第 37 卷第 2 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.37 No.2
2015 年 2 月 Journal of Electronics & Information Technology Feb. 2015

基于总体冲突概率和三维布朗运动的冲突探测算法

石 磊[①②] 吴仁彪[*①] 黄晓晓[①]
[①](中国民航大学智能信号与图像处理天津市重点实验室 天津 300300)
[②](天津大学电子信息工程学院 天津 300072)

摘 要：随着空中交通流量的增加，冲突探测在空中交通管理系统中的作用越来越重要。该文提出了一种概率型冲突探测算法，计算向前看时间内的总体冲突概率。基于飞机 3 维布朗运动模型，飞机的预测航迹可以表示为确定航迹外加布朗运动扰动。对于两飞机速度为常值的运动情况，冲突概率可以表示为做布朗运动的飞机进入运动的飞机保护区的概率，使用坐标变换和 Bachelier-Levy 定理进行估计；对于两飞机运动为非匀速运动情况，预测航迹则可以使用足够多速度为分段常值的片段来近似，计算出每一片段内的冲突概率，并给出了向前看时间内总体冲突概率的上下界。与蒙特卡罗仿真结果比较，算法满足冲突探测精度要求，对及时发现冲突和冲突解决具有重要意义。

关键词：空中交通管理系统；总体冲突概率；3 维布朗运动；坐标变换；Bachelier-Levy 定理
中图分类号： TP391 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2015)02-0360-07
DOI: 10.11999/JEIT140363

Conflict Detection Algorithm Based on Overall Conflict Probability and Three Dimensional Brownian Motion

Shi Lei[①②] Wu Ren-biao[①] Huang Xiao-xiao[①]
[①](*Tianjin Key Laboratory for Advanced Signal Processing*, *Civil Aviation University of China*, *Tianjin* 300300, *China*)
[②](*School of Electronic Information Engineering*, *Tianjin University*, *Tianjin* 300072, *China*)

Abstract: With the increasing of the air traffic flow, conflict detection plays an increasingly important role in air traffic management system. A probabilistic conflict detection algorithm is proposed. Overall conflict probability in look-ahead time is calculated. The aircraft predicted trajectory is expressed as deterministic trajectory plus a Brownian motion perturbation. For the case of constant aircraft speed, conflict probability is expressed as the probability of an aircraft with Brownian motion perturbation entering a time-varying moving protection zone, the probability is approximated using coordinate transformation and Bachelier-Levy theorem. For the case of aircraft with non-constant speed, predicted trajectory can be approximated by a large enough number of constant speed segments. Conflict probability of each segment is calculated and the overall conflict probability bounds in look-ahead time are given. Compared with Monte Carlo simulations, the proposed algorithm is accurate for conflict detection and it is useful to detect and avoid conflicts in air traffic management system.

Key words: Air traffic management system; Overall conflict probability; Three dimensional Brownian motion; Coordinate transformation; Bachelier-Levy theorem

1 引言

空中交通管理的基本要求是保证飞行的安全。空域中飞行的安全是以飞机之间发生冲突的次数来衡量的。当飞机之间的距离小于等于最小安全间隔时则认为发生飞行冲突[1]。最小安全间隔分为最小水平间隔和最小垂直间隔，它们构成了一个以飞机为中心的圆柱形保护区。航路区的最小水平间隔为 9.3 km，终端区的最小水平间隔为 5.6 km。在未实行缩小最小垂直间隔(RVSM)之前，飞机飞行高度在 8.8 km 以上时，最小垂直间隔为 610 m，飞机飞行高度在 8.8 km 以下时，最小垂直间隔为 305 m[2]；实行 RVSM 之后，最小垂直间隔标准均为 305 m。

随着民用和通用航空运输业的快速发展，空域中飞行密度大大增加，如何高效地利用有限空域并保证飞行安全成了空中交通管理系统的一个巨大挑战。飞行冲突探测成为了空中交通管理系统保障飞行安全高效的一个重要工具。飞行冲突探测的基本思路就是利用雷达数据、ADS-B 数据以及交通管制信息等，提前探测出可能的飞行冲突，并给予管制员提示，让管制员有足够的时间通知飞行员来避免飞行冲突的发生。

2014-03-19 收到，2014-09-17 改回
国家科技支撑计划(2011BAH24B12)和国家自然科学基金委员会与中国民航局联合资助项目(U1233109)资助课题
*通信作者：吴仁彪 rbwu@cauc.edu.cn

飞行冲突探测包括确定型冲突探测和概率型冲突探测[3]。确定型冲突探测根据飞机当前位置和速度不考虑其它因素的影响预测飞机未来航迹并进行冲突判断，而概率型冲突探测则考虑飞机受到导航、跟踪控制精度以及风等因素影响，预测航迹具有不确定性，从而导致冲突结果为概率。关于概率型冲突探测，国内外研究者进行了一系列的研究。Prandini 等人[4,5]提出了计算飞行冲突概率的随机化方法；刘小龙等人[6]提出了一种改进的 Prandini 概率型冲突探测算法，提高了运算效率；梁海军等人[7]提出了 3 维坐标系下的冲突探测算法，使用蒙特卡罗方法计算冲突概率并分析了一系列参数对冲突概率的影响；文献[8]提出了基于位置空间离散化思想的快速算法来计算冲突概率；文献[9]提出了基于航迹预测的位置预测模型，使用概率分布函数估计法估计冲突概率。以上方法基于瞬时冲突概率，瞬时冲突概率反映了在某一时刻两飞机冲突的可能性，并不能直接代表一段时间内两飞机冲突的可能性，并且瞬时冲突概率对于两飞机预测航迹误差较为敏感，当预测航迹误差协方差很大时，冲突概率会变小，有可能导致漏警。而总体冲突概率则是向前看时间内两飞机冲突的概率，更能反映两飞机在向前看时间内冲突的可能性。文献[10]提出了自由飞行情况下飞机航迹预测模型，使用不同的概率密度描述飞机动态参数，并使用蒙特卡罗方法求解冲突概率；文献[11]使用多级分解以及序贯蒙特卡罗的方法计算冲突概率，来减小计算量。不过蒙特卡罗方法计算量依然较大，不太适合于工程应用。文献[2,12]提出了飞机位置预测误差模型以及一种估计方法求冲突概率，适用于航路上匀速飞行的飞机，但并不适合飞机飞行状态改变的情况。文献[5,13]提出了基于布朗运动的冲突探测算法，求向前看时间内的冲突概率；李丹等人[14]对基于布朗运动的方法进行改进用于减小误警率，不过文献[5,13,14]提出的冲突探测算法仅仅适用于 2 维空间两飞机匀速直线运动的情况，对于 3 维空间中飞机改变飞行方向等情况则不适用。

针对上述问题，本文提出了一种基于总体冲突概率思想的冲突探测算法，适用于 3 维空间中飞机运动不仅仅为匀速直线运动的情况，并提出了一种冲突概率的估计方法。飞机运动模型基于 3 维布朗运动，飞机冲突概率可以表示为做布朗运动的飞机进入运动的飞机保护区的概率。对于两飞机相对运动为匀速直线运动情况(相对速度为常值)，使用坐标变换和 Bachelier-Levy 定理来估算冲突概率。对于相对运动为非匀速直线运动的情况，则可以使用足够多相对速度为分段常值的片段来近似，求出每一片段的冲突概率，则向前看时间内总体冲突概率上下界可以由每个片段的冲突概率给出。

2　飞行冲突概率模型

2.1 飞机运动模型

本节建立飞机运动模型，预测在 $[0,T]$ 时间段内的飞机航迹，其中 T 为向前看时间。建立以 xyz 为坐标轴的惯性坐标系，其中 xy 为水平面坐标轴，z 为垂直方向坐标轴。

飞机在飞行中会受到风等一系列不确定因素的影响。这些因素对飞机地面速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)/\mathrm{d}t$ 的扰动可以认为呈高斯分布[5,13]，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{\omega}(t) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{X}(t)$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ 为 t 时刻飞机的位置和空速，$\boldsymbol{\omega}(t)$ 为高斯分布的随机变量。考虑飞机在 3 维空间中飞行，t 时刻飞行方向在水平面的投影与惯性坐标系 x 轴正向夹角为 $\theta(t)$，则飞机位置 $\boldsymbol{X}(t)$ 可以用随机微分方程表示。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{R}(\theta(t))\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(t) \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{B}(t)$ 为标准布朗运动；$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}(\sigma_a,\sigma_c,\sigma_v)$，其中 $\sigma_a^2,\sigma_c^2,\sigma_v^2$ 分别是飞机水平航向、水平侧向和垂直方向速度扰动的功率谱密度。$\boldsymbol{R}(\theta(t))$ 为 t 时刻的旋转矩阵，由于风对飞机水平速度和垂直速度影响可以认为是独立的，因此 $\boldsymbol{R}(\theta(t))$ 为[12]

$$\boldsymbol{R}(\theta(t))=\begin{bmatrix}\cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0\\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3}$$

2.2 飞机速度为常值时的冲突概率

不妨考虑飞机 A 和 B，其中飞机 A 在 $t=0$ 时刻位于惯性坐标系原点，飞机 B 在 t=0 时刻位于 $\Delta\boldsymbol{x}_0$。飞机 A 速度为 $\boldsymbol{u}^A$，速度矢量在水平面投影平行于 x 轴正向；飞机 B 速度为 $\boldsymbol{u}^B$，速度矢量在水平面投影与 x 轴正向夹角为 θ，则两飞机位置 $\boldsymbol{X}^A(t)$ 和 $\boldsymbol{X}^B(t)$ 可以表示为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{X}^A(t)&=\boldsymbol{u}^At+\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^A(t)\\ \boldsymbol{X}^B(t)&=\Delta\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{u}^Bt+\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^B(t)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{B}^A(t)$ 和 $\boldsymbol{B}^B(t)$ 分别为标准布朗运动，$\boldsymbol{\Sigma}^2$ 为飞机速度扰动的功率谱密度，$\boldsymbol{R}(\theta)$ 为飞机 B 的旋转矩阵。

两飞机相对位置 $\Delta\boldsymbol{X}(t)$ 可以由式(4)可得

$$\Delta\boldsymbol{X}(t)=\Delta\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{u}t+\boldsymbol{n}(t) \tag{5}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{X}(t)$=$\boldsymbol{X}^B(t)-\boldsymbol{X}^A(t)$, $\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^B-\boldsymbol{u}^A$, $\boldsymbol{n}(t)$=

$\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^B(t)-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^A(t)$。

假设两飞机在向前看时间 $[0,T]$ 内发生冲突的事件为 $C_{(0,T)}$，则

$$C_{(0,T)}=\{\Delta\boldsymbol{X}(t)\in\boldsymbol{D}^A, t\in[0,T]\} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{D}^A$ 是由最小安全间隔构成的以飞机 A 为中心的圆柱形保护区，保护区半径为 r，高度为 h。

两飞机冲突概率 P_C 为事件 $C_{(0,T)}$ 发生的概率，即

$$P_C=P\{C_{(0,T)}\} \tag{7}$$

2.3 飞机速度为分段常值函数时的冲突概率

对于飞机进行转弯等非匀速直线运动，可以使用足够数量的匀速直线运动片段来近似，即速度为分段常值函数。假设飞机 A 和 B 速度矢量为 $\boldsymbol{u}^A(t)$ 和 $\boldsymbol{u}^B(t)$，两飞机位置 $\boldsymbol{X}^A(t)$ 和 $\boldsymbol{X}^B(t)$ 可以使用随机微分方程来表示。

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{X}^A(t)&=\boldsymbol{u}^A(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{R}^A(\theta^A(t))\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{B}^A(t)\\ \mathrm{d}\boldsymbol{X}^B(t)&=\boldsymbol{u}^B(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{R}^B(\theta^B(t))\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{B}^B(t)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

两飞机相对位置 $\Delta\boldsymbol{X}(t)$ 可以由式(8)得到。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{X}(t)=&\Delta\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{R}^B(\theta^B(t))\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{B}^B(t)\\ &-\boldsymbol{R}^A(\theta^A(t))\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{B}^A(t)\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}^B(t)-\boldsymbol{X}^A(t)$, $\Delta\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}^B(t)-\boldsymbol{u}^A(t)$。

由于飞机 A 和 B 的速度为分段常值函数，因此将两飞机各段速度的起始和终点时刻 T_i^A 和 T_j^B 按照从小到大进行排序可得 T_k，其中 $0\le k\le l$, l 为合并后速度片段的个数。则

$$\Delta\boldsymbol{u}(t)=\Delta\boldsymbol{u}_k,\quad t\in[T_k,T_{k+1}) \tag{10}$$

其中 $T_0=0$ 并且 $T_l=T$, $\Delta\boldsymbol{u}_k$ 为 $[T_k,T_{k+1})$ 时间段的相对速度矢量，为常值矢量。

假设在 $t\in[T_k,T_{k+1})$ 时间段内，两飞机发生冲突的事件为 $C_{(T_k,T_{k+1})}$，则

$$C_{(T_k,T_{k+1})}=\{\Delta\boldsymbol{X}(t)\in\boldsymbol{D}^A, t\in[T_k,T_{k+1})\} \tag{11}$$

假设两飞机在向前看时间 $[0,T]$ 内发生冲突的事件为 $C_{(0,T)}$，则

$$C_{(0,T)}=\bigcup_{k=0}^{k=l-1}C_{(T_k,T_{k+1})} \tag{12}$$

因此，两飞机冲突概率 P_C 可以定义为

$$P_C=P\left\{\bigcup_{k=0}^{k=l-1}C_{(T_k,T_{k+1})}\right\} \tag{13}$$

为了表述方便，令 $C_k=C_{(T_k,T_{k+1})}$。由概率论基本知识可得

$$\max(P(C_i))\le P_C\le\min\left(\sum_{i=0}^{i=l-1}P(C_i),1\right) \tag{14}$$

对于两飞机相对飞行路线分为多个片段的情况，一般在两飞机飞行路线交叉的时间片段内冲突概率最大，并且其它时间片段内飞行冲突概率很小，因此可以使用两飞机飞行路线交叉的时间片段内的总体冲突概率来衡量两飞机在向前看时间内的冲突可能性，即 $P_C\approx\max(P(C_i))$。

3 冲突概率估计算法

3.1 飞机速度为常值时冲突概率的估计

由式(5)可知飞机 A 在原点做随机运动 $\boldsymbol{n}(t)$，飞机 B 以 $\Delta\boldsymbol{x}_0$ 为起点做速度为 $\Delta\boldsymbol{u}$ 的运动。两飞机冲突概率则可以看作在原点做随机运动的飞机 A 进入运动的飞机 B 保护区的概率，假设飞机 B 运动着的保护区为 $\boldsymbol{D}_t^B$，则两飞机冲突概率为

$$P_C=P\{C_{(0,T)}\}=P\{\boldsymbol{n}(t)\in\boldsymbol{D}_t^B, t\in[0,T]\} \tag{15}$$

对于式(15)可以使用蒙特卡罗方法进行计算，但计算量很大，这里给出一种方法估计 P_C 的值[15]。

首先通过非正交变换将随机运动 $\boldsymbol{n}(t)$ 变换为标准布朗运动 $\bar{\boldsymbol{n}}(t)$，然后进行正交旋转变换，这样便于对冲突概率进行估计，最后是使用 Bachelier-Levy 定理对冲突概率进行估计。具体步骤如下：

(1) 非 正 交 变 换　由 于 $\boldsymbol{n}(t)=\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^B(t)-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}^A(t)$，并且假定 $\boldsymbol{B}^A(t)$ 和 $\boldsymbol{B}^B(t)$ 是不相关的，随机运动 $\boldsymbol{n}(t)$ 的协方差为

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{n}(t)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(t+s)]=t(\boldsymbol{\Sigma}^2+\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\theta)) \tag{16}$$

随机运动 $\boldsymbol{n}(t)$ 可以通过非正交变换矩阵 $\boldsymbol{L}^{-1}$ 变为标准的布朗运动 $\bar{\boldsymbol{n}}(t)$，即

$$\bar{\boldsymbol{n}}(t)=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{n}(t) \tag{17}$$

由式(16)和式(17)可得

$$t(\boldsymbol{\Sigma}^2+\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\theta))=t(\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}) \tag{18}$$

矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的具体计算见文献[15]。

式(5)两边乘以矩阵 $\boldsymbol{L}^{-1}$ 得

$$\Delta\boldsymbol{Z}(t)=\Delta\boldsymbol{z}_0+\boldsymbol{v}t+\bar{\boldsymbol{n}}(t) \tag{19}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{L}^{-1}\Delta\boldsymbol{X}(t)$, $\Delta\boldsymbol{z}_0=\boldsymbol{L}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{L}^{-1}\Delta\boldsymbol{u}$。

将随机运动 $\boldsymbol{n}(t)$ 变换为标准布朗运动 $\bar{\boldsymbol{n}}(t)$ 后，进行正交变换使得相对速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向与坐标系某一个坐标轴平行。

(2)正交变换　建立以 $z_1z_2z_3$ 为坐标轴的惯性坐标系，其中 z_1z_2 轴组成水平面，z_3 轴垂直于水平面向上。为了便于计算冲突概率，需要正交变换将相对速度矢量 $\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,v_3]^{\mathrm{T}}$ 旋转到与 z_1 坐标轴平行。其中正交变换包括水平旋转和垂直旋转，具体计算见文献[15]。

假设水平旋转和垂直旋转的矩阵分别为 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$，则经过两次旋转变换，式(19)变为

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\omega}t+\bar{\boldsymbol{n}}(t) \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1\Delta\boldsymbol{Z}(t)$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1\Delta\boldsymbol{z}_0$, $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{v}$，标准布朗运动 $\bar{\boldsymbol{n}}(t)$ 对于旋转变换 $\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1$ 是不变的。

(3)冲突概率的估计　令 $\boldsymbol{M}_t$ 为飞机 B 经过非正

交和正交变换后的保护区。由式(20)可知，变换后的保护区是以 $\boldsymbol{a}$ 为起点，速度为 $\boldsymbol{\omega}$ 进行匀速运动的一个椭圆柱体，如图 1 所示。

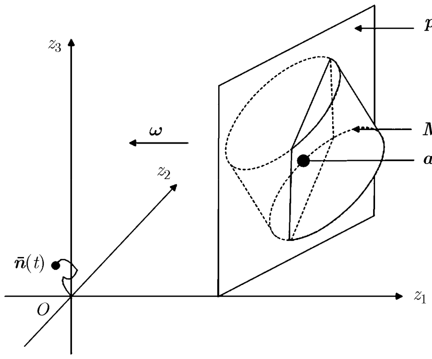

图 1 经过非正交和正交变换后的保护区

此时两飞机冲突概率 P_C 表达式变为

$$P_C = P\{\bar{\boldsymbol{n}}(t) \in \boldsymbol{M}_t,\ t \in [0,T]\} \tag{21}$$

冲突概率 P_C 可以看作一个在原点开始的标准布朗运动 $\bar{\boldsymbol{n}}(t)$ 进入一个初始位置在 $\boldsymbol{a}$ 速度为 $\boldsymbol{\omega}$ 的运动椭圆柱保护区的概率。

在图 1 中，$\boldsymbol{p}_t$ 是经过保护区 $\boldsymbol{M}_t$ 的中心且垂直于相对速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的平面。$\overline{\boldsymbol{M}}_t$ 是保护区 $\boldsymbol{M}_t$ 在 $\boldsymbol{p}_t$ 平面的投影，为不规则的形状，$\boldsymbol{S}_t$ 是边长分别平行于 z_2 和 z_3 轴的包含 $\overline{\boldsymbol{M}}_t$ 的最小矩形，如图 2 所示。其中 Δz_2 和 Δz_3 分别是 $\boldsymbol{S}_t$ 两边边长的一半。

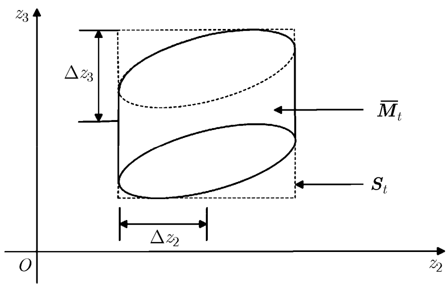

图 2 非正交和正交变换后的保护区在 $\boldsymbol{p}_t$ 平面的投影

针对式(21)中 P_C 的计算，本文提出了一种估计方法。当标准布朗运动 $\bar{\boldsymbol{n}}(t)$ 首次击中运动着的平面 $\boldsymbol{p}_t$，其落在矩形 $\boldsymbol{S}_t$ 内的概率是对 P_C 很好的估计。

令初始位置 $\boldsymbol{a}$ 的坐标值为 $(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，速度 $\boldsymbol{\omega}$ 大小为 ω，则基于 Bachelier-Levy 定理，$\bar{\boldsymbol{n}}(t)$ 首次击中运动着的平面 $\boldsymbol{p}_t$ 的概率密度函数为

$$p_\tau(t) = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(a_1+\omega t)^2}{2t}},\ \ t \ge 0 \tag{22}$$

那么冲突概率 P_C 的估计表达式为

$$\widehat{P}_C = \int_0^T p_\tau(t) P(\boldsymbol{z}(\tau) \in \boldsymbol{S}_t | \tau = t)\mathrm{d}t \tag{23}$$

其中 $P(\boldsymbol{z}(\tau) \in \boldsymbol{S}_t|\tau{=}t)$ 是 t 时刻布朗运动 $\bar{\boldsymbol{n}}(t)$ 击中平面 $\boldsymbol{p}_t$ 时候在矩形 $\boldsymbol{S}_t$ 内的概率。当 $\tau{=}t$ 时刻，标准布朗运动 $\bar{\boldsymbol{n}}(t)$ 在平面 $\boldsymbol{p}_t$ 内呈 2 维高斯分布，其均值是 0，方差为 $t\boldsymbol{I}_2$。则 $P(\boldsymbol{z}(\tau) \in \boldsymbol{S}_t|\tau{=}t)$ 可以表示为

$$\begin{aligned}
g(t) &:= P(\boldsymbol{z}(\tau) \in \boldsymbol{S}_t | \tau = t) \\
&= \int_{|z_2-a_2|\le \Delta z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{z_2^2}{2t}\right)\mathrm{d}t \\
&\quad \cdot \int_{|z_3-a_3|\le \Delta z_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{z_3^2}{2t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[Q\left(\frac{a_2-\Delta z_2}{\sqrt{t}}\right) - Q\left(\frac{a_2+\Delta z_2}{\sqrt{t}}\right)\right] \\
&\quad \cdot \left[Q\left(\frac{a_3-\Delta z_3}{\sqrt{t}}\right) - Q\left(\frac{a_3+\Delta z_3}{\sqrt{t}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$Q(x) = \int_x^\infty \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\exp(-y^2/2)\mathrm{d}y \tag{25}$$

有关 Δz_2 和 Δz_3 的计算见文献[15]。

首中时间 τ 的均值为

$$E[\tau] = \int_0^\infty t p_\tau(t)\mathrm{d}t = \|a_1\| / \|\boldsymbol{\omega}\| \tag{26}$$

由于首中时间 τ 的概率密度集中于 $t_0{:=}E[\tau]$ 附近，因此对 $P(\boldsymbol{z}(\tau) \in \boldsymbol{S}_t|\tau{=}t)$ 在 t_0 处进行 0 阶泰勒展开，即可获得很高的估计精度[16]，则得

$$\widehat{P}_C = g(t_0)\int_0^T p_\tau(t)\mathrm{d}t \tag{27}$$

令 $l(T) := \int_0^T p_\tau(t)\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}
l(T) &= Q\left(\frac{\|a_1\| - \|\boldsymbol{\omega}\|T}{\sqrt{T}}\right) + \exp\left(2\|a_1\| \times \|\boldsymbol{\omega}\|\right) \\
&\quad \cdot Q\left(\frac{\|a_1\| + \|\boldsymbol{\omega}\|T}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned} \tag{28}$$

其中 $Q(x)$ 见式(25)。

由式(27)和式(28)可得

$$\widehat{P}_C = g(t_0)l(T) \tag{29}$$

3.2 两飞机速度为分段常值函数情况下冲突概率的估计

计算两飞机在速度为分段常值情况下的冲突概率，需要计算冲突事件 $C_{(T_k,T_{k+1})}$ 的概率。由式(11)可知，事件 $C_{(T_k,T_{k+1})}$ 表示在 $t \in [T_k,T_{k+1})$ 时间段内，两飞机相对位置在飞机 A 保护区 $\boldsymbol{D}^A$ 内的事件。

由式(2)可知，在 T_k 时刻两飞机相对位置服从高斯分布，假设均值为 $\Delta\boldsymbol{x}_k$，协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}_{T_k}$，如图 3 所示。我们将相对位置 $\Delta\boldsymbol{x}_k$ 以 $t \in [T_k,T_{k+1})$ 时间段内的速度 $\Delta\boldsymbol{u}_k$ 按照时间向前线性逆推到 0 时刻得 $\Delta\boldsymbol{x}_0'$。起始位置为 $\Delta\boldsymbol{x}_0'$ 的布朗运动在 T_k 时刻的位置服从均值为 $\Delta\boldsymbol{x}_k$ 协方差为 $\boldsymbol{\Sigma}_{T_k}'$ 的高斯分布。相对速度 $\Delta\boldsymbol{u}_k$ 与前一段的相对速度 $\Delta\boldsymbol{u}_{k-1}$ 速度方向改变不

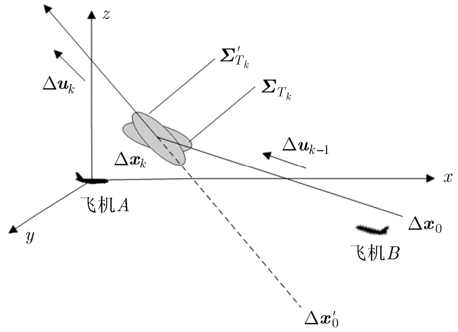

图3 相对飞行速度为两段情况下两飞机相遇几何

大时，协方差 $\boldsymbol{\Sigma}_{T_k}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}'_{T_k}$ 相差不大，并且对于求 $t\in[T_k,T_{k+1})$ 一段时间内的冲突概率来说，T_k 时刻相对位置协方差对求 $[T_k,T_{k+1})$ 时间段内总体冲突概率影响并不大，影响其概率的是两飞机在 $[T_k,T_{k+1})$ 时间段内的最小距离以及到达最小距离的时刻。

因此求 $P(C_{(T_k,T_{k+1})})$ 可以使用式(23)，不过对时间的积分上下限需要变为 T_{k+1} 和 T_k，即

$$P(C_{(T_k,T_{k+1})})\approx\int_{T_k}^{T_{k+1}}p_\tau(t)P(\boldsymbol{z}(\tau)\in\boldsymbol{S}_t|\tau=t)\mathrm{d}t \quad (30)$$

由式(27)和式(29)得

$$\begin{aligned}P(C_{(T_k,T_{k+1})})&\approx g(t_0)\int_{T_k}^{T_{k+1}}p_\tau(t)\mathrm{d}t\\&=g(t_0)\left(\int_0^{T_{k+1}}p_\tau(t)\mathrm{d}t-\int_0^{T_k}p_\tau(t)\mathrm{d}t\right)\\&=g(t_0)(l(T_{k+1})-l(T_k))\end{aligned} \quad (31)$$

由式(31)和式(14)可以求出向前看时间段 $[0,T]$ 内冲突概率 P_C 的上限值和下限值。

4 仿真与分析

4.1 飞机速度为常值情况下的仿真

设置向前看时间为10 min，圆柱形保护区半径为5.6 km，高度为610 m。考虑两架飞机 A 和 B，其中飞机 A 初始位置为坐标系原点，速度 $\boldsymbol{u}_A=(123.5,0,0)^{\mathrm{T}}$ m/s，飞机 B 的初始位置为 $\Delta\boldsymbol{x}_0$，速度为 $\boldsymbol{u}_B$，其水平速度大小为154.3 m/s，垂直速度为7.6 m/s，飞机 B 水平速度方向与坐标系 x 轴正向夹角为 θ。如图4所示。

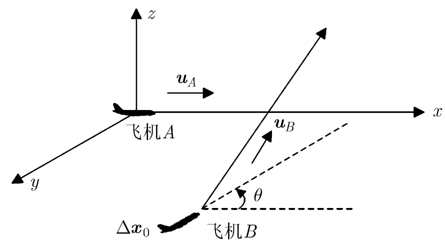

图4 两飞机相遇几何

改变 $\Delta\boldsymbol{x}_0$ 和 θ 值，使得两飞机最小距离、到达最小距离时刻以及水平面上相遇角度不同，在这些情况下，本文算法求出的冲突概率与蒙特卡罗仿真结果的误差如表1所示。

其中使用蒙特卡罗仿真次数 10^5 次。本文计算结果平均绝对误差小于0.01，最大绝对误差为0.042，满足冲突探测对精度的要求[2]。最大绝对误差出现在两飞机水平速度夹角较小并且两飞机最小距离是保护区半径5.6 km时，原因是飞行速度夹角较小时，两飞机位置的布朗运动相关性大，而本文忽略两飞机位置布朗运动的相关性。

4.2 飞机速度为分段常值情况下的仿真

设置向前看时间为10 min，圆柱形保护区半径为5.6 km，高度为610 m。考虑两架飞机 A 和 B 在同一水平面内飞行，其中飞机 A 初始位置为坐标系原点，速度 $\boldsymbol{u}_A$ 大小为123.5 m/s，速度方向与 x 轴正向夹角为60°，预计飞行3 min后，速度大小不变，但速度方向与 x 轴正向夹角变为30°。飞机 B 的初始位置为 $(35.7,0,0)^{\mathrm{T}}$ km，飞行速度 $\boldsymbol{u}_B$ 大小为

表1 本文结果与蒙特卡罗仿真结果的误差

两飞机水平速度交叉角度(°)	到达最小距离时刻(min)	最小距离				
		水平0 m 垂直0 m	水平50 m 垂直305 m	水平3.7 km 垂直0 m	水平5.6 km 垂直0 m	水平7.4 km 垂直0 m
30	3	0.000*	−0.000#	−0.003	−0.042	−0.011
	6	0.000*	0.000*	−0.012	−0.038	−0.022
60	3	0.000*	0.003	−0.004	−0.038	−0.003
	6	0.000*	0.009	−0.004	−0.026	−0.010
90	3	0.000*	0.011	−0.000#	−0.029	−0.001
	6	0.001	0.019	−0.002	−0.012	−0.002
135	3	0.000*	0.022	0.000*	−0.015	0.000*
	6	0.002	0.026	0.000*	−0.006	−0.000#
180	3	0.000*	0.022	−0.000#	−0.011	0.000*
	6	0.004	0.017	0.002	−0.003	0.000*

注：“*”表1中0.000表示误差为正，且小数点后第4位数值小于5；
“#”表1中−0.000表示误差为负，且小数点后第4位数值小于5

123.5 m/s，速度方向与 x 轴正向夹角为 132°，预计两飞机在第 4 min 到达最小距离且最小距离为 0。这里设置飞机 B 在第 2 min 进行水平协调转弯改变飞行速度方向，转弯率为 2.5°/s，其中可以进行右转弯或者左转弯，转过一定角度后继续直线飞行，如图 5 所示。

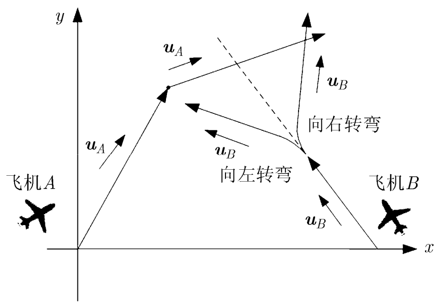

图 5 两飞机相遇几何

本文分别仿真飞机 B 向左或者向右转弯角度为 5°至 50°的情况。本文中将转弯分为两个直线片段来近似，则这种情况下两飞机相对飞行路线可以分为 5 段，分别是 0 时刻至飞机 B 开始转弯的时间片段([0,2] min)，转弯 2 个时间片段，转弯后至飞机 A 改变飞行速度方向的时间片段以及飞机 A 改变飞行速度方向后至向前看时间的片段([3,10] min)。

前 4 个时间片段，两飞机最近距离远大于 5.6 km，求出的两飞机冲突概率为 0。在[3,10] min 片段内，也即两飞机飞行路线交叉片段，两飞机最近距离随着转弯角度的变大而从 0 变大。两飞机飞行路线交叉时间段[3,10] min 内的冲突概率本文算法和蒙特卡罗仿真结果如图 6 所示。

其中使用蒙特卡罗仿真次数为10^5次，本文结果与蒙特卡罗仿真结果最大绝对误差为 0.034。平均绝对误差小于 0.01。当飞机 B 向左或者向右转弯 40°时，两飞机预计最小距离为 7.6 km 和 8.5 km，两飞机冲突概率均小于 0.05，则一定程度上可以认为没有冲突。

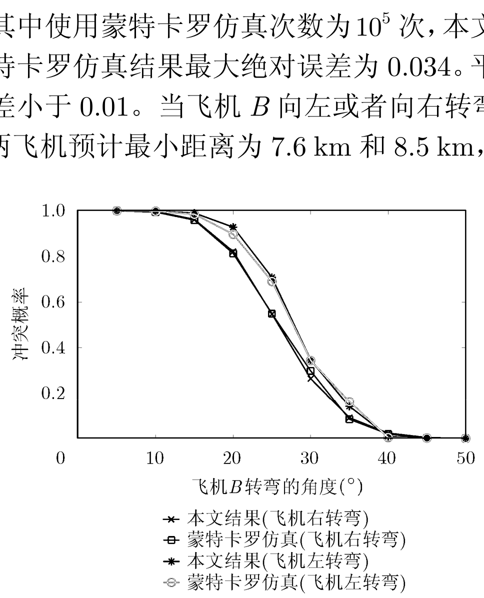

图 6 飞行路线交叉片段的冲突概率

5 结论

本文根据飞机布朗运动模型和总体冲突概率思想提出了一种适用于 3 维空间中飞机运动不仅仅为匀速直线运动情况下的冲突探测算法。对于飞机速度为常值情况，使用坐标变换和 Bachelier-Levy 定理来估算冲突概率。对于飞机速度是分段常值情况，求出了每个时间片段内的冲突概率并给出了向前看时间内冲突概率的上下限。仿真结果验证了本文算法的精度满足冲突探测精度的要求，对空中交通管理系统发现冲突以及进行冲突解决有重要意义。

参 考 文 献

[1] Federal Aviation Administration. Aeronautical information manual-official guide to basic flight information and ATC procedures[R]. Washington, D.C., 2012.

[2] Paielli R A and Erzberger H. Conflict probability estimation for free flight[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1997, 20(3): 588–596.

[3] Kuchar J and Yang L. A review of conflict detection and resolution modeling methods[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2000, 1(4): 179–189.

[4] Prandini M, Lygeros J, Nilim A, *et al*.. Randomized algorithms for probabilistic aircraft conflict detection[C]. Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Berkeley, CA, USA, 1999, 3: 2444–2449.

[5] Prandini M, Hu J, Lygeros J, *et al*.. A probabilistic approach to aircraft conflict detection[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2000, 1(4): 199–220.

[6] 刘小龙, 罗以宁, 赵喜求, 等. 一种改进的 Prandini 概率型中期冲突探测方法[J]. 计算机技术与发展, 2013, 23(1): 214–216.
Liu Xiao-long, Luo Yi-ning, Zhao Xi-qiu, *et al*.. An improved medium-term conflict detection methods of Prandini probability type[J]. *Computer Technology and Development*, 2013, 23(1): 214–216.

[7] 梁海军, 杨红雨, 肖朝, 等. 3维坐标系下的飞行冲突探测算法[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2013, 45(2): 88–93.
Liang Hai-jun, Yang Hong-yu, Xiao Chao, *et al*.. Flight conflict detection algorithm based on the three dimensional coordinate system[J]. *Journal of Sichuan University* (*Engineering Science Edition*), 2013, 45(2): 88–93.

[8] 石磊, 吴仁彪. 预测位置空间离散化的多航路中期冲突探测算法[J]. 信号处理, 2012, 28(11): 1521–1528.
Shi Lei and Wu Ren-biao. Multi-route mid-term conflict detection algorithm based on discretization of predicted position space[J]. *Signal Processing*, 2012, 28(11): 1521–1528.

[9] Liu W and Hwang I. Probabilistic trajectory prediction and

conflict detection for air traffic control[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, 34(6): 1779–1789.

[10] Yang L and Kuchar J. Prototype conflict alerting system for free flight[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1997, 20(4): 768–773.

[11] Prandini M and Watkins O. Probabilistic Aircraft Conflict Detection[R]. Distributed Control and Stochastic Analysis of Hybrid Systems Supporting Safety Critical Real-Time Systems Design (HYBRIDGE), 2005.

[12] Paielli R and Erzberger H. Conflict probability estimation generalized to non-level flight[J]. *Air Traffic Control Quarterly*, 1999, 7(3): 1–12.

[13] Hu J, Lygeros J, Prandini M, *et al*.. Aircraft conflict prediction and resolution using Brownian motion[C]. Proceedings of the 38th International Conference on Decision and Control, Berkeley, CA, USA, 1999: 2438–2443.

[14] 李丹, 崔德光. 基于布朗运动的空中交通短期冲突探测[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2008, 48(4): 477–481.

Li Dan and Cui De-guang. Air traffic control conflict detection algorithm based on Brownian motion[J]. *Journal of Tsinghua University* (*Science & Technology*), 2008, 48(4): 477–481.

[15] Shi Lei and Wu Ren-biao. A probabilistic conflict detection algorithm in terminal area based on three-dimensional Brownian motion[C]. Proceedings of the 11th International Conference on Signal Processing, Beijing, 2012: 2287–2291.

[16] Hu J. A study of conflict detection and resolution in free flight[D]. [Master dissertation], Berkeley: University of California, 1999.

石 磊： 男，1985 年生，博士生，研究方向为飞行冲突探测等.

吴仁彪： 男，1966 年生，教授，研究方向为自适应信号处理及其应用等.

黄晓晓： 女，1989 年生，硕士生，研究方向为飞行冲突探测等.