第10卷 第4期 电子科学学刊 Vol. 10, No. 4
1988年7月 JOURNAL OF ELECTRONICS July, 1988

电网络的回路岔集分析法*

温书田　　罗　涛
（吉林工业大学，长春）

摘要　本文定义了描述网络图回路与节点关联状况的矩阵 D，定义了回路岔集和回路岔集矩阵．提出并证明了回路节点矩阵与节点矩阵的乘积等于回路岔集矩阵的定理．定义了回路岔集导纳矩阵，假设回路岔集电压矢量作为中间计算量，导出了回路岔集方程，并提出了对电网络的回路岔集分析法．

关键词　电网络；矩阵；回路岔集；回路节点矩阵

一、引　言

为了便于对网络理论进行研究，需要从不同侧面对网络图结构进行描述．在这方面人们已取得了许多令人满意的成果[1-4]．如关联矩阵 A、回路矩阵 B、割集矩阵 Q 等，他们都是从各自侧面同图的全部支路的关联来描述网络图结构状况的．支路是图的一个要素；而节点则是另一个要素．根据形式逻辑，人们自然可以设想，从不同侧面与全部节点的关联同样可以用来描述网络图的结构状况，并进一步寻求这种描述理论的各种实际应用．因此，本文首先将给出回路节点关联矩阵的定义，在此基础上提出分析计算电网络的回路岔集法．

二、回路节点关联矩阵 D，矩阵 D 与矩阵 A_a 之积，回路岔集矩阵 Q

对于具有 n 个节点 b 条支路的网络图，回路节点关联矩阵 D 定义为

$$D=[d_{ij}]_{l\times n} \tag{1}$$

式中

$$d_{ij}=\begin{cases}1, & \text{表示独立回路 } i \text{ 含有节点 } j;\\ 0, & \text{表示独立回路 } i \text{ 不含有节点 } j.\end{cases}$$

l 为网络图中独立回路的个数；并有 $1\leqslant i\leqslant l$，$1\leqslant j\leqslant n$．

对图1所示网络图，有矩阵 A_a，D．将 D 与 A_a 相乘，得积矩阵 Q．矩阵 Q 的行对应于在图中所选的独立回路，列对应于图的全部支路．

* 1986年11月24日收到，1987年4月9日修改定稿．

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = DA_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

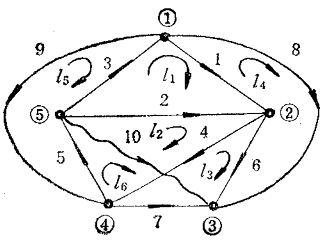


图 1

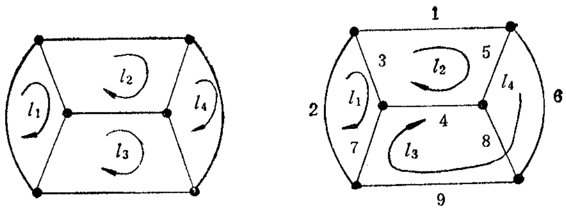
从积矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 发现，矩阵每行中的 1 元素所对应的支路都是连结在本行所对应回路上的分岔支路. +1 对应的支路的方向是从回路的节点向外射出，－1 对应的支路的方向则是从外界射入回路的节点. 0 元素对应的支路都是与回路分岔无关的支路. 由此可见，积矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 表示着图的全部支路从其所有独立回路上分岔出去的状况，故它是图的各独立回路与从其分岔出去的支路的关联矩阵. 简称回路岔集矩阵.

下面，对回路岔集矩阵等的概念作一般意义的规定. 设电网络图是连通图，它有 n 个节点，b 条支路. 那么，有下述定义

定义 1 回路岔集　在连通图中，一个回路岔集是一个支路集合. 从图中去掉该支路集合的所有支路时，该回路便被从原图中割离出来而处于孤立状况；若少去掉该支路集合中的任一条支路，则该回路便要与图的其余部分连通而不再孤立. 回路岔集不含有组成该回路的各条支路，也不含有该回路所含各节点间的直接关联支路. 如图 2(b) 中的支路 8，它是不属于 l_3 回路岔集的.

连通图中独立回路的个数是 $l(=b-n+1)$ 个，故该图的独立回路岔集的个数也是 l 个. 不过，这里须要说明的是，l 个独立回路，它们的岔集却并不一定都能相互独立，如图 2(a) 所表明的，l_1 回路岔集与 l_4 回路岔集就不能相互独立. 为了取得相互独立的 l 个回路岔集，就必须：按照后选回路岔集比原有已选回路岔集至少含有一条新支路的原则来选定所需的 l 个独立回路.

例如，对图 2(a)，若选取独立回路 $l_1 l_2 l_3 l_4$ 时，则由于后选回路 l_4 的岔集与已选回路



(a)　　(b)

图 2

l_1 的岔集相同，故而得不到相互独立的四个回路岔集．为得到四个独立回路岔集，则须按照后选回路的岔集比原有已选回路的岔集至少含有一条新支路的原则，将初选的四个独立回路重新加以组合和编排，如图 2(b) 所示．这样才能得到四个相互独立的回路岔集．

定义 2　回路岔集矩阵 $\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{Q}=[q_{ij}]_{l\times b} \tag{2}$$

式中

$$q_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第 } j \text{ 支路属于第 } i \text{ 独立回路岔集，且其方向从该回路节点射出.}\\ -1, & \text{第 } j \text{ 支路属于第 } i \text{ 独立回路岔集，且其方向从外界射入回路节点.}\\ 0, & \text{第 } j \text{ 支路不属于第 } i \text{ 独立回路岔集.}\end{cases}$$

l 为独立回路岔集的个数．b 为图的支路个数．

定理　设 $\boldsymbol{A}_a,\boldsymbol{D},\boldsymbol{Q}$ 分别为同一图的关联矩阵、回路节点矩阵、回路岔集矩阵，则下述关系式成立

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_a \tag{3}$$

证明　设图中 j 支路的始、终节点分别为 p, q．j 支路与其端节点 p, q 间的固有关联机会 $a_{pj}(1)$、$a_{qj}(-1)$ 和此二节点与图中第 i 独立回路的关联机会 d_{ip}, d_{iq} 共同决定着积矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 中的元素 q_{ij}．q_{ij} 的状况共有四种．

(1)　j 支路含在回路 i 中．这时，$d_{ip}=d_{iq}=1$．而在 A_a 阵的第 j 列元素 a_{kj} $(1\leqslant k\leqslant n)$ 中，$a_{pj}=1$，$a_{qj}=-1$，其余元素都为 0．那么

$$q_{ij}=\sum_{k=1}^{n}d_{ik}a_{kj}=d_{ip}a_{pj}+d_{iq}a_{qj}=1\cdot 1+1\cdot(-1)=0$$

这表示 j 支路不含在第 i 独立回路岔集中．构成回路的支路在回路上不分岔，这是符合图的实际的．

(2)　j 支路的始节点 p 在独立回路 i 上，其终节点 q 则不在．这时，$d_{ip}=1$，$d_{iq}=0$．那么，

$$q_{ij}=\sum_{k=1}^{n}d_{ik}a_{kj}=d_{ip}a_{pj}+d_{iq}a_{qj}=1\cdot 1+0\cdot(-1)=1$$

这表示 j 支路属于第 i 独立回路岔集，其方向从 i 回路节点 p 向外射出．

(3)　j 支路的终节点 q 在独立回路 i 上，而其始节点则不在．这时，$d_{ip}=0$，$d_{iq}=$

1．那么，

$$q_{ij}=\sum_{k=1}^{n}d_{ik}a_{kj}=d_{ip}a_{pj}+d_{iq}a_{qj}=0\cdot 1+1\cdot(-1)=-1$$

这表示 j 支路属于第 i 独立回路岔集，其方向从外界射入 i 回路的节点 q.

（4） j 支路与独立回路 i 不接触．这时，$d_{ip}=d_{iq}=0$．那么

$$q_{ij}=\sum_{k=1}^{n}d_{ik}a_{kj}=d_{ip}a_{pj}+d_{iq}a_{qj}=0\cdot 1+0\cdot(-1)=0$$

这表示支路 j 不含在第 i 独立回路岔集中.

综上所述，任意支路 j 对任意独立回路 i 的三种关联状况与回路岔集矩阵定义完全相符．于是，此定理得证.

三、电网络的回路岔集分析法

定义 3 回路岔集导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}_{lc}$

$$\boldsymbol{Y}_{lc}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{Q}^T \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{Y}_b$ 是支路导纳矩阵．回路岔集导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}_{lc}$ 中的元素 y_{ii} 称为它的自导纳，$y_{ij}(i\neq j)$ 称为它的互导纳．当支路间无互感时，则 y_{ii} 是第 i 独立回路岔集所有支路导纳之和；y_{ij} 是 i，j 两个独立回路岔集间全部公有支路导纳之和的负值.

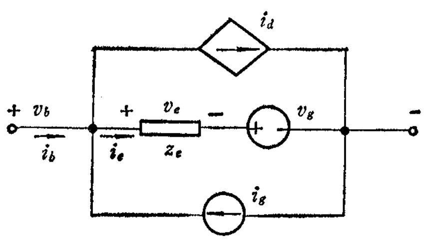


图 3

为推导独立回路岔集方程，采用图 3 所示的标准支路.

网络的支路电压、电流方程的矩阵形式和元件电压、电流方程的矩阵形式为

$$\boldsymbol{I}_b=\boldsymbol{I}_e+\boldsymbol{I}_d-\boldsymbol{I}_g \tag{5-a}$$

$$\boldsymbol{V}_b=\boldsymbol{V}_e+\boldsymbol{V}_g \tag{5-b}$$

$$\boldsymbol{I}_e=\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{V}_e \tag{5-c}$$

(5-c)式中，$\boldsymbol{Y}_e$ 为元件导纳矩阵．(5-a) 式中的 $\boldsymbol{I}_d$ 为非独立电流源矢量

$$\boldsymbol{I}_d=\boldsymbol{G}\boldsymbol{V}_e+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{I}_e=(\boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}_e^{-1}+\boldsymbol{B}')\boldsymbol{I}_e=\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}_e \tag{5-d}$$

(5-d) 式中，$\boldsymbol{G}$ 是电压控制电流源互导矩阵，$\boldsymbol{B}'$ 是电流控制电流源放大系数矩阵[5]．将 (5-d)式，(5-c)式代入(5-a)式，得

$$\boldsymbol{I}_b=(1+\boldsymbol{B})\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{V}_e-\boldsymbol{I}_g \tag{5-e}$$

在网络标准支路的设置中，由于不含非独立电压源，于是支路导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}_b$

$$\boldsymbol{Y}_b=(1+\boldsymbol{B})\boldsymbol{Y}_e \tag{5-f}$$

当网络不存在非独立电源时，$\boldsymbol{B}$ 为零阵，则有 $\boldsymbol{Y}_b=\boldsymbol{Y}_e$，即元件导纳矩阵就是支路导纳矩阵．将 (5-f)，(5-b) 式代入 (5-e) 式，得

$$\boldsymbol{I}_b=\boldsymbol{Y}_b(\boldsymbol{V}_b-\boldsymbol{V}_g)-\boldsymbol{I}_g \tag{5-g}$$

根据电流连续性原理，即根据网络约束克希荷夫电流定律，对各独立回路岔集，有

$$QI_b = 0 \tag{6}$$

将(5-g)式代入(6)式，得

$$Q[Y_b(V_b - V_g) - I_g] = 0$$
$$QY_bV_b = QI_g + QY_bV_g$$

设

$$V_b = Q^T V_{lc} \tag{7}$$

(7)式中的 V_{lc} 称作回路岔集电压矢量，变量个数为 l 个．于是，有

$$QY_bQ^TV_{lc} = QI_g + QY_bV_g \tag{5-h}$$

再设

$$I_{lg} = QI_g + QY_bV_g \tag{8}$$

(8)式中电流矢量 I_{lg} 的含意是，独立电流源矢量 I_g 和独立电压源矢量 V_g 送入网络中各独立回路岔集的电源电流矢量．

将(8)式，(4)式代入(5-h)式，得

$$Y_{lc}V_{lc} = I_{lg} \tag{9}$$

这就是独立回路岔集方程，简称回路岔集方程．

利用回路岔集方程求解电网络的步骤：

(1) 在任选第一个回路岔集后，按后选回路岔集比原有已选的各回路岔集至少含有一条新支路的原则来逐个选定其它$(l-1)$个独立回路岔集．$(l = b - n + 1)$．

(2) 求回路岔集矩阵 Q．有两种求法．一种是通过公式 $Q = DA_a$ 来求；另一种是根据 Q 的意义来直接列写(在无互感无受控源情况下)．

(3) 求回路岔集导纳矩阵 Y_{lc}．也有两种求法． 一种是利用公式 $Y_{lc} = QY_bQ^T$ 来求；另一种是根据 Y_{lc} 的意义直接列写(在无互感无受控源情况下)．

(4) 求独立电源注入网络各独立回路岔集的电流矢量 I_{lg}．利用(8)式解算．

(5)求回路岔集电压矢量 V_{lc}．利用(9)式解出．

(6) 求网络支路电压矢量 V_b．利用(7)式计算．

四、回路岔集法应用举例和交流分析程序流程图

举例[5]　对图 4 (a)所示电路，在 $e_s = \sqrt{2}\cos 2t$ 时，计算各支路的电压和电流．

解　该电路的拓扑图示于图 4(b) 中，其独立回路岔集数 $l = b - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$．按照选取独立回路岔集的法则选回路 $l_1\ l_2\ l_3$ 三个岔集．

从图 4(b) 得到的矩阵 A_aD 和 Q 分别为

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

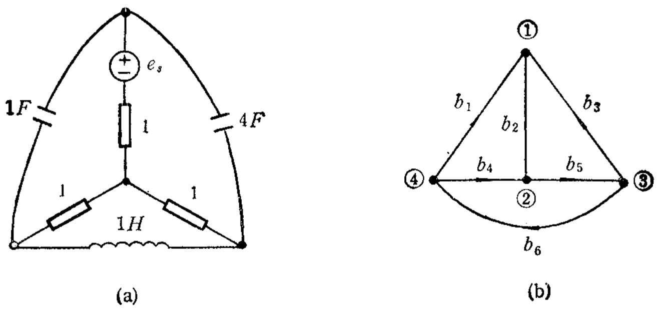


图 4

该网络的电流源矢量 $\boldsymbol{I}_g$，电压源矢量 $\boldsymbol{V}_g$ 分别为

$$\boldsymbol{I}_g = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$$

$$\boldsymbol{V}_g = [0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$$

它的支路导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}_b$ 与元件导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}_e$ 相等，是

$$\boldsymbol{Y}_b = \boldsymbol{Y}_e = \operatorname{diag}\left[j2,\ 1,\ j8,\ 1,\ 1,\ -j\frac{1}{2}\right]$$

其回路岔集导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}_{lc}$ 为

$$\boldsymbol{Y}_{lc} = \begin{bmatrix} 1+j\frac{3}{2} & -j2 & j\frac{1}{2} \\ -j2 & 1+j10 & -j8 \\ j\frac{1}{2} & -j8 & 1+j7\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

其回路岔集等效电流矢量 $\boldsymbol{I}_{lk}$ 为

$$\boldsymbol{I}_{lk} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}_g + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_g = [0,\ -1,\ 0]^T$$

通过回路岔集方程 $\boldsymbol{Y}_{lc}\boldsymbol{V}_{lc} = \boldsymbol{I}_{lk}$ 算得回路岔集电压矢量 $\boldsymbol{V}_{lc}$ 为

$$\boldsymbol{V}_{lc} = \begin{bmatrix} 0.190\ \underline{/112.6^\circ} \\ 0.649\ \underline{/-173.4^\circ} \\ 0.038\ \underline{/\ 75.7^\circ} \end{bmatrix}$$

通过支路电压矢量 $\boldsymbol{V}_b$ 与回路岔集电压矢量 $\boldsymbol{V}_{lc}$ 的关系式 $\boldsymbol{V}_b = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{V}_{lc}$ 算得支路电压矢量 $\boldsymbol{V}_b$

$$\boldsymbol{V}_b = \begin{bmatrix} 0.190\ \underline{/112.6^\circ} \\ 0.361\ \underline{/-11.3^\circ} \\ 0.038\ \underline{/75.7^\circ} \\ 0.300\ \underline{/20.4^\circ} \\ 0.365\ \underline{/174.7^\circ} \\ 0.161\ \underline{/-59.3^\circ} \end{bmatrix}$$

这个例题选自文献[5]，由回路岔集法解得的结果与之相同．这个例题所列的各种矩阵，所进行的各种运算和所得到的结果，都可由以下程序在 IBM-PC88 机上得到．回路

岔集法的交流分析程序框图如图 5 所示．

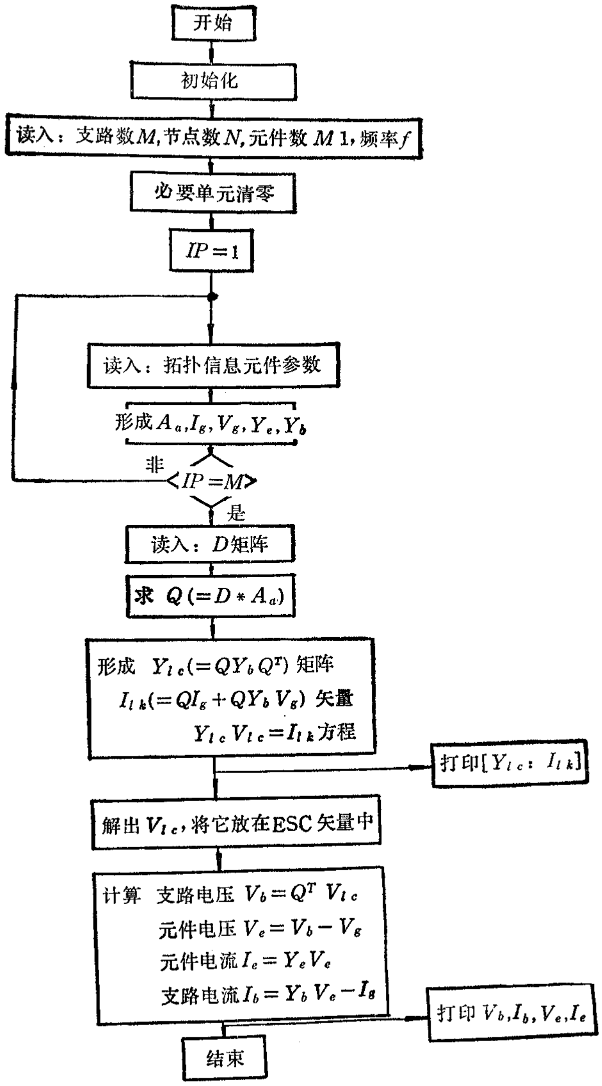


图 5　回路岔集法交流分析程序框图

五、各种算法比较和结论

回路岔集法同目前常用分析电网络的其它算法列表比较如下(表 1)

由表可见，与回路法、割集法相比，不必求树是岔集法的一个特点．网孔法局限于平面电路，而岔集法则不受限制．节点法既不局限于平面电路又不必求树，但在独立节点数比独立回路数多的网络分析中，需要建立的方程数多，占用的存储单元多，运算求解的工作量大，所需的时间长．节点法的这些问题，割集法都存在，而且它还需要求树．回路岔集法实质上也是一种割集分析法，但它与顶点割集，一般割集不同，在节点数多独立回路

表1　分析电网络的各种算法比较表

方法＼比较＼项目	求树否	是否仅适于平面网络	建立方程少所需的条件	首先解出的量	备注
节点法	不	不	节点数少	电压	
网孔法	不	是	网孔数少	电流	
回路法	求	不	连支数少	电流	与树有关
割集法	求	不	树支数少	电压	与树有关
岔集法	不	不	独立回路数少	电压	

数少的网络分析中，由于本法所需建立的方程数少，又不必求树，故较为适用。尽管回路法与岔集法所需建立的方程数相同，但由于本法不必求树，而且能直接解出电压量，所以在节点数多独立回路数少且需求解电压量的网络分析中，岔集法比回路法更显有效。

参考文献

[1] W. K. Chen, Applied Graph Theory, Amsterdam, North Holand, 1967, pp. 36—76.
[2] 陈树柏等，网络图论及其应用，科学出版社，1982年，第186—240页.
[3] 楼世博等，图论及其应用，人民邮电出版社，1982年，第46—81页.
[4] S. Seshu, M. B. Reed, Linear Graph and Electrical Networks, Reading, Mass., 1961, ch. 4.
[5] 成履国等，电路基本理论习题解答，人民教育出版社，1981年，第164页.

ANALYSIS OF THE ELECTRIC NETWORK BY THE BRANCH SET METHOD

Wen Shutian　　Luo Tao

(Jilin University of Technology, Changchun)

ABSTRACT The matrix $\boldsymbol{D}$ describing the relations of the loops to the nodes in the graph, the branch set based on the independent loops, and their matrix $\boldsymbol{Q}$ are defined. The theorem in which the product of the loop-node matrix $\boldsymbol{D}$ multiplied by the incidence matriÅ $\boldsymbol{A}_a$ is equal to the matrix $\boldsymbol{Q}$ is put forward and proved. The admittance matrix $\boldsymbol{Y}_{te}$ of the branch set is defined, and it is assumed that the vector voltage of the branch set, $\boldsymbol{V}_{te}$ is a calculative quantity. So the equation of the branch set is derived and the branch set method is put forward.

KEY WORDS Electric network; Branch set method; Loop-node matrix; Admittance matrix