

基于矢量线性运算的自适应球帽差分反馈算法

刘学锋* 邹卫霞 杜光龙 王一搏

(北京邮电大学泛网无线通信教育部重点实验室 北京 100876)

摘要: 信道时间相关多输入多输出(MIMO)系统中一种重要有限反馈策略为差分反馈, 该文提出一种适用于单用户多输入单输出(SU-MISO)系统的自适应球帽差分反馈算法。首先, 介绍基于信道扰动规律的自适应差分反馈策略; 其次, 给出一种基于矢量线性运算的差分码本构造方法, 它不需要对基码字每个元素进行单独操作, 易于计算及生成; 最后, 运用一阶高斯马尔可夫链信道模型下前一时刻信道方向、选定码字及当前时刻信道方向的随机空间分布规律, 给出一种球帽码本半径计算方法。仿真结果说明, 该算法能准确跟踪信道并较现有算法有一定性能提高。

关键词: 无线通信; 自适应差分反馈; 时间相关多输入单输出信道; 球帽码本

中图分类号: TN92

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2015)03-0753-05

DOI: 10.11999/JEIT140598

Adaptive Spherical-cap Differential Feedback Algorithm Based on Linear Operations of Vectors

Liu Xue-feng Zou Wei-xia Du Guang-long Wang Yi-bo

(Key Laboratory of Universal Wireless Communication, Ministry of Education, Beijing University
of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: In the MIMO systems, the differential feedback is an important strategy for temporally correlated channels. A new adaptive spherical-cap differential feedback algorithm is proposed for the Single-User Multiple Input Single Output (SU-MISO) systems. Firstly, this study introduces the adaptive differential feedback strategy from the perspective of the channels disturbance. Secondly, based on vectors linear operation, one design method of the spherical-cap differential codebook is proposed, which no need to perform operation for each element of based-codewords and is easier to construct. Finally, for the first-order Gauss-Markov Process channel, considering the spatial random distribution among the channel directions at two consecutive time instants and the selected codeword at previous instant, one calculation method of spherical-cap radius is given. The simulation results show that the proposed algorithm can accurately track the channel disturbance and has certain performance improvement than the existing algorithms.

Key words: Wireless communication; Adaptive differential feedback; Temporally correlated Multiple Input Single Output (MISO) channels; Spherical-cap codebook

1 引言

在多输入多输出(MIMO)闭环系统中, 接收机可以把信道方向信息(Channel Direction Information, CDI)反馈到发射机, 发射机通过预编码技术获得分集和阵列增益^[1]。独立同分布瑞利衰落信道下单用户多输入多输出(Single-User MIMO, SU-MIMO)有限反馈技术已得到较充分研究, 时间和空间相关信道下的有限反馈技术仍是研究重点。

研究表明, 对于信道时间相关的 MIMO 系统, 在不增加反馈量的情况下可以利用信道的相关性提高系统性能^[1,2]。现有反馈策略可分为基于码本旋转和基于码本跳跃^[3]的两类算法, 基于码本跳跃的反馈

算法存在不同时刻反馈比特不等长的缺点^[4,5], 且性能一般不如基于码本旋转的反馈算法, 故现有研究主要集中在基于码本旋转的差分反馈。IEEE 802.16 m 中对基于旋转码本的差分反馈给出基本思路^[4,5], 文献[6]提出一种球帽差分酉阵码本, 文献[7-9]提出基于矢量非线性运算的以矢量 $[1, 0, \dots, 0]^T$ 为中心的差分码本算法。现有差分反馈算法中, 差分码本构造方法抽象且相关参数计算较复杂。

本文从现有基于码本旋转差分反馈算法的实现特点和存在问题出发, 主要关注差分码本的优化设计和算法性能提升, 提出一种实现简单、物理意义明确的基于矢量伸缩和合成的球帽差分码本, 并给出信道时间相关的单用户多输入单输出(Single-User Multiple Input Single Output, SU-MISO)系统下基于该码本的自适应差分反馈算法。

2014-05-18 收到, 2014-10-22 改回

国家自然科学基金(61171104)资助课题

*通信作者: 刘学锋 liuxfeng6@163.com

2 系统模型

SU-MISO 有限反馈系统配置 N_t 个发射天线和一个接收天线, 则系统接收和发送信号在时刻 τ 的关系可以建模为

$$y_\tau = \rho \mathbf{h}_\tau^H \boldsymbol{\omega}_\tau x_\tau + n_\tau, \tau=0, 1, \dots, T_{\max} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{h}_\tau$ 为 $N_t \times 1$ 信道矩阵, x_τ 和 y_τ 为传输和接收信号, $\boldsymbol{\omega}_\tau$ 为 $N_t \times 1$ 预编码矢量, $n_\tau \sim CN(0, 1)$ 为加性复高斯白噪声, ρ 为系统信噪比, $T_{\max}$ 为信道满足相同统计规律的最大时间。 $\mathbf{h}_\tau$ 的 CDI 为 $\bar{\mathbf{h}}_\tau = \mathbf{h}_\tau / \|\mathbf{h}_\tau\|$, 为使接收端获得最大信噪比, 最优预编码矢量为

$$\boldsymbol{\omega}_\tau = \operatorname{argmax} \left| \bar{\mathbf{h}}_\tau^H \boldsymbol{\omega}_i \right|^2, \boldsymbol{\omega}_i \in \mathbf{C}_\tau, i=1, 2, \dots, 2^B \quad (2)$$

其中 $\mathbf{C}_\tau = \{\boldsymbol{\omega}_{\tau,1}, \boldsymbol{\omega}_{\tau,2}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{\tau,2^B}\}$ 为反馈比特数为 B 的码本。矢量间距离定义如式(3), 则式(2)的码本选择准则即为最小弦距离准则。

$$d(\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_j) = \sqrt{1 - |\boldsymbol{\omega}_i^H \boldsymbol{\omega}_j|^2} \quad (3)$$

本文研究的信道时间相关 MISO 系统, $\mathbf{h}_\tau$ 随时间 τ 变化规律通常建模为一阶高斯马尔可夫链^[5-8] (First-order Gauss-Markov Process, FOGM)

$$\mathbf{h}_\tau = \varepsilon \mathbf{h}_{\tau-1} + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \mathbf{g}_\tau, \tau = 1, 2, \dots, T_{\max} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{h}_0$ 和 $\mathbf{g}_\tau$, $\mathbf{h}_{\tau-1}$ 和 $\mathbf{g}_\tau$ 都统计独立, 且 $\mathbf{h}_0$ 和 $\mathbf{g}_\tau$ 各元素统计独立并服从复高斯分布 $CN(0, 1)$ 。时间相关系数 $\varepsilon \in [0, 1]$ 代表相邻时刻信道间的相关程度服从杰克斯(Jakes)模型。由式(4)信道模型知, 若 ε 较大, 说明当前时刻的信道 CDI 以较大可能性出现在前一时刻信道 CDI 的附近, 差分反馈就是基于该基本规律提出的。

3 自适应差分反馈策略

基于码本旋转的差分反馈算法就是利用信道时间相关下当前时刻 CDI 相对前一时刻 CDI 扰动规律来降低信道矢量量化的误差, 其原理可结合图 1^[4] 说明。

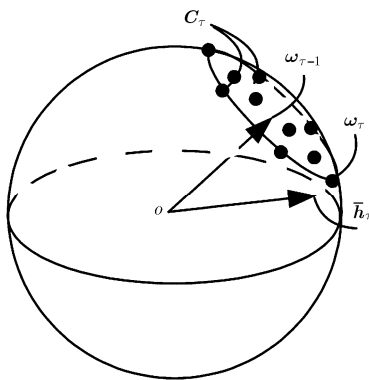


图 1 相邻时刻 CDI 扰动规律示意图

球面表示所有 n 维单位复矢量构成的集合, $\omega_{\tau-1}$ 和 ω_τ 分别表示时刻 $\tau-1$ 、 $\tau(\tau \geq 1)$ 下信道 CDI 的矢量量化码字, $\bar{\mathbf{h}}_\tau$ 表示时刻 τ 下信道 CDI。信道时间相关系统中 ω_τ 将以较大概率出现在如图所示的小圆区域——球帽内, 定义球帽内矢量与中心矢量 $\omega_{\tau-1}$ 之间最大弦距离为球帽半径, 对该球帽进行矢量量化构成的码本 $\mathbf{C}_\tau$ 称为球帽码本。

由上述分析可知球帽码本存在两个基本规律:

(1) 不同时刻球帽码本的各码字按一定规律分布在以中心矢量为中心的球帽区域内, 这给差分码本设计提供了理论依据。文献[7-9]给出了以 $[1, 0, \dots, 0]^H$ 为中心的差分码本构造方法, 本文同样采用这种策略。

(2) FOGM 信道下, 球帽半径 r_τ 的大小与 $\bar{\mathbf{h}}_\tau$ 和 $\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}$ 间弦距离的统计规律和 $\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}$ 量化误差两个因素有关。

如果有限反馈系统差分码本能随时间变化去匹配球帽半径的变化, 就可以更好地跟踪信道, 实现自适应差分反馈^[4]。自适应差分反馈策略实现步骤为:

步骤 1 在已知时间相关系数 ε 下, 计算不同时刻球帽半径 r_τ , 设计 $\tau=0$ 时的瑞利信道码本 $\mathbf{C}_0$ 和 $\tau \geq 1$ 球帽差分码本 $\mathbf{C}_\tau^d = \{\tilde{\omega}_{\tau,1}, \tilde{\omega}_{\tau,2}, \dots, \tilde{\omega}_{\tau,2^B}\}$, 其中不同时刻 τ 下 $\tilde{\omega}_{\tau,1} = [1, 0, \dots, 0]^H$ 记为 $\mathbf{V}_0$, 即不同时刻下的球帽差分码本都包含并以 $\mathbf{V}_0$ 为中心;

步骤 2 $\tau=0$ 时, 按式(2)在码本 $\mathbf{C}_0$ 中选定码字 ω_0 进行预编码;

步骤 3 $\tau=1, 2, \dots, T_{\max}$ 时, 发射机和接收机按式(5)生成该时刻下的球帽码本 $\mathbf{C}_\tau$:

$$\mathbf{C}_\tau(i) = \mathbf{Q}_\tau \mathbf{C}_\tau^d(i), i = 1, 2, \dots, 2^B \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}_\tau = [\omega_{\tau-1} \ \omega_{\tau-1}^\perp] \left[\mathbf{V}_0 \ \mathbf{V}_0^\perp \right]^H \quad (6)$$

其中, $\mathbf{Q}_\tau$ 为旋转酉阵, $\omega_{\tau-1}^\perp$ 为矢量 $\omega_{\tau-1}$ 的 $N_t \times (N_t - 1)$ 空间正交补集, 可由豪斯霍尔德(Householder)变换^[10]得到。式(5)实现对球帽差分码本的旋转, 使其中心矢量由 $\mathbf{V}_0$ 旋转到 $\omega_{\tau-1}$ 。

因为 $\mathbf{V}_0 = [1, 0, \dots, 0]^H$, 故 $[\mathbf{V}_0 \ \mathbf{V}_0^\perp] = \mathbf{E}$ 为单位阵, 式(6)可简化为 $\mathbf{Q} = [\omega_{\tau-1} \ \omega_{\tau-1}^\perp]$ 。同样按式(2)从 $\mathbf{C}_\tau$ 选定码字 ω_τ 进行预编码;

步骤 4 循环操作到 $\tau = T_{\max}$ 。

基于码本旋转的差分反馈算法研究主要集中在差分码本设计和球帽半径计算, 文献[6-9]都给出了实现算法, 第 4 节阐述本文提出差分球帽码本设计和球帽半径计算方法并和现有算法进行比较。

4 球帽码本和自适应球帽半径计算

4.1 基于矢量伸缩和合成的球帽差分码本

本文球帽差分码本的实现模型如图 2^[7], 球 $\mathbf{O}_1$ 和

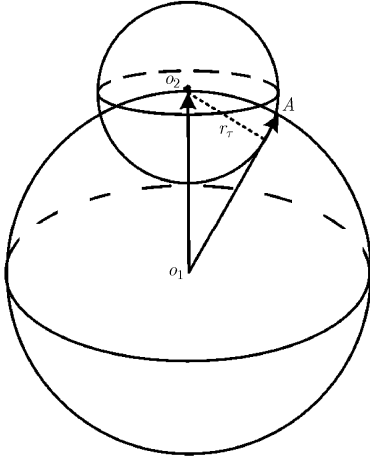


图2 球帽码本算法模型图

O_2 的半径分别是 1 和 r_τ ，球 O_2 的球心位于球 O_1 球面上。 $\mathbf{C}_0^d$ 为生成球帽差分码本的基码本，其中一个码字为 $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2=[1,0,\dots,0]^H$ ，记为 $\mathbf{V}_0$ 。 $\mathbf{C}_0^d$ 的码字乘以伸缩因子 r_τ 后分布在 O_2 球面上。 $\mathbf{C}_0^d$ 由格拉斯曼线包(Grassmannian Line Pack, GLP)码本 $\mathbf{C}_{\text{GLP}}$ 旋转得到，其计算原理同式(5)和式(6)。

本文时刻 τ 下球帽差分码本由式(7)给出

$$\mathbf{C}_\tau^d(i) = \frac{\mathbf{V}_0 + r_\tau \times \mathbf{C}_0^d(i)}{\text{norm}(\mathbf{V}_0 + r_\tau \times \mathbf{C}_0^d(i))}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^B \quad (7)$$

norm 为求矢量 Euclidean 范数运算，其中 r_τ 表示时刻 τ 下的球帽半径。由图 2 可知该算法中球帽差分码本的码字是通过矢量的伸缩和合成得到，且都以 $\mathbf{V}_0$ 为中心，分布在半径为 r_τ 的球帽区域。

对比本文差分码本算法和最新文献[6-9]，本文算法优点有：

(1)本算法在整个反馈系统中只需要一个码本，即球帽差分码本的基码本 $\mathbf{C}_{\text{GLP}}$ 和 $\mathbf{C}_0$ 相同，而文献[7]需要两个 GLP 基码本： $\mathbf{C}_0$ 和用来生成极帽码本的维数为 $N_t - 1$ 、尺寸为 $2^B - 1$ 的基码本，故本文算法实现简单、运算量小。

(2)本算法球帽差分码本旋转得到的球帽码本的码字间相对分布规律不发生变化。文献[6]时刻 τ 下的球帽码本由差分码本的各酉阵码字乘以 $\omega_{\tau-1}$ 生成，其码字间距离不仅与对应酉阵有关，还与 $\omega_{\tau-1}$ 相关，故在不同时刻下球帽码本码字间相对关系不一致，导致性能下降。这一点在文献[7]中给出了详细分析。

(3)本文球帽码本不同于文献[7-9]非线性构造方法，由矢量的线性运算生成，物理意义明确，并易于从矢量空间分布规律给出自适应球帽半径计算方法，这在 4.2 节得到体现。

(4)本文球帽码本的码字分布在球帽区域，而文献[7]的极帽码本中码字都分布在球帽区域的帽沿

上，故随着相关系数 ε 的减少，极帽码本中码字分布更集中，性能下降明显。而且，随着信道时间的增加，球帽半径不能准确跟踪信道扰动，在一定时间后性能也将下降。这在第 5 节仿真数据中得到验证。

4.2 自适应球帽半径

由图 1 知在时刻 τ 下的球帽半径 r_τ 与两个因素有关：信道 $\bar{\mathbf{h}}_\tau$ 、 $\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}$ 间距离统计规律和 $\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}$ 量化误差。信道 CDI、矢量码本按弦距离构成距离空间，记为 (C^{N_t}, d_c) 。为了更清晰阐述三者之间的关系，将两相邻时刻的球帽码本关系表示如图 3[8]。图中 d_2 为时刻 τ 下 $\bar{\mathbf{h}}_\tau$ 和 $\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}$ 间弦距离，为了更好地跟踪信道，应选取信道方向改变的均值：

$$\begin{aligned} d_2(\tau) &= E \left[\sqrt{1 - |\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}^H \bar{\mathbf{h}}_\tau|^2} \right] \leq \sqrt{1 - E |\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}^H \bar{\mathbf{h}}_\tau|^2} \\ &= \sqrt{1 - E \left[\left| \bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}^H (\varepsilon \bar{\mathbf{h}}_{\tau-1} + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \bar{\mathbf{g}}_\tau) \right|^2 \right]} \\ &= \sqrt{1 - \varepsilon^2 E |\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}^H \bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}|^2 - 1(1 - \varepsilon^2) E |\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}^H \bar{\mathbf{g}}_\tau|^2} \\ &= \sqrt{1 - \varepsilon^2 - \frac{(1 - \varepsilon^2)}{N_t}} \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)推导中 $\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}$ 和 $\bar{\mathbf{g}}_\tau$ 统计独立， $|\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}^H \bar{\mathbf{g}}_\tau|^2 \in [0, 1]$ 故 $|\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}^H \bar{\mathbf{g}}_\tau|^2$ 服从参数为 1 和 $N_t - 1$ 的 Beta 分布^[11]，故 $E |\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}^H \bar{\mathbf{g}}_\tau|^2 = 1/N_t$ 。

本算法中 $\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}$ 量化误差上限为 $\tau - 1$ 时刻下球帽差分码本的码字间的平均弦距离，由于本文球帽码本中码字以接近均匀地分布在球帽内，故可由文献[7]中球帽随机矢量量化的量化误差给出

$$d_1(\tau) = \sqrt{1 - |\bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}^H \omega_{\tau-1}|^2} \leq r_{\tau-1} 2^{\frac{-B}{2(N_t-1)}} \quad (9)$$

$\tau = 1$ 的前一时刻的信道 CDI 量化误差为 $\mathbf{C}_0$ 的量化误差，本文仿真设计中 $\mathbf{C}_0$ 为 GLP 码本，故 $r_0 = 1$ ^[12]。

FOGM 信道下 3 个矢量间的相对空间分布是随机的，图 3 中矢量 $\bar{\mathbf{h}}_\tau - \bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}$ 和 $\omega_{\tau-1} - \bar{\mathbf{h}}_{\tau-1}$ 间的夹角随机分布在 0 和 π 之间。为了更好地跟踪信道，选

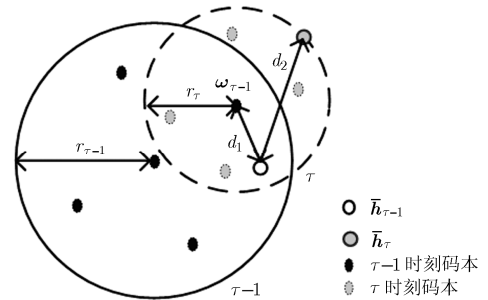


图3 两相邻时刻球帽半径关系示意图

取两矢量夹角的统计平均值(90°)即垂直时弦距离为球帽半径,由距离空间的勾股定理知:

$$r_{\tau} = \sqrt{d_1^2(\tau) + d_2^2(\tau)} \tag{10}$$

按 5 节仿真设计, $v=7$ km/h 时,球帽半径随时间 τ 变化如表 1,可见 r_{τ} 随时间 τ 增加逐渐减小并趋于稳定,即一定时间后差分球帽码本将固定不变,这使系统实现更加简单。

由上面分析过程可知, r_{τ} 是按式(8)~式(10)递推得到,对比文献[6~9]的自适应球帽半径推导方法,本文球帽半径计算方法意义明确,能较好地体现 FOGM 信道下信道扰动和信道矢量量化误差随时间变化的规律。

5 仿真设计与结果

为了验证本文提出的自适应球帽差分反馈算法的性能,进行仿真设计:SU-MISO 系统的发射天线数 $N_t=4$ 、反馈比特数 $B=4$;信道模型为满足式(4)的一阶高斯马尔可夫链;无信道估计误差和反馈时延;以系统容量随时间的变化规律作为性能评价标准。系统起始时刻 $\tau = 0$ 时接收机和发射机有相同 GLP 码本^[13-15],系统信噪比为 10 dB,相关系数 ε 服从 Jakes 模型,满足零阶第 1 类贝叶斯函数 $J_0(2\pi f_D T)$,信道抽样间隔 $T=5$ ms,最大多普勒频

移满足 $f_D = v f_0 / c$ 。系统载波 $f_0=2.5 \times 10^8$ Hz, v 为发射机和接收机相对速度分别取 1, 3, 7, 10 km/h。为了更好说明本文算法的性能,在同样的仿真设计下,对比本文和最新文献[6~8]算法性能。文献[6~8]算法都按文献给出的步骤和参数进行仿真设计,仿真数据如图 4。

从仿真数据可知:不同的相关系数下本文算法的系统容量都比文献[6,7]算法有较大提升,特别是随着相关系数的减少性能提升更加明显;在相关系数较大时($\varepsilon = 0.9987$),本文算法系统容量稍差于文献[8]算法,但随着相关系数的减小本文算法性能逐渐优于文献[8]算法;在相关系数逐渐变小($\varepsilon=0.9881, 0.9363, 0.8721$)时,文献[6,7]的容量曲线随时间的增加逐渐增大并在一定时间后出现下降趋势,该结果和文献论述一致,但本文算法容量曲线随时间的增加逐渐增大并趋于稳定,说明本文算法能更好跟踪信道扰动。综合对比仿真数据,本文提出的自适应球帽差分反馈算法是有效的并且整体性能较现有算法有一定提升。

6 结束语

本文针对信道时间相关 SU-MISO 系统有限反馈现有算法的特点,对差分码本构造和球帽半径计算给出新的思路。本文提出的球帽差分码本是由矢

表 1 $u = 7$ km/h 下 r_{τ} 随时间 τ 变化规律表

τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_{τ}	0.6637	0.4958	0.4220	0.3931	0.3825	0.3788	0.3775	0.3770	0.3768	0.3768

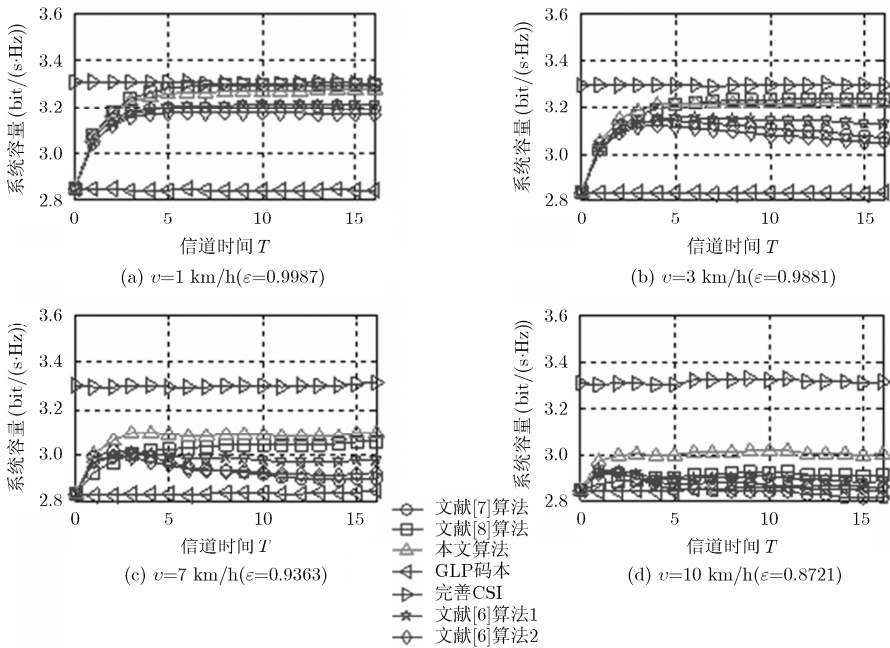


图 4 SNR=10 dB, $v = 1, 3, 7, 10$ km/h 下算法性能

量的线性运算构造生成的, 实现简单, 可行性强; 其球帽半径的计算具有更明确的物理意义; 改进后的差分反馈算法能随时间自适应跟随信道扰动并能获得时间变化趋于稳定的系统容量, 整体性能较现有算法有一定提升。

参考文献

- [1] Love D J. An overview of limited feedback in wireless communication systems[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2008, 26(8): 1341–1365.
- [2] Etkin R H and Tse D N C. Degree of freedom in some underspread MIMO fading channel[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1576–1608.
- [3] 吴敏, 沈超, 裘正定. 时间相干信道下波束赋形系统的有限反馈方法[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(10): 2343–2347.
Wu Min, Shen Chao, and Qiu Zheng-ding. Limited feedback approach in beamforming system over temporally-correlated channels [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(10): 2343–2347.
- [4] IEEE C802.16m-09/0058r4. Differential Feedback for IEEE 802.16m MIMO Schemes[S]. 2009.
- [5] IEEE C802.16m-MIMO-08/1182r3. Codebook Design for IEEE 802.16m MIMO Schemes[S]. 2008.
- [6] Kim T, Love D J, and Clerckx B. MIMO systems with limited rate differential feedback in slowly varying channels[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2011, 59(4): 1175–1188.
- [7] Choi J, Clerckx B, Lee N, *et al.* A new design of polar-cap differential codebook for temporally/spatially correlated MISO channels[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2012, 11(2): 703–711.
- [8] Mirza J, Dmochowski P A, Smith P J, *et al.* A differential codebook with adaptive scaling for limited feedback MU-MISO systems[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2014, 3(1): 2–4.
- [9] Mirza J, Dmochowski P A, Smith P J, *et al.* Limited feedback multiuser MISO systems with differential codebooks in correlated channels[C]. Proceedings of IEEE International Conference on Communications, Budapest, Hungary, 2013: 5386–5391.
- [10] IEEE Standard 802.16m. Draft Amendment to IEEE Standard for Local and Metropolitan Area Networks-part 16: Air Interface for Broadband Wireless Access Systems, Advanced Air Interface[S]. 2009.
- [11] Kim T, Love D J, and Clerckx B. Leveraging temporal correlation for limited feedback multiple antennas systems[C]. Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, Dallas, USA, 2010: 3422–3425.
- [12] Barg A and Nogin D Y. Bounds on packings of spheres in the Grassman manifold[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2002, 48(9): 2450–2454.
- [13] Love D J, Heath R W, and Strohmer T. Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-out wireless systems[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2003, 49(10): 2735–2747.
- [14] Medra A and Davidson T N. Flexible codebook design for limited feedback systems via sequential smooth optimization on the Grassmannian manifold[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(5): 1305–1318.
- [15] Medra A and Davidson T N. Flexible codebook design for limited feedback downlink systems via smooth optimization on the Grassmannian manifold[C]. Proceedings of the IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications, Cesme, Turkey, 2012: 50–54.

刘学锋: 男, 1977年生, 博士生, 研究方向为短距离无线通信、MIMO传输技术。

邹卫霞: 女, 1972年生, 博士, 副教授, 研究方向为短距离无线通信、系统电磁兼容及毫米波通信技术。

杜光龙: 男, 1988年生, 博士生, 研究方向为短距离无线通信、干扰对齐。

王一搏: 男, 1987年生, 博士生, 研究方向为短距离无线通信、无线中继和干扰对齐。