\cdots,\boldsymbol{u}_K^z]\boldsymbol{\Sigma}_K\cdot[\boldsymbol{v}_1^z,\boldsymbol{v}_2^z,\cdots,\boldsymbol{v}_K^z]^{\mathrm{H}}=0$，则 $(\boldsymbol{u}_j^z)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_Z=(\boldsymbol{u}_j^z)^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{H}}E\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\}\cdot\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{H}}=0$，可得 $(\boldsymbol{u}_j^z)^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{H}}=0$，即 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_{K+1}^z,\boldsymbol{u}_{K+2}^z,\cdots,\boldsymbol{u}_{M_xM_y+M_x+M_y-2}^z\}\perp\mathrm{span}\{\tilde{\boldsymbol{h}}_1,\tilde{\boldsymbol{h}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{h}}_K\}$；进一步可得 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1^z,\cdots,\boldsymbol{u}_K^z\}=\mathrm{span}\{\tilde{\boldsymbol{h}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{h}}_K\}$，即 $\boldsymbol{U}_s^Z$ 与方向矢量 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ 张成的是相同的信号子空间，由于 $\widetilde{\boldsymbol{H}}=(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma})^{1/2}\boldsymbol{H}$，则可得 $(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2}\boldsymbol{U}_s^Z$ 与 $\boldsymbol{H}$ 张成形同的信号子空间。

3.2.2 基于传播算子的信号子空间快速估计 上节分析能够很好地实现信号子空间的估计，但需要信号协方差的计算以及相应的特征分解，当快拍数较大时，其运算复杂度较高；为了避免协方差矩阵的估计及其特征分解，本节基于传播算子进行信号子空间的估计。由上节分析可知，降维后回波数据 $\boldsymbol{Z}$ 可以等效为长度为 $M_xM_y+M_x+M_y-2$ 的加权平面阵的回波信号，权值为对角阵 $(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma})^{1/2}$ 的对角元素，为了处理方便，首先对降维后的回波数据 $\boldsymbol{Z}$ 进行权值归一化操作，即 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}=(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\eta}+\widetilde{\boldsymbol{N}}$；其中 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 为噪声项。假设雷达阵列无空间模糊，即 $\boldsymbol{H}$ 为列满秩矩阵，则在 $\boldsymbol{H}$ 中有 K 行是线性独立的，将导向矩阵分块为 $\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，式中 $\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_2$ 分别为 $K\times K$ 维和 $(M_xM_y+M_x+M_y-2-K)\times K$ 维矩阵，则存在线性变换矩阵 $\boldsymbol{V}$ (即传播算子)使得 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2$；同理在得到 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ 后，进行分块处理，令

$\widetilde{\boldsymbol{Z}}=[\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1^{\mathrm{T}},\widetilde{\boldsymbol{Z}}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1,\widetilde{\boldsymbol{Z}}_2$ 分别对应 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ 的前 K 行和后 $M_xM_y+M_x+M_y-2-K$ 行元素。则无噪的情况下有 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1=\widetilde{\boldsymbol{Z}}_2$，考虑到实际中噪声对回波数据的影响，矩阵 $\boldsymbol{V}$ 可由代价函数 $J(\boldsymbol{V})=\arg\min\limits_{\boldsymbol{V}}\left\|\widetilde{\boldsymbol{Z}}_2-\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1\right\|^2$ 估计得到，$\|\bullet\|$ 表示 Frobenius 范数，则矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的最小二乘解为 $\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_1^{\mathrm{H}})^{-1}\cdot\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2^{\mathrm{H}}$。令 $\widetilde{\boldsymbol{V}}=[\boldsymbol{I}_K\ \ \boldsymbol{V}]$，$\boldsymbol{I}_K$ 为 K 维单位阵，存在

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{Z}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1\\ \boldsymbol{H}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\eta} \tag{14}$$

进一步化简得 $\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\eta}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1^{\#}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}$；其中 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1^{\#}=(\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1^{\mathrm{H}})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1$ 对应 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1$ 的伪逆，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{\eta}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_1^{\#}$ 为非奇异矩阵。显然矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{H}}$ 和流型矢量 $\boldsymbol{H}$ 的各列张成相同的信号子空间，则可以利用 $\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{H}}$ 进行 2 维空间角的估计。

3.3 基于 ESPRIT 的 2 维旋转因子提取

在实现对信号子空间的估计得到对应的 $\boldsymbol{U}_s$ (这里 $\boldsymbol{U}_s$ 代表对信号子空间的估计值，即当采用特征分解进行估计时 $\boldsymbol{U}_s=(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2}\boldsymbol{U}_s^{Z}$；当采用传播算子进行估计时 $\boldsymbol{U}_s=\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{H}}$，为便于分析这里统一用 $\boldsymbol{U}_s$ 表示)后，由导向矢量 $\boldsymbol{h}(\vartheta,\phi)$ 可知 $\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_x^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{xy}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_y^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{H}_x,\boldsymbol{H}_{xy}$ 和 $\boldsymbol{H}_y$ 分别为 $\boldsymbol{H}$ 的前 $(2M_x-1)$ 行、中间 $M_x(M_y-1)$ 行和后 (M_y-1) 行；令

$$\boldsymbol{H}_x\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^1\\ \boldsymbol{H}_x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^1\\ \boldsymbol{H}_x^1\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_{xy}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{xy}^1\\ \boldsymbol{H}_{xy}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{xy}^1\\ \boldsymbol{H}_{xy}^1\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\end{bmatrix} \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{H}_x^1,\boldsymbol{H}_x^2$ 分别为 $\boldsymbol{H}_x$ 的前 $(2M_x-2)$ 行和后 $(2M_x-2)$ 行，$\boldsymbol{H}_{xy}^1,\boldsymbol{H}_{xy}^2$ 分别为 $\boldsymbol{H}_{xy}$ 的前 $(M_x-1)\cdot(M_y-1)$ 行和后 $(M_x-1)(M_y-1)$ 行；$\triangleq$ 为分块操作。对应地可得 $\boldsymbol{U}_s=[(\boldsymbol{U}_s^x)^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{U}_s^{xy})^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{U}_s^y)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{U}_s^x$，$\boldsymbol{U}_s^{xy}$ 和 $\boldsymbol{U}_s^y$ 分别为 $\boldsymbol{U}_s$ 前 $(2M_x-1)$ 行、中间 $M_x(M_y-1)$ 行和后 (M_y-1) 行；同样令 $\boldsymbol{U}_s^x\triangleq[(\boldsymbol{U}_{s1}^x)^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{U}_{s2}^x)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{U}_s^{xy}\triangleq[(\boldsymbol{U}_{s1}^{xy})^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{U}_{s2}^{xy})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；其中 $\boldsymbol{U}_{s1}^x$，$\boldsymbol{U}_{s2}^x$ 分别为 $\boldsymbol{U}_s^x$ 的前 $(2M_x-2)$ 行和后 $(2M_x-2)$ 行，$\boldsymbol{U}_{s1}^{xy}$，$\boldsymbol{U}_{s2}^{xy}$ 分别为 $\boldsymbol{U}_s^{xy}$ 的前 $(M_x-1)(M_y-1)$ 行和后 $(M_x-1)\ (M_y-1)$ 行；由于 $\boldsymbol{U}_s$ 与流型矢量 $\boldsymbol{H}$ 的各列张成相同的信号子空间，则存在非奇异矩 $\boldsymbol{K}$ 使得 $\boldsymbol{U}_s=\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}$，阵即 $\boldsymbol{U}_s^x=\boldsymbol{H}_x\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{U}_s^{xy}=\boldsymbol{H}_{xy}\boldsymbol{K}$；以上分析可得：

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_{s1}^x\\ \boldsymbol{U}_{s2}^x\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^1\\ \boldsymbol{H}_x^2\end{bmatrix}\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^1\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{H}_x^1\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\boldsymbol{K}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_{s1}^{xy}\\ \boldsymbol{U}_{s2}^{xy}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{xy}^1\\ \boldsymbol{H}_{xy}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{xy}^1\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{H}_{xy}^1\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\boldsymbol{K}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}_\vartheta=\mathrm{diag}\{\delta_1^\vartheta,\delta_2^\vartheta,\cdots,\delta_K^\vartheta\}$，$\delta_k^\vartheta=\exp\{-\mathrm{j}2\pi d_x\cos\vartheta_k/\lambda\}(k=1,2,\cdots,K)$；令 $\boldsymbol{\Xi}_1=[(\boldsymbol{U}_{s1}^x)^{\mathrm{T}},\ (\boldsymbol{U}_{s1}^{xy})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Xi}_2=[(\boldsymbol{U}_{s2}^x)^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{U}_{s2}^{xy})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，进一步化简

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}_1&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^1\\ \boldsymbol{H}_{xy}^1\end{bmatrix}\boldsymbol{K}=\widehat{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{\Xi}_2&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^2\\ \boldsymbol{H}_{xy}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^1\\ \boldsymbol{H}_{xy}^1\end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\boldsymbol{K}=\widehat{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\boldsymbol{K}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

则有 $\boldsymbol{\Xi}_2=\widehat{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\boldsymbol{K}=\widehat{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\boldsymbol{K}=\boldsymbol{\Xi}_1\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\boldsymbol{K}$，即 $(\boldsymbol{\Xi}_1)^{\dagger}\boldsymbol{\Xi}_2=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\boldsymbol{K}$，其中 $(\cdot)^{\dagger}$ 表示广义逆；显然 $(\boldsymbol{\Xi}_1)^{\dagger}\boldsymbol{\Xi}_2$ 的特征值等于 $\boldsymbol{\Phi}_\vartheta$ 的对角线元素 $\{\delta_k^\vartheta\}_{k=1}^K$，从而实现对 ϑ 的估计。

令 $\hat{\boldsymbol{h}}(\vartheta,\phi)=[\hat{\boldsymbol{h}}_y^{\mathrm{T}}(\phi),\hat{\boldsymbol{h}}_{yx}^{\mathrm{T}}(\vartheta,\phi),\hat{\boldsymbol{h}}_x^{\mathrm{T}}(\vartheta)]^{\mathrm{T}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{h}}_x(\vartheta)=[\exp(\kappa_1^x),\exp(\kappa_2^x),\cdots,\exp(\kappa_{2M_x-2}^x)]^{\mathrm{T}}$，$\hat{\boldsymbol{h}}_{yx}(\vartheta,\phi)=\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_y(\phi)\otimes\underline{\tilde{\boldsymbol{a}}}_x(\vartheta)$，$\hat{\boldsymbol{h}}_y(\phi)=[\exp(\kappa_{2M_y-2}^y),\exp(\kappa_{2M_y-3}^y),\cdots,\exp(\kappa_0^y)]^{\mathrm{T}}$；$\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_y(\phi)$ 为 $\tilde{\boldsymbol{a}}_y(\phi)$ 的前 (M_y-1) 项，$\underline{\tilde{\boldsymbol{a}}}_x(\vartheta)$ 为 $\tilde{\boldsymbol{a}}_x(\vartheta)$ 后 (M_y-1) 项；$\tilde{\boldsymbol{a}}_y(\phi)$ 与 $\tilde{\boldsymbol{a}}_x(\vartheta)$ 满足 $\tilde{\boldsymbol{a}}_x(\vartheta)=[\exp(\kappa_0^x),\ \exp(\kappa_1^x),\ \cdots,\ \exp(\kappa_{M_x-1}^x)]^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{a}}_y(\phi)=[\exp(\kappa_{M_y-1}^y),\exp(\kappa_{M_y-2}^y),\cdots,\exp(\kappa_0^y)]^{\mathrm{T}}$；则有 $\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_y(\phi)=\boldsymbol{J}_{M_y-1}\underline{\boldsymbol{a}}_y(\phi)$，$\underline{\tilde{\boldsymbol{a}}}_x(\vartheta)=\boldsymbol{J}_{M_x-1}\bar{\boldsymbol{a}}_x(\vartheta)$；其中 $\boldsymbol{J}_{M_y-1}$ 和 $\boldsymbol{J}_{M_x-1}$ 分别为 (M_y-1) 和 (M_x-1) 维的反对角矩阵，可得：

$$\hat{\boldsymbol{h}}_{yx}(\vartheta,\phi)=\widetilde{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{\Pi}_{yx}\boldsymbol{h}_{xy}(\vartheta,\phi) \tag{18}$$

式中 $\widetilde{\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{J}_{M_y-1}\otimes\boldsymbol{J}_{M_x-1}$，$\boldsymbol{\Pi}_{yx}$ 为置换矩阵，与 $\boldsymbol{\Pi}_x,\boldsymbol{\Pi}_y$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_{xy}$ 类似；则存在置换矩阵 $\boldsymbol{J}$ 满足：

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{J}_{2M_y-2}\\ \boldsymbol{0}&\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}_{yx}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{J}_{2M_x-2}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{19}$$

使得 $\widehat{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}$。其中 $\widehat{\boldsymbol{H}}=[\hat{\boldsymbol{h}}(\vartheta_1,\phi_1),\hat{\boldsymbol{h}}(\vartheta_2,\phi_2),\cdots,\hat{\boldsymbol{h}}(\vartheta_K,\phi_K)]$，$\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}_{yx}=\begin{bmatrix}1&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\widetilde{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{\Pi}_{yx}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{J}_{2M_x-2}$ 和 $\boldsymbol{J}_{2M_y-2}$ 分别为 $(2M_x-2)$ 和 $(2M_y-2)$ 维的反对角矩阵。在置换处理得到 $\widehat{\boldsymbol{H}}$ 后，同样令 $\widehat{\boldsymbol{H}}=[\widehat{\boldsymbol{H}}_y^{\mathrm{T}},\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^{\mathrm{T}},\widehat{\boldsymbol{H}}_x^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\widehat{\boldsymbol{H}}_y,\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{H}}_x$ 分别为 $\widehat{\boldsymbol{H}}$ 的前 $(2M_y-1)$ 行、中间 $M_y(M_x-1)$ 行和后 (M_x-1) 行；令

$$\widehat{\boldsymbol{H}}_y\triangleq\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_y^1\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_y^1\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_y^1\boldsymbol{\Phi}_\phi\end{bmatrix},\ \widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}\triangleq\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^1\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^1\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^1\boldsymbol{\Phi}_\vartheta\end{bmatrix} \tag{20}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{H}}_y^1,\widehat{\boldsymbol{H}}_y^2$ 分别为 $\widehat{\boldsymbol{H}}_y$ 的前 $(2M_y-2)$ 行和后 $(2M_y-2)$ 行，$\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^1,\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^2$ 分别为 $\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}$ 的前 $(M_y-1)\cdot(M_x-1)$ 行和后 $(M_y-1)\ (M_x-1)$ 行。对应的可得 $\widehat{\boldsymbol{U}}_s=\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_s=[(\widehat{\boldsymbol{U}}_s^y)^{\mathrm{T}},(\widehat{\boldsymbol{U}}_s^{yx})^{\mathrm{T}},(\widehat{\boldsymbol{U}}_s^x)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\widehat{\boldsymbol{U}}_s^y$，$\widehat{\boldsymbol{U}}_s^{yx}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{U}}_s^x$ 分别为 $\widehat{\boldsymbol{U}}_s$ 的前 $(2M_y-1)$ 行、中间 $M_y(M_x-1)$ 行和后 (M_x-1) 行；同样令 $\widehat{\boldsymbol{U}}_s^y\triangleq[(\widehat{\boldsymbol{U}}_{s1}^y)^{\mathrm{T}},(\widehat{\boldsymbol{U}}_{s2}^y)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\widehat{\boldsymbol{U}}_s^{yx}\triangleq[(\widehat{\boldsymbol{U}}_{s1}^{yx})^{\mathrm{T}},(\widehat{\boldsymbol{U}}_{s2}^{yx})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；其中 $\widehat{\boldsymbol{U}}_{s1}^y,\widehat{\boldsymbol{U}}_{s2}^y$ 分别为 $\widehat{\boldsymbol{U}}_s^y$ 的前 $(2M_y-2)$ 行和后 $(2M_y-2)$ 行，$\widehat{\boldsymbol{U}}_{s1}^{yx}$，$\widehat{\boldsymbol{U}}_{s2}^{yx}$ 分别为 $\widehat{\boldsymbol{U}}_s^{yx}$ 的前 $(M_y-1)(M_x-1)$ 行和后 $(M_y-1)(M_x-1)$

行；由于 $\widetilde{\boldsymbol{U}}_s=\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_s=\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}=\widehat{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{K}$，则有 $\widehat{\boldsymbol{U}}_s^y=\widehat{\boldsymbol{H}}_y\boldsymbol{K}$，$\widehat{\boldsymbol{U}}_s^{yx}=\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}\boldsymbol{K}$，由以上分析可得

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{U}}_{s1}^y\\ \widehat{\boldsymbol{U}}_{s2}^y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_y^1\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_y^2\end{bmatrix}\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_y^1\boldsymbol{K}\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_y^1\boldsymbol{\Phi}_\phi\boldsymbol{K}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{U}}_{s1}^{yx}\\ \widehat{\boldsymbol{U}}_{s2}^{yx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^1\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^1\boldsymbol{K}\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^1\boldsymbol{\Phi}_\phi\boldsymbol{K}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}_\phi=\mathrm{diag}\{\delta_1^\phi,\delta_2^\phi,\cdots,\delta_K^\phi\}$，$\delta_k^\phi=\exp\{-\mathrm{j}2\pi d_y\cos\phi_k/\lambda\}(k=1,2,\cdots,K)$；令 $\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_1=[(\widehat{\boldsymbol{U}}_{s1}^y)^{\mathrm{T}},(\widehat{\boldsymbol{U}}_{s1}^{yx})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_2=[(\widehat{\boldsymbol{U}}_{s2}^y)^{\mathrm{T}},(\widehat{\boldsymbol{U}}_{s2}^{yx})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；进一步化简

$$\left.\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_1=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_y^1\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^1\end{bmatrix}\boldsymbol{K}=\breve{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{K}\\ \widehat{\boldsymbol{\Xi}}_2=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_y^2\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{H}}_y^1\\ \widehat{\boldsymbol{H}}_{yx}^1\end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_\phi\boldsymbol{K}=\breve{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{\Phi}_\phi\boldsymbol{K}\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

则有 $\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_2=\breve{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{\Phi}_\phi\boldsymbol{K}=\breve{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_\phi\boldsymbol{K}=\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_1\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_\phi\boldsymbol{K}$，即 $(\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_1)^\dagger\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_2=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_\phi\boldsymbol{K}$；显然 $(\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_1)^\dagger\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_2$ 的特征值等于 $\boldsymbol{\Phi}_\phi$ 的对角线元素 $\{\delta_k^\phi\}_{k=1}^K$，从而实现对 ϕ 的估计。

显然对于空间角 ϑ 和 ϕ 的旋转不变因子的提取基于同一个信号子空间，即其中的角度信息是保持不变的，通过式(23)即可实现参数的自动配对，求得对应的空间角度 $\{\vartheta_k,\phi_k\}_{k=1}^K$，从而得到 $\{\theta_k,\varphi_k\}_{k=1}^K$ 的 2 维估计，值得注意的是，在实际仿真中由于 $\boldsymbol{\Phi}_\vartheta$，$\boldsymbol{\Phi}_\phi$ 这两个特征分解是独立进行的，特征值的排列顺序仍可能出现是不同的现象，此时可以采用文献[16]中的稳健配对方法即可。

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_k&=\arccos\left[-\mathrm{angle}\left(\delta_k^\vartheta\right)\big/2\pi d_x\right]\\ \phi_k&=\arccos\left[-\mathrm{angle}\left(\delta_k^\phi\right)\big/2\pi d_y\right]\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

其中 $\mathrm{angle}(\cdot)$ 为取相位操作。

3.4 算法性能分析

3.4.1 等效虚拟分析及移不变子阵划分 L 型阵列 MIMO 雷达虚拟扩展示意如图 2 所示。本文通过降维矩阵的设计，将 $(M_x+M_y-1)^2$ 维的回波信号降至 $(M_xM_y+M_x+M_y-2)$ 维，有效地去除了所有的重复阵元，而文献[13]RD_MUSIC 仅仅是将 $(M_x+M_y-1)^2$ 维的雷达回波信号降至 $(M_xM_y+M_x+2M_y-4)$ 维，降维后仍存在 (M_y-2) 个重复阵元；显然与文献[13]RD_MUSIC 相比，本文降维预处理将回波数维数降到了最低，最大限度地降低了处理数据的维度和数据量。同时本文 2 维旋转不变因子提取方法对应的等效平移子阵可用图 2 来进行直观解释，利用子阵 1 与子阵 2 的平移不变性即可获得对 $\boldsymbol{\Phi}_\phi$ 的估计；利用子阵 3 与子阵 4 的平移不变性即可获得

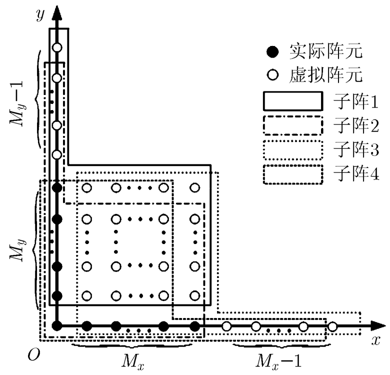


图 2 虚拟扩展及移不变子阵划分示意图

对 $\boldsymbol{\Phi}_\vartheta$ 的估计，从而实现对空间角 (ϑ,ϕ) 的估计。同时由图 2 可以看出，虚拟后的 MIMO 雷达阵列在整个 xoy 平面上关于 $y=x$ 对称，即 $\widehat{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}$，这就为基于同一信号子空间，来分别获取 2 维空间角的旋转不变因子提供了条件；此外，本文 2 维旋转不变因子提取方法利用到了所有的有效虚拟阵元，在实现参数自动配对的同时，不损失雷达孔径，提高了整个阵列的阵元利用率。

3.4.2 运算复杂度及最大可分辨目标数 将本文降维预处理后基于特征分解获得 2 维角度估计的算法称为 RD_ESPRIT 算法；降维预处理后基于传播算子获得 2 维角度估计的算法称为 RD_PM_ESPRIT 算法。由前文分析可得，本文算法的数据维数为 $\widetilde{W}=M_xM_y+M_x+M_y-2$，则运算量为 $O\{Q\widetilde{W}^2+\widetilde{W}^3+6K^3+2K^2((M_x-1)(M_y+1)+(M_x-1)(M_y+1))\}$。对应的本文 RD_PM_ESPRIT 算法的运算量为：$O\{\widetilde{W}KQ+\widetilde{W}K^2+2K^2((M_x-1)(M_y+1)+(M_x-1)(M_y+1))+6K^3\}$。文献[13]2D_MUSIC 算法的数据维数为 $\widehat{W}=(M_x+M_y-1)^2$，算法总的计算量 $O\{Q\widehat{W}^2+\widehat{W}^3+n^2\widehat{W}(\widehat{W}-K)\}$。文献[13]RD_MUSIC 算法处理的数据维数为 $\overline{W}=M_xM_y+M_x+2M_y-4$，算法总的计算量 $O\{Q\overline{W}^2+\overline{W}^3+n[(2M_y-1)(3M_y+2\overline{W}-3-K)\overline{W}+\widehat{W}]+(2M_y-1+K)\overline{W}+\overline{W}K^2\}$。$n$ 为谱搜索的栅格数，显然 $\widetilde{W}<\overline{W}<\widehat{W}$，同时快拍数 Q 以及栅格数 n 要远大于 M_x,M_y,K，易得 $O_{\mathrm{RD\_PM\_ESPRIT}}<O_{\mathrm{RD\_ESPRIT}}<O_{\mathrm{RD\_MUSIC}}<O_{\mathrm{2D\_MUSIC}}$。

此外，本文无论是 RD_ESPRIT 算法还是 RD_PM_ESPRIT 算法，在 2 维空间角求解过程中，为了使分块矩阵 $\boldsymbol{\Xi}_1,\boldsymbol{\Xi}_2,\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_1,\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_2$ 满足列满秩条件，即 $K\le\min[(M_x-1)(M_y-1)+2M_x-2,(M_x-1)(M_y-1)+2M_y-2]$；因此所提两种算法的最大可分辨目标数均为 $\min[(M_x-1)(M_y+1),(M_x+1)(M_y-1)]$。

4　仿真实验与分析

假设 L 型阵列 MIMO 雷达均为均匀配置，阵元间距满足 $d_x = d_y = \lambda/2$，以多相码为正交发射信号，分别进行以下实验。

实验 1　算法的有效性验证

假设发射阵元数满足 $M_x = 4$，$M_y = 5$，即发射阵元总数为 $M_x + M_y - 1 = 8$；远场空域存在 $K = 3$ 个目标，与 L 型阵列 MIMO 雷达 x 轴，y 轴夹角分别为 $(-50°,-20°)$，$(5°,25°)$，$(40°,60°)$；信噪比为 0 dB，快拍数 $Q = 200$；进行 100 次 Monte-Carlo 实验，验证本文 RD_ESPRIT 和 RD_PM_ESPRIT 算法的有效性，仿真结果如图 3 所示。显然本文所提RD_ESPRIT, RD_PM_ESPRIT算法均能够实现对目标 2 维空间角的有效估计，且能实现参数的自动配对；从图 3 的估计结果也可以看出，估计出的 2 维空间角度比较集中而没有出现散布，一定程度上也反映了两种算法的稳健性。

实验 2　算法的估计性能比较

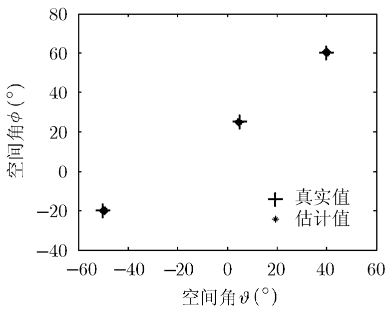
假设发射阵元数为 $M_x = M_y = 5$，远场空域存在 $K = 2$ 个目标，与 L 型阵列 MIMO 雷达 x 轴，y 轴的夹角分别为 $(-30°,40°)$，$(-20°,30°)$；快拍数 $Q = 200$，信噪比为 $-10 \sim 30$ dB，比较 2D_MUSIC、文献[13]RD_ MUSIC 和本文 RD_ESPRIT, RD_PM_ ESPRIT 算法的估计性能，其中 2D_MUSIC 与文献[13]RD_ MUSIC 算法的谱搜索步长均为 0.01°，RCRB 采用文献[17]中的计算方法，仿真结果如图 4 所示。由图 4 可以看出，随着信噪比的增大，4 种算法对目标 2 维空间角估计的 RMSE 都逐渐变小，且信噪比越大，估计精度越高，这一点很好理解；同时与 2D_ MUSIC 和 RD_ MUSIC 算法相比，本文 RD_ ESPRIT 算法估计精度稍差，但总的来讲性能损失不大，性能的损失主要是由 ESPRIT 算法与类 MUSIC 算法估计性能的差异引起。此外，本文 RD_ PM_ESPRIT 算法在低信噪比时，估计精度相对差于 RD_ESPRIT 算法，但随着信噪比的增大，两种算法的估计精度趋于一致；考虑到 RD_PM_ ESPRIT 算法避免了协方差矩阵的构建与特征分解，因此计算量远小于 RD_ESPRIT 算法，在实际工程中可以在估计精度与运算复杂度之间灵活选用合适的算法。

实验 3　算法的性能与参数之间的关系

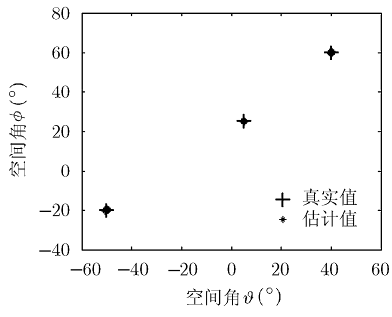
远场空域目标位置与目标个数与实验 2 相同，快拍数 $Q = 200$，阵元数 $M_x = M_y = 4 \sim 20$ 时，信噪比为 5 dB，比较不同阵元配置下本文 RD_ ESPRIT 与 RD_PM_ESPRIT 算法的估计性能，仿真结果如图 5(a)所示；阵元数满足 $M_x = M_y = 7$，$Q = 100 \sim$ 1000 变化，比较不同快拍数据下本文 RD_ESPRIT 与 RD_PM_ESPRIT 算法的估计性能，仿真结果如图 5(b)所示。由图 5(a)和图 5(b)可以看出，随着阵元数 M_x, M_y 的增大，对应阵列雷达孔径也逐渐变大，因此两种算法对 2 维空间角的估计性能也越好；随着快拍数的增大，两种算法对信号子空间的估计也就越准确，因此角估计精度也就越高。

5　结论

针对 L 型阵列 MIMO 雷达的 2 维角度估计问题，基于 ESPRIT 算法提出两种 L 型阵列 MIMO 雷达降维 DOA 估计算法，即基于特征分解的降维 DOA 估计算法(RD_ESPRIT)和基于传播算子的降维 DOA 估计算法(RD_PM_ESPRIT)。理论分析和实验仿真表明：(1)所提两种算法均通过降维预处理，将高维回波数据转换至低维信号空间，有效降低了数据处理的维数，降低了所需处理的回波的数据量；(2)所提两种算法分别基于特征分解与传播算子实现信号子空间的估计，实现了 2 维空间角旋转不变因子的提取，有效地估计出目标 2 维空间角度的同时，实现了参数的自动配对；(3)与已有文献算法比，两种算法在估计性能接近的条件下，最大程度地降低了回波数据的维数，同时利用 ESPRIT 算法大大降低了传统算法由于谱峰搜索所带来的巨大运算复杂度，提高了算法应用的实时性；(4)两种算

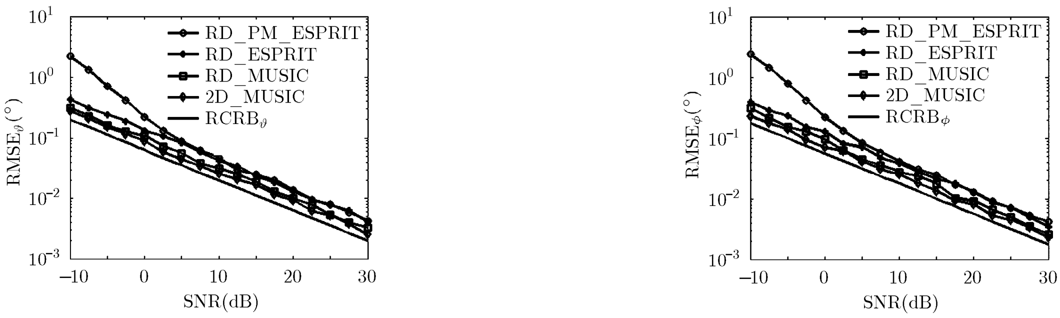


(a) RD_ESPRIT算法估计的星座图



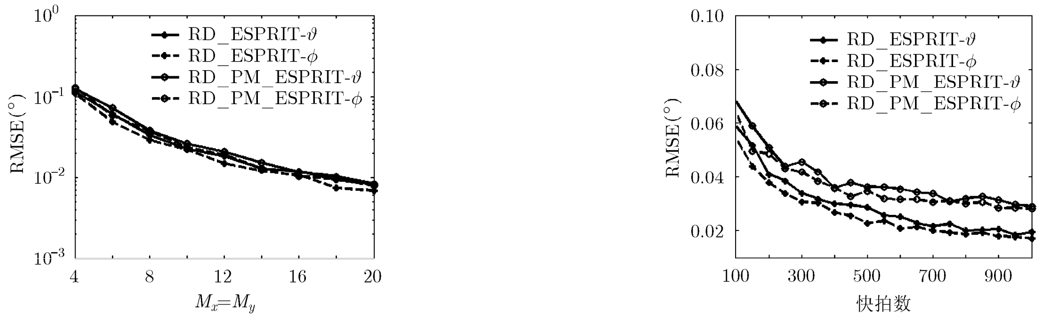
(b) RD_PM_ESPRIT算法估计的星座图

图 3 星座图估计结果



(a)空间角ϑ估计的RMSE随SNR的变化 (b)空间角ϕ估计的RMSE随SNR的变化

图 4 空间角估计结果



(a) 2维空间角估计的RMSE随阵元数的变化 (b) 2维空间角估计的RMSE随快拍数的变化

图 5 空间角估计结果与阵元数快拍数的关系

法中，RD_PM_ESPRIT 算法进一步避免了协方差矩阵的构造与特征分解，具有更低的运算复杂度，在低信噪比时，RD_ESPRIT 算法的参数估计性能要优于 RD_PM_ESPRIT 算法，在高信噪比时，两者的估计性能趋于一致，因此在实际工程中可以在估计精度与运算复杂度之间灵活选用合适的算法。

参 考 文 献

[1] Chen H W, Li X, Jiang W D, *et al*.. MIMO radar sensitivity analysis of antenna position for direction finding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(10): 5201–5216.

[2] Huleihel W, Tabrikian J, and Shavit R. Optimal adaptive waveform design for cognitive MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(20): 5075–5089.

[3] Cheng Q and Hua Y. Further study of the pencil-MUSIC algorithm[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1996, 32(1): 284–299.

[4] Tang B, Tang J, Zhang Y, *et al*.. Maximum likelihood estimation of DOD and DOA for bistatic MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2013, 93(5): 1349–1357.

[5] Arash K, Aboulnasr H, Sergiy A V, *et al*.. Efficient transmit beamspace design for search-free based DOA estimation in MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(6): 1490–1500.

[6] Bencheikh M L and Wang Y. Joint DOD-DOA estimation using combined ESPRIT-MUSIC approach in MIMO radar [J]. *IEE Electronics Letters*, 2010, 46(15): 2686–2691.

[7] Li C C, Liao G S, Zhu S, *et al*.. An ESPRIT-like algorithm for coherent DOA estimation based on data matrix decomposition in MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2011, 91(8): 1803–1811.

[8] Zheng G M, Chen B X, and Yang M L. Unitary ESPRIT algorithm for bistatic MIMO radar[J]. *Electronics Letters*, 2012, 48(3): 179–181.

[9] Li J F and Zhang X F. A method for joint angle and array gain-phase error estimation in bistatic multiple input multiple output nonlinear arrays[J]. *IET Signal Processing*, 2014, 8(2): 131–137.

[10] Jiang H, Zhang Y, Li J, *et al*.. A PARAFAC-based algorithm for multi-dimensional parameter estimation in polarimetric bistatic MIMO radar[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2013, 2013(1): 1–14.

[11] 符渭波, 赵永波, 苏涛, 等. 基于 L 型阵列 MIMO 雷达的 DOA 矩阵方法[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(11): 2398–2403.
Fu W B, Zhao Y B, Su T, *et al*.. DOA matrix method based on MIMO radar with L-shape arrays[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2011, 33(11): 2398–2403.

[12] 谢荣, 刘铮, 等. 基于L型阵列MIMO雷达的多目标分辨和定位[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(1): 49–52.
Xie R, Liu Z, *et al*.. Multi-target identification and

localization in MIMO radar with L-shape arrays[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(1): 49–52.

[13] 王伟, 王晓萌, 李欣, 等. 基于 MUSIC 算法的 L 型阵列 MIMO 雷达降维 DOA 估计[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(8): 1954–1959.
Wang W, Wang X M, Li X, *et al*.. Reduced-dimensional DOA estimation based on MUSIC algorithm in MIMO radar with L-shaped array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(8): 1954–1959.

[14] 蔡晶晶, 鲍丹, 李鹏, 等. 强约束优化降维 MUSIC 二维 DOA 估计[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(5): 1113–1118.
Cai J J, Bao D, Li P, *et al*.. Two-dimensional DOA estimation using reduced-dimensional MUSIC algorithm with strong-constraint optimization[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(5): 1113–1118.

[15] Zhang X and Xu D. Low-complexity ESPRIT-based DOA estimation for colocated MIMO radar using reduced-dimension transformation[J]. *Electronics Letters*, 2011, 17(47): 283–284.

[16] 郑志东, 张剑云, 康凯, 等. 互耦条件下双基地 MIMO 雷达的收发角度估计[J]. 中国科学: 信息科学, 2013, 43(6): 784–797.
Zheng Z D, Zhang J Y, Kang K, *et al*.. Joint DOD and DOA estimation for bistatic MIMO radar in the presence of mutual coupling[J]. *SCIENCE CHINA Information Sciences*, 2013, 43(6): 784–797.

[17] 郑志东, 张剑云, 屈金佑, 等. 新的双基地 MIMO 雷达角度估计方法[J]. 通信学报, 2012, 33(12): 123–132.
Zheng Z D, Zhang J Y, Qu J Y, *et al*.. Novel method for angle estimating of bistatic MIMO radar[J]. *Journal on Communications*, 2012, 33(12): 123–132.

梁　浩：　男，1987 年生，博士生，研究方向为阵列信号处理以及 MIMO 雷达信号处理.

崔　琛：　男，1962 年生，教授，博士生导师，研究方向为雷达信号处理以及雷达对抗技术.

代　林：　男，1986 年生，博士生，研究方向为压缩感知理论的研究与应用.

余　剑：　男，1980 年生，讲师，硕士，研究方向为雷达信号处理以及雷达对抗技术.