

电磁开腔品质因数 Q 的计算*

夏 军

(北京理工大学电子工程系 北京 100081)

梁 昌 洪

(西安电子科技大学电磁场工程系 西安 710071)

摘要 本文对电磁开腔镜面反射损耗、镜面衍射损耗、耦合孔损耗在各种模式下引起的品质因数进行了深入的理论分析,得到了品质因数更为精确的计算公式,最后给出了计算实例.

关键词 电磁开腔,品质因数,镜面反射损耗,镜面衍射损耗,耦合孔损耗

1 引言

谐振频率 f 和品质因数 Q 是研究谐振腔特性的两个主要指标.品质因数基本公式是

$$Q = \omega W / P, \quad (1)$$

其中 $\omega = 2\pi f$, W 是谐振腔储能, P 表示损耗功率.电磁开腔品质因数 Q 主要包括:镜面反射损耗引起的 Q_r 、镜面衍射损耗引起的 Q_d 、耦合孔损耗引起的 Q_c . 本文选择典型的圆形对称球面开放腔进行分析,如图1所示.

A. L. Cullen 等学者应用复数源点理论对电磁开腔在各种模式下的矢量场进行了严格的理论分析,推导出谐振频率更为精确的计算公式^[1,2].但电磁开腔品质因数一直沿用过去的计算公式^[3].本文直接从高精度的谐振频率计算公式出发,利用频率增量法^[4]和小孔耦合理论^[5]分别对电

磁开腔镜面反射损耗、镜面衍射损耗、耦合孔损耗在各种模式下引起的品质因数进行了深入的理论分析,推导出品质因数更为精确的计算公式.

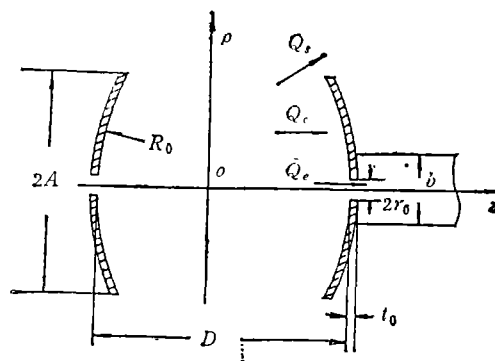


图1 电磁开腔结构图

1993-07-14 收到, 1994-01-04 定稿

* 国家教委博士点基金资助课题.

夏 军 男, 1965 年生, 博士后, 近年来研究方向为电磁开腔测量技术、微波自动化、微带天线、小波应用等领域.

梁昌洪 男, 1943 年生, 教授, 博士生导师, 中国电子学会会员, 研究方向为计算场论、计算微波、微波网络理论、近代数据处理、电磁散射与逆散射、电磁孤立子、电磁导弹、微波测量等领域.

2 镜面反射 Q_c 和衍射 Q_d

对于电磁开腔 TEM_{plq} 模式, 相应的谐振频率计算公式为^[2]

$$f = \frac{c}{2D} \left[q + 1 + \frac{2p + l + 1}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{D}{R_0} \right) + \frac{2p^2 + 2pl - l^2 + 2p + l - 2 \pm 4l}{4\pi k R_0} \right], \quad (2)$$

式中 c 为光速, $k = 2\pi f/c$, p 为径向模数, l 为方位模数, q 为轴向模数. (2)式精度忽略了 $(2p^2 + 2pl - l^2 + 2p + l - 2 \pm 4l)^2 \cdot (k\omega_0)^{-6}/4$ 和更小量级, 其中+, -符号分别对应于 TEM_{plq} 系列 A 和系列 B 模式, ω_0 为波束腰半径. 在电磁开腔中, 若当电场忽略 $(k\omega_0)^{-4}$ 和更小量级时, 可近似认为镜面上电场的法向分量为零^[2]. 这时应用频率增量法, 有^[4]

$$Q_c = -\frac{f}{2\delta_c} \cdot \frac{1}{\partial f / \partial D}, \quad (3)$$

其中 δ_c 是镜面导体的集肤深度, $\partial f / \partial D$ 表示镜面沿轴向外推时谐振频率 f 的变化率. 将 (2) 式代入 (3) 式, 推导可得

$$Q_c = \frac{D}{2\delta_c} \cdot \frac{1 + (2p^2 + 2pl - l^2 + 2p + l - 2 \pm 4l) / (4k^2 R_0 D)}{1 - (2p + l + 1) / (k\sqrt{D(2R_0 - D)}}. \quad (4)$$

分析表明, $1/(k\sqrt{D(2R_0 - D)})$ 是 $(k\omega_0)^{-2}$ 量级, $1/(k^2 R_0 D)$ 则是 $(k\omega_0)^{-4}$ 量级, 可见 (4) 式是 -4 级结果, 与文献[3]提供的公式比较, 显然精度大大提高.

另一方面, 若计及电磁开腔中高斯波束能量传播速度 v_g 与真空光速 c 的差异, 又可给出

$$Q_c = \frac{D}{2\delta_c} \cdot \frac{1}{1 - (2p + l + 1) / (k\sqrt{D(2R_0 - D)}}. \quad (5)$$

显然, (5) 式的精度在文献[3]和 (4) 式之间. 同样道理, 电磁开腔的衍射损耗虽然直接从频率增量法推导存在困难, 但是从开腔能量传播速度出发, 下述修正是合理的:

$$Q_d = \frac{2\pi D}{\lambda \xi_s} \cdot \frac{1}{1 - (2p + l + 1) / (k\sqrt{D(2R_0 - D)}}), \quad (6)$$

其中 ξ_s 表示镜面衍射损耗(%), $\xi_s \approx \exp(-2A^2/w_{pl}^2)$, w_{pl} 为 TEM_{plq} 模式的波束斑点半径. 在高次模条件下 $w_{pl} \approx \sqrt{2p + l + 0.5}w_0$, w_0 为对应基模的波束斑点半径^[6]. 对于基模 $p = 0, l = 0$, (4) 式, (5) 式和 (6) 式与文献[7]的结果完全一致.

文献[3]和 (4) 式, (5) 式以及 (6) 式产生差别的原因在于: 文献[3]中的推导过程已隐含电磁开腔传播平面波(以光速 c 传播)的假定, 而频率增量法则计及了高斯波束以及高次模的特征. 原则上, 它把谐振频率 f 和 Q 值两个问题归结为单变量 f 及其对某一参数的增量, 这样应用高精度的谐振频率计算公式, 就可得到高精度的品质因数计算公式.

3 孔耦合 Q .

考虑厚度为 t_0 的小孔耦合引起的品质因数. 从理论上讲, 在磁耦合条件下采用等效磁流法^[5]可把问题分解为三个区域为 V_1, V_2 和 V_3 和两个磁流 M_1, M_2 , 如图 2 所示.

利用小孔耦合理论, 可进一步得到有限壁厚小孔的广义等效网络(详见文献[8]), 则

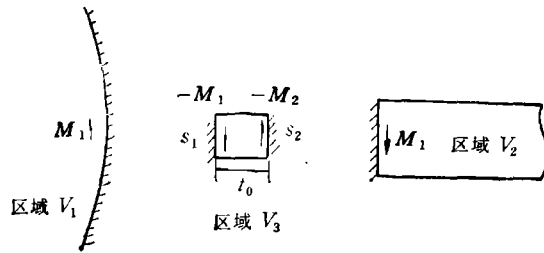


图 2 三区域等效磁流法

有

$$M_2 = -2\omega\mu_0 P_m h_{1y0}^+ / Y_{12}, \quad (7)$$

其中 h_{1y0}^+ 为区域 V_1 的入射波磁场在耦合孔位置的值,

$$P_m = \frac{1}{6} d^3 \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda} \right) / \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \right], \quad d = 2r_0, \quad \lambda_c = 1.706d.$$

而

$$Y_{12} = [G^a + G^c + j(B_{11} + B_{22})] \operatorname{ch}(\alpha_t \cdot t_0) - j\{n_i^2 B_t - [(G^a G^c - B_{11} B_{22}) + j(G^a B_{22} + G^c B_{11})] / n_i^2 B_t\} \operatorname{sh}(\alpha_t \cdot t_0). \quad (8)$$

其中 $\alpha_t = 1.841 \cdot \sqrt{1 - (3.412r_0/\lambda)^2} / r_0$, $n_i^2 B_t = 1.63715 \sqrt{1 - (3.412r_0/\lambda)^2}$, $G^a = k^3 P_m / (3\pi)$, $G^c = 4\pi P_m / (ab\lambda_g)$, $B_{11} = -0.5$, $B_{22} = -0.5[1 - 4\pi P_m / (a^2 b)]$, a, b 分别为波导宽边和窄边长度, λ_g 为波导波长.

在电磁开腔区域 V_1 , 因耦合孔位于球面镜中间位置, 则 $l = 0$. 对应于 TEM_{p0q} 模式, 由文献[2], 忽略 $(2p + l + 1)^2 \cdot (kw_0)^{-2}$ 以上项, 可推导出电磁开腔归一化横向驻波场表示式为

$$e_{1z} = e_{1z}^+ + e_{1z}^- = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w} L_p^0 \left(\frac{2\rho^2}{w^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{w^2} \right) \cdot \left\{ \exp \left[-jkz + j(2p + 1)\Phi - \frac{jk\rho^2}{2R} \right] - \exp \left[jkz - j(2p + 1)\Phi + \frac{jk\rho^2}{2R} \right] \right\}, \quad (9a)$$

$$h_{1y} = h_{1y}^+ + h_{1y}^- = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w} L_p^0 \left(\frac{2\rho^2}{w^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{w^2} \right) \cdot \left\{ \exp \left[-jkz + j(2p + 1)\Phi - \frac{jk\rho^2}{2R} \right] + \exp \left[jkz - j(2p + 1)\Phi + \frac{jk\rho^2}{2R} \right] \right\}. \quad (9b)$$

归一化场(9)式在垂直于 z 轴的横截面 S_1 上满足归一化条件 $\int_{S_1} e_{1z}^+ h_{1y}^+ dx dy = 1$. 在耦合孔位置 ($z = \pm D/2, \rho = 0$), 有 $h_{1y0}^+ = \sqrt{2/\pi} / w_s$, $w_s^2 = [R_0 c / (\pi f)] \cdot \sqrt{D / (2R_0 - D)}$.

在矩形波导区域 V_2 有

$$e_{2x} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \left(\frac{\pi}{a} y \right), \quad (10a)$$

$$h_{2y} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \left(\frac{\pi}{a} y \right). \quad (10b)$$

同样在矩形波导中垂直于 z 轴的横截面 S_2 上满足 $\int_{S_2} e_{2x} h_{2y} dx dy = 1$ 。为简单起见,令区域 V_1 的横向场与归一化场有如下关系 $E_1 = a_x e_{1x}$, $H_1 = a_y h_{1y}/\eta$, 对应于 TEM_{p0q} 模式,整个电磁开腔的储能 W 可表示为

$$W = \frac{1}{4} \int_V (\epsilon_0 E_1^2 + \mu_0 H_1^2) dV = \epsilon_0 D, \quad (11)$$

而区域 V_2 的场,带振幅 A ,有 $E_2 = a_x A e_{2x}$, $H_2 = a_y A h_{2y}/\eta_{10}$, 其中 η_{10} 为矩形波导 TE_{10} 模的波阻抗,有 $\eta_{10} = \eta \lambda_g/\lambda$ 。

由磁流 M_2 在区域 V_2 激励的场振幅在小孔情况下为 $A = -(1/\eta) M_2 \cdot a_y e_{2x}$, 而电磁开腔由于耦合小孔泄漏的功率 P_L 是

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_2} (E_2 \times H_2^*) \cdot a_x dx dy = \frac{|A|^2}{2\eta_{10}}. \quad (12)$$

将(11)式和(12)式代入(1)式,并考虑输入、输出两个耦合孔的影响,可得到有限厚度小孔耦合引起的品质因数

$$Q_c = \frac{ab\lambda_g D \omega_i^2}{32P_m^2} |Y_{12}|^2. \quad (13)$$

4 计算实例

在八毫米波段,选择一个典型的圆形对称球面开放腔,对其在基模和几个高次模条件下的品质因数进行了实际计算。开腔选铜材制作,其电导率 $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, 球面镜曲率半径 $R_0 = 139 \text{ mm}$, 口面直径 $2A = 175 \text{ mm}$, 腔距 $D = 100 \text{ mm}$, 耦合孔半径 $r_0 = 1 \text{ mm}$, 为了便于对比,耦合孔壁厚选 $t_0 = 0$ 和 $t_0 = 0.3 \text{ mm}$ 两种情况,矩形波导尺寸 $a = 7.112 \text{ mm}$, $b = 3.556 \text{ mm}$ 。为方便计算但又不失典型性,取 $q = 20$, $l = 0$, 而 $p = 0, 1, 2, 3, 4$ 。具体计算结果如表 1, 表 2, 表 3 所示,其中

$$\beta = 1/[1 - (2p + l + 1)/(k\sqrt{D(2R_0 - D)})], 1/Q = 1/Q_c + 1/Q_r + 1/Q_{c0}.$$

根据表中计算结果可以发现,随着高次模增高,镜面反射 Q_c 、镜面衍射 Q_r 和孔耦合 Q_{c0} 都

表 1 镜面反射 Q_c 和镜面衍射 Q_r

p	0	1	2	3	4
β	1.0112	1.0333	1.0546	1.0763	1.0953
$Q_c \times 10^{-4}$	13.71	14.28	14.84	15.40	15.95
$Q_r \times 10^{-4}$	1.99×10^{11}	2.79×10^6	449.92	16.18	2.85

表 2 孔耦合 Q_{c0}

p		0	1	2	3	4
$t_0 = 0$	$ Y_{12} ^2$	0.9096	0.9116	0.9132	0.9154	0.9180
	$Q_{c0} \times 10^{-4}$	12.23	10.85	9.67	8.67	7.80
$t_0 = 0.3 \text{ mm}$	$ Y_{12} ^2$	3.8995	3.8519	3.8042	3.7534	3.7007
	$Q_{c0} \times 10^{-4}$	52.41	45.84	40.29	35.55	31.46

有明显的变化, 尤其 Q_c 在高阶模式下急剧减小, 对总品质因数 Q 的结果造成主要影响. 根据不同壁厚条件下 $|Y_{12}|^2$ 的计算结果可以发现, 对于有限壁厚的情况, 若仍采用简单的厚度修正因子^[4]来计算 Q_c 显得很不够精确. 另外, 随着耦合孔壁厚的增厚, Q_c 的值也随着增大, 当然这是以牺牲耦合功率为代价的.

表 3 电磁开腔品质因数 Q

p $r_0(\text{mm})$ $Q \times 10^{-4}$	0	1	2	3	4
0	6.46	6.17	5.78	4.13	1.85
0.3	10.87	10.89	10.59	6.46	2.25

参 考 文 献

- [1] Cullen A L, Yu P K. Proc. Roy. Soc. Lond. A., 1979. 366 (1725): 155—171.
- [2] Luk K M, Yu P K. Proc. IEE-J, 1988, 132(2): 105—113.
- [3] 董宏发, 楼仁海, 北京工业学院学报, 1988, 8(4): 54—63.
- [4] Kajfez D, Chu Q, Wu W L. Microwave and Optical Technology Letters, 1989, 2(12): 431—434.
- [5] Liang C H, Cheng D K. IEEE Trans. on AP, 1983. AP-31(1): 177—182.
- [6] 魏光辉, 朱宝亮. 激光束光学. 北京: 北京工业学院出版社, 1988, 52—58.
- [7] 夏军, 梁昌洪. 科学通报, 1992, 37(3): 278—280.
- [8] 梁昌洪, 夏军. 电磁开腔的孔耦合品质因数 Q_c . 1991 年全国微波会议论文集, 卷 I. 西安: 1991, 368—376.

THE CALCULATION FOR THE Q FACTOR OF AN ELECTROMAGNETIC OPEN RESONATOR

Xia Jun

(Beijing Institute of Technology, Beijing 100080)

Liang Changhong

(Department of Electromagnetic Field Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract The Q factor of an electromagnetic open resonator due to the mirror reflection loss, mirror diffraction loss and coupling aperture loss has been analyzed in detail, and more precise formulae for calculating the Q factor are obtained. Finally a calculating example is given.

Key words Electromagnetic open resonator, Q factor, Mirror reflection loss, Mirror diffraction loss, Coupling aperture loss