

基于投影法的不确定分数阶混沌系统自适应同步

张友安 余名哲* 耿宝亮

(海军航空工程学院控制工程系 烟台 264001)

摘要: 针对一类具有未知参数、未知非线性函数及外部扰动的分数阶混沌系统, 基于分数阶系统稳定性理论和 Lyapunov 稳定性理论, 该文提出一种基于滑模自适应和投影法的同步控制策略。首先选取一类稳定的分数阶积分滑模面, 运用自适应技术对不确定项进行估计, 设计了同步控制器。然后对自适应设计中容易出现的增长型自适应律运用投影法进行修正, 以保证参数有界, 从而也保证控制输入有界。最后数值仿真证明了所设计控制器的正确性和有效性。

关键词: 分数阶混沌系统; 滑模自适应控制; 投影法; 参数有界

中图分类号: TP273

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2015)02-0455-06

DOI: 10.11999/JEIT140514

Adaptive Synchronization of Uncertain Fractional-order Chaotic Systems Based on Projective Method

Zhang You-an Yu Ming-zhe Geng Bao-liang

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China)

Abstract: Based on the stability theory of fractional-order system and Lyapunov stability theory, and using the sliding mode adaptive control and projective method, a synchronization control strategy is proposed for a class of fractional-order chaotic systems with uncertain parameters, uncertain nonlinear functions and external disturbances. A stable fractional-order integral sliding surface is selected and the adaptive laws are designed to estimate the uncertainties, consequently, the synchronization controller is obtained. Then, the projective method is introduced to modify above basic adaptive laws to prevent the adaptive parameters from diverging to infinite, thus, the boundedness of the control inputs is guaranteed. Finally, the numerical simulation result is presented to show the effectiveness and applicability of the proposed control strategy.

Key words: Fractional-order chaotic system; Sliding mode adaptive control; Projective method; Bounded parameter

1 引言

自 90 年代初, 美国海军实验室的学者 Pecra 和 Carrol 在电子线路的设计实验中实现了混沌同步^[1]以来, 由于其巨大的应用潜力, 混沌同步的研究引起了国内外学者空前的兴趣。在过去的二十年中, 混沌系统的同步研究得到了长足的发展, 多种同步方法被提出来^[2, 3], 各种先进的控制理论被人们引入混沌同步控制中, 所研究的对象从理想的混沌系统模型到具有不确定性的混沌模型, 在理论上几乎已经完备, 并且这些控制方法已在保密通信等实际工程领域得到了广泛应用, 并获得了很好的效果。但是随着研究的深入, 学者们也逐渐碰到一些新的问题, 在很多工程领域, 系统的数学模型所表现出的混沌特性不仅是整数阶的, 同时也有分数阶的^[4], 并且分

数阶系统的混沌特性要远比整数阶次时复杂, 其不仅具有整数阶混沌系统固有的混沌特性同时也具有分数阶系统相关的一些特性, 因此其在工程领域特别是在保密通信领域中的应用潜力更加巨大, 这样就有了要对分数阶混沌系统进行同步控制的新课题。

当前, 绝大多数对分数阶混沌同步进行理论研究的文献中, 研究的对象模型大多精确已知, 或者仅存在简单的参数未知或外部扰动情况, 在进行控制器设计的时候作者也往往要求有不确定项上界已知等种种约束条件。但是在实际控制中, 系统的不确定性绝不仅仅只有未知参数那么简单, 比如在保密通信^[5], 图像加密^[6], 生物工程^[7]等领域, 系统往往存在多种不确定性, 这些不确定性将为系统的同步控制带来不可预计的影响, 并且这些不确定项的上界信息绝大多数情况下是不可能为设计者所掌握的。

2014-04-22 收到, 2014-06-30 改回

*通信作者: 余名哲 18953589889@189.cn

自适应控制对不确定性的处理有其独有的优势^[8,9],但是,设计者们也常看到这样一些现象,有些设计的参数自适应律理论上虽然能够使得对象系统稳定,但在实际控制过程中由于扰动的影响却容易发生自适应参数发散,这就是通常被称之为的增长型自适应律。这种自适应律在实际控制中会随着时间的导致控制量无界,而这种情况在控制设计中是令人无法接受的。例如文献[10-12]等一大类采用自适应技术实现混沌同步的控制器设计中都出现了这样的问题,而这种情况目前还并没有引起相关学者的重视。投影法^[13]采用对参数设置约束集的办法,可将参数向量限制在约束集内,保证自适应参数的有界性。

本文的目的就是在运用自适应控制方法实现不确定分数阶混沌系统同步后,采用投影法对基本的自适应律进行修正,以保证参数有界,解决增长型自适应律存在的参数无界问题,以增强混沌同步方法的实用性。

2 问题描述和模型建立

考虑式(1)所示的分数阶混沌系统:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}_x(t) \quad (1)$$

式中 $D^\alpha \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathbf{x}(\tau) d\tau$ 表示 Riemann-Liouville 分数阶导数^[14], $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数, 阶次 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, $\alpha_i \in (0, 1)$, $i = (1, 2, \dots, n)$; $\mathbf{x}(t) \in R^n$ 为驱动系统的状态向量; $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \in R^{n \times m_1}$ 为函数矩阵; $\boldsymbol{\theta} \in R^{m_1}$ 为未知的参数向量, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in R^n$ 为已知的函数向量; $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in R^n$ 为系统未知有界的函数向量; $\mathbf{d}_x(t) \in R^n$ 为驱动系统未知有界的外部扰动。

现将式(1)作为驱动系统,构建相应具有控制输入的响应系统:

$$D^\alpha \mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)\boldsymbol{\delta} + \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \Delta \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{d}_y(t) + \mathbf{u}(t) \quad (2)$$

式中 $\mathbf{y}(t) \in R^n$ 为响应系统的状态向量; $\mathbf{G}(\mathbf{y}, t)$ 为适当维数函数矩阵; $\boldsymbol{\delta} \in R^{m_2}$ 为未知的参数向量, $\mathbf{g}(\mathbf{y}, t) \in R^n$ 是已知光滑向量函数; $\Delta \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) \in R^n$ 为未知有界的向量函数; $\mathbf{d}_y(t) \in R^n$ 为未知有界的外部扰动; $\mathbf{u}(t)$ 为待设计的控制输入。

定义驱动系统与响应系统的误差 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)$, 本文的目的就是设计控制器 $\mathbf{u}(t)$, 使得当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $\|\mathbf{e}(t)\| = 0$, 即驱动系统与响应系统达到完全同步。

考虑驱动式(1)和响应式(2), 分数阶同步误差系统方程为

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{e}(t) &= \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)\boldsymbol{\delta} + \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \Delta \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{d}_y(t) + \mathbf{u}(t) \\ &\quad - \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\theta} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{d}_x(t) \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{y}, t)\boldsymbol{\delta} - \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \Delta \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) - \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}(t) + \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_y(t) - \mathbf{d}_x(t)$ 。

3 自适应同步控制器设计

为方便读者理解,在本节先对文献[15]所做的工作做简单的介绍。

选取如式(4)所示的滑模面:

$$\mathbf{s} = D^{\alpha-1} \mathbf{e} + \int_0^t \mathbf{C} \mathbf{e}(\tau) d\tau \quad (4)$$

式中 $\mathbf{s} \in R^n$, $\mathbf{e} \in R^n$, $\mathbf{C} \in R^{n \times n}$ 。

对式(4)两边关于时间求导:

$$\dot{\mathbf{s}} = D^\alpha \mathbf{e} + \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (5)$$

由滑模面开始滑模运动条件 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 和 $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$, 及分数阶系统稳定性条件^[16]可知, 当选取合适的矩阵 $\mathbf{C}$, 式(5)将是渐近稳定性的, 也即 $\|\mathbf{s}\| = 0$ 时有 $\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0$, 并且 $\mathbf{C}$ 的选取将决定 $\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0$ 的速度。

假设 1 系统非线性不确定项和外部干扰均有界, 且满足

$$\left. \begin{aligned} \|\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})\|_\infty &\leq \varepsilon_1 \\ \|\Delta \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty &\leq \varepsilon_2 \\ \|\mathbf{d}_x\|_\infty &\leq d_1^* \\ \|\mathbf{d}_y\|_\infty &\leq d_2^* \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, d_1^*, d_2^*$ 为非负常数, 那么对任意时间 t 总是存在一个正常数 ρ 满足

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}\|_\infty \\ \leq \|\Delta \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})\|_\infty + \|\mathbf{d}\|_\infty \\ \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + d_1^* + d_2^* \leq \rho \end{aligned} \quad (7)$$

假设 2 未知参数向量 $\boldsymbol{\delta}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 是定常的或是慢时变的。

设计如式(8)所示的控制律:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{G}(\mathbf{y}, t)\hat{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - k\mathbf{s}(t) - \mathbf{C} \mathbf{e}(t) - \hat{\rho} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 分别为未知参数向量 $\boldsymbol{\delta}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计; $\hat{\rho}$ 是常数 ρ 的估计; k 为大于零的反馈增益常数。

选取参数自适应律:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}} &= \mu_1 \mathbf{G}^T(\mathbf{y}, t) \mathbf{s}(t) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= -\mu_2 \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}(t) \\ \dot{\hat{\rho}} &= \mu_3 \|\mathbf{s}(t)\|_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 μ_1, μ_2, μ_3 为设计权重, 且为正常数。

将式(8)代入式(3)可得误差系统方程为

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{e} &= \mathbf{G}(\mathbf{y})\tilde{\boldsymbol{\delta}} - \mathbf{F}(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \Delta \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \mathbf{d} - k\mathbf{s} - \tilde{\rho} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{C} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (10)$$

将式(10)代入式(5)可得

$$\begin{aligned} \dot{s} = & G(y)\tilde{\delta} - F(x)\tilde{\theta} + \Delta g(y) - \Delta f(x) \\ & + d - ks - \hat{\rho} \operatorname{sgn}(s) \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\tilde{\delta} = \delta - \hat{\delta}$, $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ 。

综合以上分析, 有如下定理存在。

定理 1 在同步控制律式(8)和自适应律式(9)的作用下, 误差式(3)将渐近收敛到滑模面 $\|s\| = 0$ 上, 即驱动系统式(1)和响应系统式(2)达到完全同步。

定理 1 的证明过程参见文献[15]。

分析基本自适应律式(9), 以 $\hat{\rho}$ 为例, 本文注意到 $\dot{\hat{\rho}} = \mu_3 \|s\| \geq 0$, 这意味着 $\hat{\rho}$ 为典型的增长型自适应律, 即只要有 $\|s\| \neq 0$, $\hat{\rho}$ 就是增加的, 而对于实际的滑模控制而言, 由于有扰动的影响, 是不容易做到绝对的 $\|s\| = 0$ 的, 因此随着时间累积, $\hat{\rho}$ 会逐渐发散, 根据控制量的表达式(8), 可知这将会造成 $u(t) \rightarrow \infty$, 很显然对于这样的结果是无法让人接受的, 因此必须对自适应律进行修正来保证参数的有界性。

4 参数投影法修正自适应律

由 V 的定义知 $\hat{\delta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\rho}$ 有界, 又由前文的分析知, 基本的自适应律式(9)并不一定能保证参数 $\hat{\delta}$, $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\rho}$ 有界。分析式(8), 如果 $\hat{\delta}$, $\hat{\theta}$ 或 $\hat{\rho}$ 发散, 则必然导致控制量 $u(t)$ 也发散, 从而导致 $u(t)$ 无界。因此, 要切实得到一个稳定的系统和可实现的控制输入, 必须要对可能造成发散的自适应律进行修正^[17,18], 保证参数有界。

定义 $\hat{\delta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\rho}$ 的约束集 Ω_δ , Ω_θ 和 Ω_ρ 为

$$\Omega_\delta = \left\{ \hat{\delta} \in R^{m_2} \mid \|\hat{\delta}\| \leq M_\delta \right\} \quad (12)$$

$$\Omega_\theta = \left\{ \hat{\theta} \in R^{m_1} \mid \|\hat{\theta}\| \leq M_\theta \right\} \quad (13)$$

$$\Omega_\rho = \left\{ \hat{\rho} \mid |\hat{\rho}| \leq M_\rho \right\} \quad (14)$$

式中 M_δ , M_θ , M_ρ 均为常数, 它们的值将依据对应的不确定项的变化范围来给出。

修正自适应律见式(15)~式(17)可以保证

$$\begin{aligned} \hat{\delta} \in \Omega_\delta, \quad \hat{\theta} \in \Omega_\theta \text{ 和 } \hat{\rho} \in \Omega_\rho \\ \dot{\hat{\delta}} = \begin{cases} \mu_1 G^T s, & \|\hat{\delta}\| < M_\delta \text{ 或 } (\|\hat{\delta}\| = M_\delta \text{ 且 } \hat{\delta}^T G^T s \leq 0) \\ \mu_1 G^T s - \mu_1 \hat{\delta} \frac{\hat{\delta}^T}{\|\hat{\delta}\|^2} G^T s, & (\|\hat{\delta}\| = M_\delta \text{ 且 } \hat{\delta}^T G^T s > 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} = \begin{cases} -\mu_2 F^T s, & \|\hat{\theta}\| < M_\theta \text{ 或 } (\|\hat{\theta}\| = M_\theta \text{ 且 } \hat{\theta}^T F^T s \geq 0) \\ -\mu_2 F^T s + \mu_2 \hat{\theta} \frac{\hat{\theta}^T}{\|\hat{\theta}\|^2} F^T s, & (\|\hat{\theta}\| = M_\theta \text{ 且 } \hat{\theta}^T F^T s < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = \begin{cases} \hat{\rho} = \mu_3 \|s\|, & \hat{\rho} < M_\rho \\ \hat{\rho} = 0, & \hat{\rho} = M_\rho \end{cases} \quad (17)$$

定理 2^[13] 设约束集 Ω_δ , Ω_θ 和 Ω_ρ 的定义由式(12)~式(14)给出。假如参数的初始值满足 $\hat{\delta}(0) \in \Omega_\delta$, $\hat{\theta}(0) \in \Omega_\theta$ 和 $\hat{\rho}(0) \in \Omega_\rho$, 则对任意时间 $t \geq 0$, 自适应律式(15)~式(17)能够保证 $\hat{\delta}(t) \in \Omega_\delta$, $\hat{\theta}(t) \in \Omega_\theta$, $\hat{\rho}(t) \in \Omega_\rho$ 。

证明 为证明经过修正后的自适应律能够保证参数有界, 即 $\|\hat{\delta}\| \leq M_\delta$, 选择 Lyapunov 函数: $V_\delta = (1/2)\hat{\delta}^T \hat{\delta}$ 。当式(15)第 1 行条件成立, 如果有 $\|\hat{\delta}\| \leq M_\delta$, 则: 要么 $\|\hat{\delta}\| < M_\delta$, 要么 $\|\hat{\delta}\| = M_\delta$, 且 $\dot{V}_\delta = \mu_1 \hat{\delta}^T G^T s \leq 0$ 。因此, 在这种情况下, 可以得到 $\|\hat{\delta}\| \leq M_\delta$; 当式(15)第 2 行条件成立, 则有

$$\|\hat{\delta}\| = M_\delta \text{ 和 } \dot{V}_\delta = \mu_1 \hat{\delta}^T G^T s - \mu_1 \hat{\delta}^T \hat{\delta} \frac{\hat{\delta}^T}{\|\hat{\delta}\|^2} G^T s.$$

$s = 0$ 。因此, 在这种情况下, $\|\hat{\delta}\| \leq M_\delta$ 成立。这是因为初始条件 $\|\hat{\delta}(0)\| \leq M_\delta$, 对所有的 $t \geq 0$, 都有 $\|\hat{\delta}(t)\| \leq M_\delta$ 。同理可以证明, 对于所有的 $t \geq 0$, 都有 $\|\hat{\theta}(t)\| \leq M_\theta$ 和 $|\hat{\rho}(t)| \leq M_\rho$ 。证毕

定理 3 在同步控制律式(8)和修正自适应律式(15)~式(17)的作用下, 驱动系统式(1)和响应系统式(2)将达到完全同步。

证明 选择如式(18)所示的 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} s^T s + \frac{1}{2\mu_1} (\delta - \hat{\delta})^T (\delta - \hat{\delta}) \\ & + \frac{1}{2\mu_2} (\theta - \hat{\theta})^T (\theta - \hat{\theta}) + \frac{1}{2\mu_3} (\rho - \hat{\rho})^2 \end{aligned} \quad (18)$$

对等式两边关于时间求导, 并将式(11)和修正自适应律式(15)~式(17)代入可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s^T \dot{s} - \hat{\delta}^T G^T s + \hat{\theta}^T F^T s - (\rho - \hat{\rho}) \|s\|_1 \\ & + I_\delta^* (\delta - \hat{\delta})^T \frac{\hat{\delta} \hat{\delta}^T}{\|\hat{\delta}\|^2} G^T s - I_\theta^* (\theta - \hat{\theta})^T \frac{\hat{\theta} \hat{\theta}^T}{\|\hat{\theta}\|^2} F^T s \\ & + I_\rho^* (\rho - \hat{\rho}) \|s\|_1 \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)中 I_δ^* , I_θ^* 和 I_ρ^* 的取值为 0 或 1, 当取 0 时表示修正自适应律式(15)~式(17)第 1 行条件成立, 当取 1 时表示第 2 行条件成立。现在分两种情况进行讨论, 当 $I_\delta^* = I_\theta^* = I_\rho^* = 0$, 即第 1 行条件得到满足, 式(19)变为

$$\dot{V} = s^T \dot{s} - \hat{\delta}^T G^T s + \hat{\theta}^T F^T s - (\rho - \hat{\rho}) \|s\|_1 \quad (20)$$

将式(11)代入式(20)可得

$$\begin{aligned}\dot{V} = & \mathbf{s}^T (\mathbf{G}(\mathbf{y})\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{F}(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \Delta\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{d} - k\mathbf{s}) \\ & - \hat{\rho} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{G}^T \mathbf{s} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{F}^T \mathbf{s} - (\rho - \hat{\rho}) \|\mathbf{s}\|_1 \\ = & \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{y})\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{s}^T \mathbf{F}(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{s}^T (\Delta\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}) \\ & - k \|\mathbf{s}\|_2^2 - \hat{\rho} \|\mathbf{s}\|_1 - \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{G}^T \mathbf{s} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{F}^T \mathbf{s} - \rho \|\mathbf{s}\|_1 + \hat{\rho} \|\mathbf{s}\|_1\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{y})\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{G}^T(\mathbf{y})\mathbf{s}$; $\mathbf{s}^T \mathbf{F}(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{s}$, 并由条件式(7)和范数不等式 $\|\bullet\|_\infty \leq \|\bullet\|_2 \leq \|\bullet\|_1$ 可得

$$\begin{aligned}\dot{V} = & \mathbf{s}^T (\Delta\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}) - k \|\mathbf{s}\|_2^2 - \rho \|\mathbf{s}\|_1 \\ \leq & \|\Delta\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}\|_\infty \|\mathbf{s}\|_\infty - k \|\mathbf{s}\|_2^2 - \rho \|\mathbf{s}\|_1 \\ \leq & \rho \|\mathbf{s}\|_1 - k \|\mathbf{s}\|_2^2 - \rho \|\mathbf{s}\|_1 = -k \|\mathbf{s}\|_2^2 \leq 0\end{aligned}$$

这个过程在定理 1, 即文献[15]中已经得到了证明; 当 $I_\delta^* = I_\theta^* = I_\rho^* = 1$, 即式(15)~式(17)第 2 行条件得到满足, 本文只需证明式(19)右边最后 3 项为负即可得到结论。当 $I_\delta^* = 1$, 即表示满足条件: $\|\hat{\boldsymbol{\delta}}\| = \mathbf{M}_\delta$

和 $\mu_1 \hat{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{G}^T \mathbf{s} > 0$, 由于 $\|\hat{\boldsymbol{\delta}}\| = \mathbf{M}_\delta \geq \|\boldsymbol{\delta}\|$, 那么很容易可以推得 $(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}})^T \hat{\boldsymbol{\delta}} = \frac{1}{2} (\|\boldsymbol{\delta}\|^2 - \|\hat{\boldsymbol{\delta}}\|^2 - \|\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}\|^2) < 0$, 从而容易证明 $I_\delta^* (\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}})^T \frac{\hat{\boldsymbol{\delta}} \hat{\boldsymbol{\delta}}^T}{\|\hat{\boldsymbol{\delta}}\|^2} \mathbf{G}^T \mathbf{s} < 0$, 同理可以证明

$$-I_\theta^* (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T}{\|\hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2} \mathbf{F}^T \mathbf{s} < 0; \text{ 当 } I_\rho^* = 1 \text{ 时, 由于 } \rho < \hat{\rho},$$

则有 $I_\rho^* (\rho - \hat{\rho}) \|\mathbf{s}\| < 0$; 从而可推得 $\dot{V} \leq 0$ 。

综合以上分析, I_δ^* , I_θ^* , I_ρ^* 的取值除以上两种组合外, 其他组合均可推得 $\dot{V} \leq -k \|\mathbf{s}\|_2^2 \leq 0$ 。

进一步结合文献[15]的稳定性证明, 结合 Barbalat 引理^[19]可知结论成立。证毕

5 数值仿真与分析

本文采用如下对象模型进行仿真验证, 并采用预估-校正算法进行分数阶微分方程的解析运算。

以不确定分数阶 Chen 系统作为驱动系统:

$$\begin{aligned}D^\alpha \mathbf{x} = & \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_1 + x_2 \\ 0 & -x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \cos(x_1 t) \sin(2x_2 t) \\ 0.2 \sin(x_1 x_2 t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \sin(\pi t) \\ 1.4 \cos(\pi t) \\ 0.8 \cos(\pi t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

当 $\alpha_i = 0.9, i = (1, 2, 3)$, 未知参数 $a = 35, b = 3, c = 28$ 时, 驱动系统表现出混沌状态。

选取不确定分数阶 Rössler 系统增加控制输入构建响应系统:

$$\begin{aligned}D^\alpha \mathbf{y} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_2 - y_3 \\ y_1 \\ y_2 y_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0.2 \sin^2(y_2 t) \\ 0.3 \cos(y_1 t) \\ 0.2 \sin(y_2 t) \sin(y_3 t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

当 $\alpha_i = 0.9, i = (1, 2, 3)$, 未知参数 $m = 0.4, p = 0.2, r = 10$ 时, 响应系统表现出混沌状态, 其混沌相图见图 1。

给定驱动系统和响应系统的初始值为 $(2, 4, 1)^T$ 和 $(-4, -3, 2)^T$, 为简单起见取矩阵 $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, 设计参数 $\mu_1 = 10, \mu_2 = 20, \mu_3 = 10, k = 2$ 。根据给定的驱动系统, 对不确定项取 ∞ -范数, 可以得到未知项的上界取值范围: $d^* \geq 1.4, \varepsilon_1 \geq 0.2, \varepsilon_2 \geq 0.3$ 。预设参数估计初值为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = (0, 0, 0)^T, \hat{\boldsymbol{\delta}}(0) = (0, 0, 0)^T, \hat{\rho}(0) = 0.1$, 并设定不确定项 ρ 的约束集 $\mathbf{M}_\rho = 1.5$, 参数 b 的约束集为 $\mathbf{M}_{\delta b} = 3.3$ 。

由定理 1 可知, 误差系统在如下的控制器作用下将稳定到零点。

控制律:

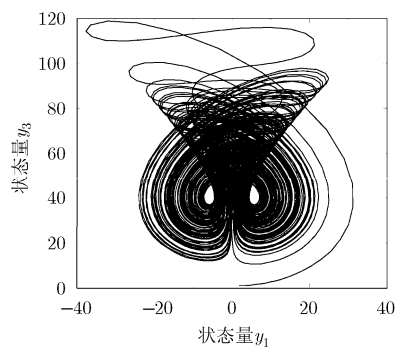
$$\begin{aligned}\mathbf{u} = & \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_1 + x_2 \\ 0 & -x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} -y_2 - y_3 \\ y_1 \\ y_2 y_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{p} \\ \hat{r} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$-k\mathbf{s} - \mathbf{C}\mathbf{e} - \hat{\rho} \operatorname{sgn}(\mathbf{s})$$

基本自适应律:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}} = & 10 \times \begin{bmatrix} 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = & -20 \times \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & x_1 + x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{\rho}} = & 10 \times (|s_1| + |s_2| + |s_3|)\end{aligned}$$

上式中 $\hat{\boldsymbol{\delta}} = (\hat{m}, \hat{p}, \hat{r})^T; \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^T$ 。

图1 不确定分数阶 Rössler 系统混沌吸引子($\alpha = 0.9$)

由给出的模型条件, 对系统进行数值仿真, 仿真结果如图2~图4所示。图2为对定理3的仿真验证

证曲线, 分析发现所设计的同步控制器可以在有限时间内实现对不确定分数阶混沌系统的同步, 并且参数自适应律可以较好地逼近真实值; 图3为对基本自适应律参数 b 和参数 ρ 应用投影法进行修正后的效果, 可以看到, 这两个参数有效地被限制在了所设定的约束集内; 图4为采用投影法前后控制输入的对比效果, 为了进行清楚的比较, 分别绘制了控制量 u_1 和 u_2 , 从图中可见, 当未采用投影法时, 随时间积累, 控制量慢慢增加, 并逐渐发散, 采用投影法后, u_1 和 u_2 被限制在一个有限范围内, 为有界控制, 因而控制是可实现的。

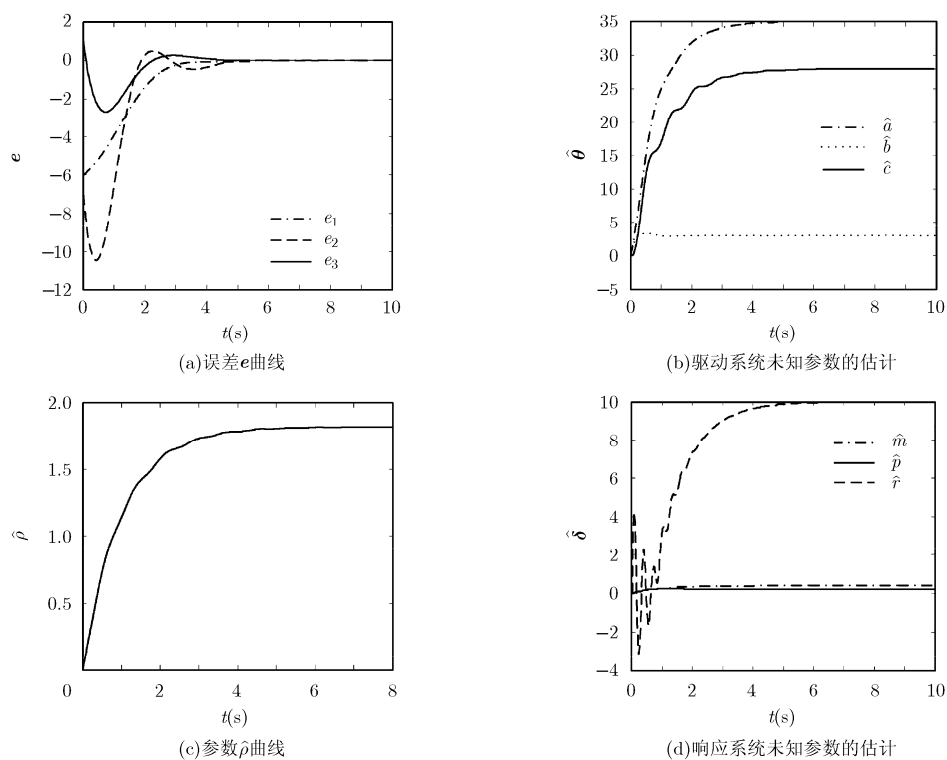


图2 采用投影法前同步仿真曲线

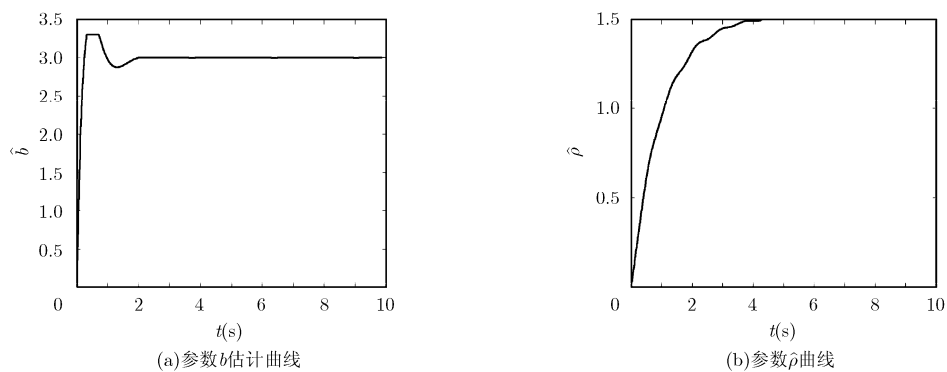


图3 采用投影法后参数辨识结果

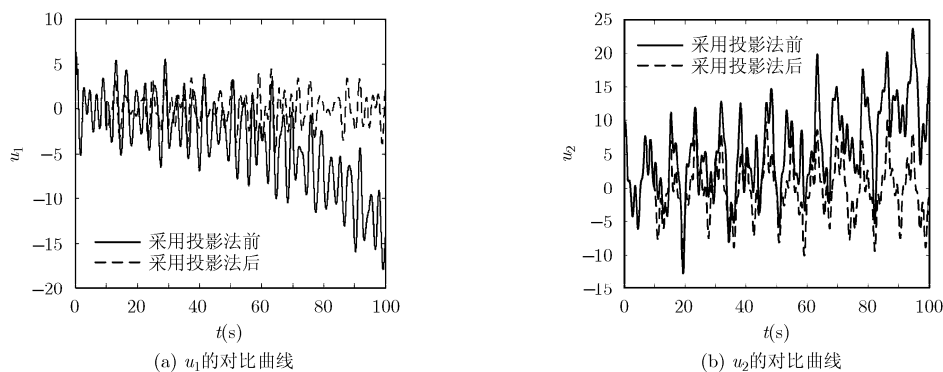


图4 采用投影法前后控制输入对比曲线

6 结束语

本文对存在未知参数、非线性未知项和外部扰动的分数阶混沌系统做了自适应同步研究,首先选取了一类稳定的分数阶积分滑模面,然后对慢时变的未知参数和不确定上界 ρ 设计了相应的自适应律,接着设计了同步控制器,最后,为了防止自适应参数发散,采用投影法对自适应律进行了修正。参数 $\hat{\rho}$ 是比较典型的增长型自适应律,从仿真情况来看,经修正后的自适应律完全可以保证自适应参数有界。

参考文献

- [1] Pecora L M and Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] Sheikhan M, Shahnazi R, and Garoucy S. Synchronization of general chaotic systems using neural controllers with application to secure communication[J]. *Neural Computing and Applications*, 2013, 22(2): 361-373.
- [3] Wang Bo, Peng Shi, Karimi H R, *et al.* Robust H_∞ synchronization of a hyper-chaotic system with disturbance input[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2013, 14(3): 1487-1495.
- [4] Razminia A and Baleanu D. Complete synchronization of commensurate fractional order chaotic systems using sliding mode control[J]. *Mechatronics*, 2013, 23(7): 873-879.
- [5] Luo Chao and Wang Xing-yuan. Chaos generated from the fractional-order complex Chen system and its application to digital secure communication[J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2013, 24(4): 25-48.
- [6] Sheu L J. A speech encryption using fractional chaotic systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 65(1/2): 103-108.
- [7] Park M J, Kwon O M, Park J H, *et al.* Synchronization criteria for coupled stochastic neural networks with time-varying delays and leakage delay[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(5): 1699-1720.
- [8] Åström K J and Wittenmark B. Adaptive Control[M]. Second Edition, Mineola, NY, US: Dover Publications Inc, 2011: 24-33.
- [9] Bernardo M D, Montanaro U, and Santini S. Hybrid model reference adaptive control of piecewise affine systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(2): 304-316.
- [10] Wang Cun-xu, Lin Sheng, Cao Fu-yi, *et al.* Adaptive synchronization for a class of novel uncertain chaotic systems

with channel delay and its applications to secure communications[C]. Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Broadband Network and Multimedia Technology (IC-BNMT), Beijing, China, 2010: 80-84.

- [11] 李秀春, 徐伟, 肖玉柱. 一类受扰混沌系统的自适应滑模控制[J]. *物理学报*, 2008, 57(8): 4721-4728.
- [12] Li Xiu-chu, Xu Wei, and Xiao Yu-zhu. Adaptive slide mode control for a class of chaotic systems with perturbations[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(8): 4721-4728.
- [13] Zhang Ruo-xun and Yang Shi-ping. Robust chaos synchronization of fractional-order chaotic systems with unknown parameters and uncertain perturbations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(3): 983-992.
- [14] Luenberger D G. Optimization by Vector Space Methods[M]. Stanford University, CA, US: John Wiley & Sons, 1968: 297-299.
- [15] Jankowski T. Fractional equations of Volterra type involving a Riemann-Liouville derivative[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2013, 26(3): 344-350.
- [16] 余名哲, 张友安. 一类不确定分数阶混沌系统的滑模自适应同步[OL]. <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20131224.0835.005.html>, 2013, 12.
- [17] Yu Ming-zhe and Zhang You-an. Sliding mode adaptive synchronization for a class of fractional-order chaotic systems with uncertainties[OL]. <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20131224.0835.005.html>, 2013, 12.
- [18] Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing[C]. Proceedings of the Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, 1996, 2: 963-968.
- [19] Luenberger D G and Ye Y. Linear and Nonlinear Programming[M]. Third Edition, Stanford University, CA, US: Springer, 2008: 330-345.
- [20] Wang Li-xing. A Course in Fuzzy System and Control[M]. Upper saddle River, NJ, US: Prentice-Hall, Inc, 1997: 254-261.
- [21] Wu Zhao-yan and Fu Xin-chu. Structure identification of uncertain dynamical networks coupled with complex-variable chaotic systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(9): 1269-1275.

张友安: 男, 1963年生, 博士, 教授, 研究方向为非线性理论, 导航、制导及智能控制研究。

余名哲: 男, 1982年生, 博士生, 研究方向为非线性理论及混沌同步研究。

耿宝亮: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为智能控制及应用研究。